数学基础知识丛书

排列与组合

吴世煦

江苏人民出版社

排列与组合

吴世煦

江苏人民出版社

排列与组合

吴世煦

*

江苏人民出版社出版
江苏省新华书店发行
江苏淮阴新华印刷厂印刷

1979年5月第1版
1979年5月第1次印刷
印数：1—200,000册

书号：13100·020 定价 0.45 元

内 容 提 要

这套《丛书》共二十四册，系统介绍数学基础知识和基本技能，供中学数学教师、中学生以及知识青年、青年工人阅读。

《丛书》根据现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）精神编写，内容上作了拓宽、加深和提高。《丛书》阐述的数学概念、规律，力求符合唯物辩证法，渗透现代的数学观点和方法，以适应四个现代化的需要。为了便于读者阅读，文字叙述比较详细，内容由浅入深，由易到难，循序渐进，习题、总复习题附有答案或必要的提示。

本书比较系统地讲解排列与组合的基础知识，并通过例题的分析，揭示解题的规律。全书共分五个部分，一、二部分主要研究相异元素不许重复的排列与组合；三、四部分重点讨论相异元素允许重复的排列与组合和不尽相异元素的排列与组合；第五部分介绍排列与组合的母函数。

目　录

一、相异元素不许重复的排列

§1 两个基本原理

在研究排列问题之前，先介绍两个基本原理。我们来看这样的一个问题：

从甲地往乙地，可以乘飞机、火车、汽车、轮船，每天有飞机一班、火车六班、汽车三班、轮船两班，问一天中乘飞机或乘不同班次的火车、汽车、轮船，有几种不同的选择方法？

因为乘飞机只有1种方法，乘火车有6种不同的方法，乘汽车有3种不同的方法，乘轮船有2种不同的方法。每一种方法都可以直接从甲地到达乙地，所以不同的选择方法有

$$1+6+3+2=12\text{种。}$$

一般地说，我们有下面的基本原理：

加法原理　如果完成某事件有n种方式，第一种方式中有n_1个方法，第二种方式中有n_2个方法，第三种方式中有n_3个方法，……，第n种方式中有n_n个方法，不论用哪一种方式中的哪一个方法，都能达到完成该事件的目的，那末完成这事件共有$n_1+n_2+n_3+\cdots\cdots+n_n$种不同的方法。

我们再看一个问题：

从甲地到丙地，必须经过乙地，甲地到乙地的交通线路有铁路、公路和水路；从乙地到丙地的交通线路只有公路和水路。一个旅客由甲地经乙地再转赴丙地，有几种不同的途

径？

因为从甲地到乙地有三种不同的途径，无论哪一种途径到乙地后又各有两种不同的途径去丙地，所以不同的途径有

$$3\times2=6 \text{ 种.}$$

一般地说，我们有下面的基本原理：

乘法原理　如果完成某事件分n个步骤，第一步有n_1种方法，第二步有n_2种方法，第三步有n_3种方法，……，第n步有n_n种方法，各个步骤依次连续完成，该事件才算完成，那末，完成这事件共有$n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdots\cdots n_n$种不同的方法.

现在，我们运用这两个原理，来解决具体问题。

例 1　(1) 一种电风扇上装有三个转速不同的开关，问能控制几种不同的转速？

(2) 一种车床用两个手柄联合控制转速，一个手柄有两档，另一个手柄有五档，问能控制几种不同的转速？

解　(1) 开关只能开一个，不能同时开两个或三个，因为开任何一个都能达到调节转速的作用。就是说有三种方式，每一种方式各有一种方法，每一种方法都能达到完成事件的目的，所以根据加法原理，能控制 $1+1+1=3$ 种不同的转速。

(2) 两个手柄要联合使用，而一个手柄的任何一档，都可以与另一个手柄的任何一档搭配。两个手柄，看作两个步骤，第一步有 2 种方法，第二步有 5 种方法，两步依次连续完成，事件才算完成，所以根据乘法原理，能控制$2\times5=10$种不同的转速。

例 2　(1) 某农场为了考察三个小麦品种和四个水稻品种，要在土质相同的土地上引种试验，问应安排试验小区几块？

（2）某农场为了考察玉米、小麦、水稻的品种，要在三块土质不同的试验小区上引种试验，问有几种不同的试验方法？

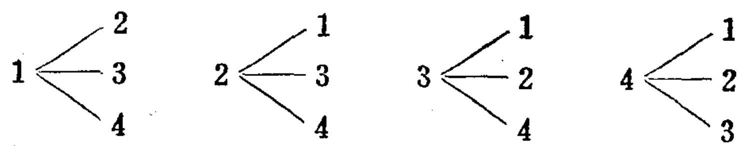
解　（1）小麦有三个品种，需要三块试验小区；水稻有四个品种，需要四块试验小区，土质既相同，彼此没有什么牵连关系，所以需要安排 $3+4=7$ 块试验小区。

