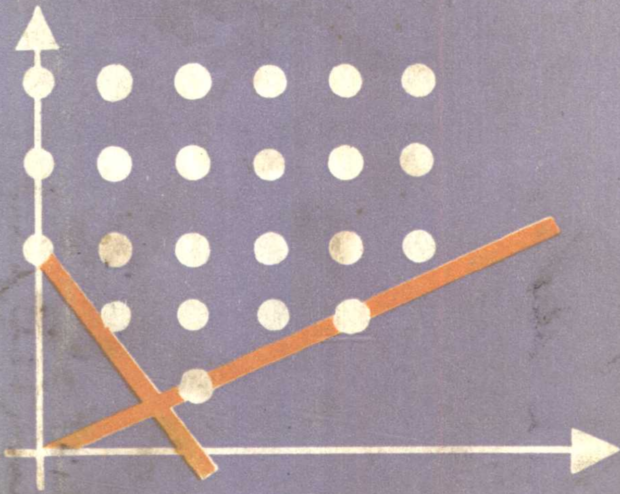
XIANXING GUIHUA FUDAO

胡显佑 钱辉镜 编



线性规划辅导

中国铁道出版社

线性规划辅导

胡显佑　（中国人民大学）　编
钱辉镜　（中央广播电视大学）

中国铁道出版社

1988年·北京

内 容 简 介

本书是按中央广播电视大学关于本课程教学大纲的要求和讲授内容而编写的。包括线性规划问题的数学模型、线性规划问题的解、单纯形方法、对偶理论和对偶单纯形方法、参数线性规划与灵敏度分析、某些线性规划问题的特殊解法、整数线性规划等七章。内容由浅入深、叙述详尽。通过大量典型例题的剖析，辅导学生理解基本概念，掌握基本运算能力。每章还附有小结及复习思考题，帮助学生总结提高，适于自学。本书也具有理工科大学《线性规划》的基本内容。

本书可供广播电视大学和职工大学及自学者使用，也可供普通高等院校经济类学生及辅导教师参考使用。

线性规划辅导

胡显佑　钱辉镜　编

中国铁道出版社出版

责任编辑　冯秉明　封面设计　王毓平

新华书店总店科技发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092毫米 1/16　印张：13.375　字数：306 千

1988年5月　第1版　第1次印刷

印数：0001—10,000册　定价：2.65 元

前　　言

近代的最优化方法是在四十年代才出现的，虽然历史不长，但是发展却非常迅速，应用范围愈来愈广，方法愈来愈多。作为最优化方法之一的线性规划问题，则是运筹学中最基础的内容。

本书以辅导教材的形式，向读者介绍线性规划问题的数学模型的建立、该问题解的性质、单纯形法、改进单纯形法、对偶单纯形法、参数线性规划与灵敏度分析、某些线性规划的特殊解法以及整数线性规划等内容。

本书各章均按以下四个部分编写：

一、基本内容

这一部分是介绍该章的教学内容，并对具体内容进行系统的阐述，使读者从中学到处理线性规划问题的方法，了解线性规划问题中的有关理论及其推导过程。

二、要求

在这一部分里具体地明确了对每一章内容应掌握的程度，这可使读者根据要求来检验自己。

三、例题分析

这是本书的重要组成部分，我们在其中精选了相当数量、各种类型的例题，由浅入深、由易到难，以例题的形式反映各章的教学基本内容，并尽可能地从不同的角度、用不同的方法体现解决线性规划问题的方法与技巧，同时，还选择了一些概念题和证明题，目的在于使读者了解线性规划问题中的一些基本理论。

四、习题

在这部分里，根据教学基本内容，各章均配置了大量的习题，供读者作为学习之余的综合练习。考虑到读者自学的条件，对于习题我们还提供了答案或提示，仅供参考。

本书还编写了数学附录Ⅰ（线性代数的简介）、数学附录Ⅱ（不等式组的区域解），它是初学者在学习线性规划问题前的预备知识。对于没有学过高等数学的读者，可先阅读这两个附录，再使用本书。

本书可供大、专院校财经专业的学生使用，并可供广播电视大学、职工大学、业余大学经济类学生学习使用，同时还可供有志于研究和应用经济数学方法的读者参考。

本书中钱辉镜同志编写了第一、二、三章，以及数学附录Ⅰ、Ⅱ等内容；胡显佑同志编写了第四、五、六、七章的内容。

由于编者水平有限，时间仓促，书中错误在所难免，请读者批评指正。

编　者

1985年12月

目　　录

第一章 线性规划问题的数学模型

一、基 本 内 容

(一) 运输问题的数学模型

1. 具体实例

设有两个民用煤厂A_1，A_2。它们的产量分别为25吨与35吨。其产量要供应B_1，B_2，B_3三个居民点，需求量分别为19吨、25吨、16吨。已知各煤厂到各居民点的煤运价格如下：

表1.1

煤厂 \ 居民点 运价（元/吨）	B_1	B_2	B_3
A_1	30	40	60
A_2	50	100	150

问如何调运，使得总运费最省？

此问题可使x_{ij}表示煤厂A_i运往居民点B_j的煤的数量（单位：吨），其中$i=1, 2$；$j=1, 2, 3$。现以x_{ij}列出调运表：

表1.2