（2）第一步先考虑玉米，可以在三种不同土质中任选一种，有 3 种方法；第二步考虑小麦，可以在剩下的两种土质中任选一种，有 2 种方法；第三步考虑水稻，只剩下一种土质，因此只有 1 种方法。三步依次连续完成，才算安排工作完成，据乘法原理，可知有 $3\times 2\times 1=6$ 种不同的试验方法。

显然，如果第一步不是先考虑玉米，而是先考虑小麦或水稻，可以得到同样的结果。

例 3　从 1、2、3、4 四个数字里，每次写出两个数字组成两位数，能得到多少个不同的两位数？若（1）这两位数中的数字不许重复使用；（2）这两位数中的数字允许重复使用。

解　（1）因为数字不许重复使用，所以这四个数字中的任一个选为十位数字，则个位数字只能是其它三个数字中的任一个，作如下的划分：

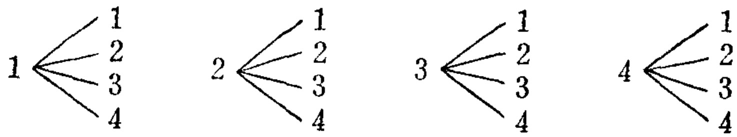


得到12、13、14、21、23、24、31、32、34、41、42、43十二个不同的两位数。

也可以这样来分析，第一步从这四个数字里任选一个为十位数字，有 4 种方法；因为数字不许重复使用，第二步只

能由剩下的三个数字里任选一个为个位数字，所以只有 3 种方法。两步依次连续完成，组成两位数这一事件即已完成，因此根据乘法原理可以得到 $4\times3=12$ 个不同的而且数字无重复的两位数。

（2）因为数字允许重复使用，所以这四个数字里任选一个为十位数字，而个位数字还可以是原来的四个数字里的任一个，作如下的划分：



得到11、12、13、14、21、22、23、24、31、32、33、34、41、42、43、44十六个不同的两位数。

也可以这样来分析，第一步从这四个数字里任选一个为十位数字，有 4 种方法；因为数字允许重复使用，第二步可以再从原来的四个数字里任选一个为个位数字，所以仍有 4 种方法。两步依次连续完成，组成两位数这一事件即已完成，因此根据乘法原理可以得到 $4\times4=16$ 个不同的数字有重复的两位数。

从上面几个例子里，可以看到处理问题时何时用加法原理，何时用乘法原理，是由问题的性质和要求来确定的。在这里，再概括一下。

如果一事件的完成有几种不同的方法，这些方法彼此间的关系是独立的，任选一种方法都能达到完成事件的目的，那末完成这事件的方法数即是这些方法数的和，用加法。

如果一事件的完成，必须分几个步骤，每个步骤可以有不同的方法，但每个步骤间的方法，是交错串联的，即一个步骤中的任一种方法都与下一个步骤中所有的方法相连接，

依次连续完成全部的步骤，才能达到完成该事件的目的，那末完成这事件的方法数即是这些方法数的积，用乘法。

这两个基本原理，在排列与组合中，无论是推导公式，或是解答应用问题，都常常引用，其理虽浅，应用颇广，希望读者很好掌握。

§2 排列的定义

就人类认识运动的秩序说来，总是由认识个别的和特殊的事物，逐步地扩大到认识一般的事物。下面我们就通过两个具体问题，来认识排列这个概念。

例 1 有红、绿、黄三种颜色的灯各一个，任意选择两个，分上下位置悬挂作为讯号，问能组成几种不同的讯号？

任何一种颜色的灯，可以挂在上面，也可以挂在下面，从上下位置来划分，可以表示如下

上面位置：	红		绿		黄	
下面位置：	绿	黄	红	黄	红	绿
挂法编号：	①	②	③	④	⑤	⑥

很明显，有六种不同的讯号。运用乘法原理，也容易说明这一点。因为从这三个灯中任选一个挂在一个确定的位置上有 3 种方法，再从剩下的两个灯中任选一个挂在另一个位置上有 2 种方法。两个位置悬挂完毕，事件完成，所以有 $3\times 2=6$ 种不同的悬挂方法，也即有 6 种不同的讯号。

这个问题在这里提出，目的不在于寻求挂法的种数，而要研究这两个灯在上下位置的情况。我们注意到①、②、④三种情况，两个灯的颜色不同（③、⑤、⑥ 等情况也是如此），但是①与③两个灯的颜色相同，只是出现在上下位置

的顺序不同（②与⑤以及④与⑥也是如此），说明这个问题与上下位置的顺序是密切相关的。

例 2 从 7、8、9 三个数字里，任意选出两个，一个为十位数的数字，另一个为个位数的数字组成两位数，问能组成多少个十位数字与个位数字不相同的两位数？

从下面的划分，可以清楚地看到有六个不同的两位数。

十位数字：	7		8		9	
个位数字：	8	9	7	9	7	8
组成编号：	①	②	③	④	⑤	⑥

我们在 §1 里已经研究过类似的问题，这里主要是研究这两个数字在左右位置（即十位与个位这两个位置）的情况，我们得到与例 1 同样的结论，即①、②、④三种情况两个数字不同（③、⑤、⑥等情况也是如此），但是①与③的两个数字相同，只是出现在十位、个位的顺序不同（②与⑤以及④与⑥也是如此），说明这个问题与左右位置的顺序也是密切相关的。

这两个问题提到的事物，一是颜色灯，一是数字。以后在问题里所涉及的事物，不论是物、是人、是数字、是字母等等统称为元素。这样，在上面两个问题里有两个本质的东西，一是从给定的三个元素里取出两个元素来，一是把取出来的两个元素按照所有可能的顺序排列起来，这类问题，就是我们这里要介绍的排列问题。上面两个问题就可以概括为从三个元素里每次取出两个元素的排列问题。一般地说，有下面的定义。

从m个元素里每次取出n个元素，按照一定顺序排成一列，叫做从m个元素里每次取出n个元素的排列。

这一部分所研究的排列问题，有这样一些限制条件，即给出的m个元素是相异的，不允许有相同的元素；取出的n个元素也是相异的，即不允许重复使用元素，因此有$1\leqslant n\leqslant m$，m、n表示元素的个数，是正整数。$m>n$时，叫做**选排列**，$m=n$时，叫做**全排列**。

从"相异的"m个元素里，每次取出"不许重复使用的"n个元素，这里加了引号的限制词，在后面研究问题时，在不致发生误会的情况下，一般都不写出来，这是为了减少文字叙述上的累赘。

排列定义中包含两个本质的东西，一是"从m个元素里取出n个元素"，一是"按照一定顺序排成一列"。前者容易理解，主要矛盾是后者。什么叫做"一定顺序"呢？就是无论是上下、或左右、或前后，都要考虑元素所有可能出现的顺序，以§1里的例3(1)题来分析，这是一个从四个元素里每次取出两个元素的排列问题，在所有十二个排列里，包含如下三种情况：

1． 元素完全不同的。如12，43，这是两种不同的排列。

2． 元素部分相同的。如12，13，这也是两种不同的排列。

3． 元素完全相同的。如12，21，这也是两种不同的排列。

只有当元素完全相同，每个相同元素排列的位置也完全相同时，才是同一种排列，例如12、12是同一种排列。今后在要求写出所有的不同排列时，发生这种情况，叫做排列有重复，说明排列有错误；当然，如果没有把所有的排列全部写出来，发生这种情况，就叫做排列被遗漏，也说明排列

有错误。怎样才能无重复无遗漏地把所有排列写出来呢？接下去的一节就来研究排列的方法问题。

§3 排列的方法

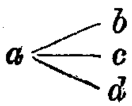
为什么我们能够在一本厚厚的字典里很快地查出一个字来呢？为什么我们一看汽车的牌照就知道这辆汽车是属于何省何市的呢？为什么电话接线员能够迅速无误地为人们接通电话呢？这是因为每一个字都是按字母顺序或边旁笔划顺序编排的，汽车牌照号码、电话用户号码都是按数字顺序编排的。现在我们就来研究按顺序排列元素的方法。

例 1 写出从 a、b、c、d 四个元素里，每次取出一个元素的所有排列。

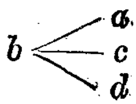
按顺序一个一个地取出来，得到四种排列，即 a，b，c，d。

例 2 写出从 a、b、c、d 四个元素里，每次取出两个元素的所有排列。

根据例 1 从四个元素里每次取出一个元素的排列有四种，在每一种这样的排列后面排上其余三个元素的每一个，就得到取两个元素的所有排列。这就是若首位是 a，则末位可以是 b，或 c，或 d，有三种排列。同理，首位更换为 b，为 c，为 d，也分别各有三种排列。即



排列的顺序是 $a\ b\ c\ d$；



排列的顺序是 $a\ b\ c\ d$；

$c\left\langle\begin{matrix}a\\ b\\ d\end{matrix}\right.$ 排列的顺序是 $a\ b\ c\ d$；

$d\left\langle\begin{matrix}a\\ b\\ c\end{matrix}\right.$ 排列的顺序是 $a\ b\ c\ d$.

共计有十二种不同的排列，它们是

ab，ac，ad，ba，bc，bd，

ca，cb，cd，da，db，dc.

这里的符号“┌─┐”表示排列的顺序往后，“└─┘”表示排列的顺序往前. “往前”、“往后”均依所给字母原有的前后顺序而言. 所谓“按照一定顺序排成一列”，就是指排列的顺序既要往前，又要往后.

例 3 写出从 a、b、c、d 四个元素里，每次取出三个元素的所有排列.

根据例 2，从四个元素里每次取出两个元素的排列有十二种，在每一种这样的排列后面排上其余两个元素的每一个，就得到取三个元素的所有排列，按首、中、末三个位置划分如下：

首 中 末	首 中 末	首 中 末	首 中 末
$a\left\langle\begin{matrix}b<\begin{matrix}c\\ d\end{matrix}\\ c<\begin{matrix}b\\ d\end{matrix}\\ d<\begin{matrix}b\\ c\end{matrix}\end{matrix}\right.$	$b\left\langle\begin{matrix}a<\begin{matrix}c\\ d\end{matrix}\\ c<\begin{matrix}a\\ d\end{matrix}\\ d<\begin{matrix}a\\ c\end{matrix}\end{matrix}\right.$	$c\left\langle\begin{matrix}a<\begin{matrix}b\\ d\end{matrix}\\ b<\begin{matrix}a\\ d\end{matrix}\\ d<\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\end{matrix}\right.$	$d\left\langle\begin{matrix}a<\begin{matrix}b\\ c\end{matrix}\\ b<\begin{matrix}a\\ c\end{matrix}\\ c<\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\end{matrix}\right.$

共计有二十四种不同的排列，它们是

abc，abd，acb，acd，adb，adc，

bac，bad，bca，bcd，bda，bdc，

cab，cad，cba，cbd，cda，cdb，

dab, dac, dba, dbc, dca, dcb.

这里，我们用例 2 取两个元素的所有排列，过渡到例 3 取三个元素的所有排列，这种用少取一个元素的排列来过渡，虽然有效，但未免冗繁，可以简化过程，直接进行排列，方法如下：

首先排首位，是 a 或 b 或 c 或 d，有四种变化（表明无重复），且只有四种变化（表明未遗漏），中末两个位置，暂以空位表示，即

a		

b		

c		

d		

其次，排中位，用 a 为首位的来分析，因为除 a 排定外，尚余下 b、c、d 三个元素，所以有三种排法，即

a	b	

a	c	

a	d	

再次，排末位，因为首、中两位已用去两个元素，余下的两个元素任选一个排在末位，则上面三种排法的每一种，都可以分解为两种。这样 a 排在首位的有六种。同理 b,c,d 分别为首位的也各有六种，由此得到所有的二十四种排列。

这样，按所给字母原有的先后顺序，依次考虑第一位、第二位、……各个位置上所有可能的变化，既保证了所有的排列无重复无遗漏，也保证了每一个排列里的元素无重复无遗漏。用树图或用方框划分，比较直观，容易接受，但一旦把握了这种排列方法，就不必再用图、框划分了，方法如下：

按所给元素的原有顺序，先写出第一种排列：abc；

更换末位的 c 为 d，写出第二种排列：abd；

更换中位的 b 为 c，写出第三、第四种排列：acb、acd；

更换中位的 b 为 d，写出第五、第六种排列：adb、adc；

这样就得到 a 为首位的六种排列．用同法写出 b、c、d 为首位的各种排列．

例 4 写出 a、b、c、d 四个元素的所有全排列．

首先写出第一种排列 $abcd$；因为只给予四个元素，已无别的新元素更换了．所以更换倒数第二位的 c 为 d，写出第二种排列 $abdc$；更换倒数第三位的 b 为 c，后面按顺序分别排上 b、d，写出第三、第四种排列 $acbd$，$acdb$；再更换倒数第三位的 c 为 d，写出第五、第六种排列 $adbc$，$adcb$，最后更换倒数第四位（即首位）的 a 为 b，又写出六种排列，直到首位更换为 d，写出最后六种排列，共计二十四种，它们是

$$
\begin{array}{llllll}
abcd, & abdc, & acbd, & acdb, & adbc, & adcb, \\
bacd, & badc, & bcad, & bcda, & bdac, & bdca, \\
cabd, & cadb, & cbad, & cbda, & cdab, & cdba, \\
dabc, & dacb, & dbac, & dbca, & dcab, & dcba.
\end{array}
$$

我们看到在所有二十四种排列里，每种排列里的元素都完全相同，只区别在顺序上的不同．

上面所谈的排列方法，可以推广到从 m 个元素里取出 n 个元素的排列．概括地说，就是从首位开始，按所给元素原有顺序，依次排列到第 n 位，写出第一种排列，然后由末位回溯到首位，依次更换元素，如此进行，直到写出所有排列为止．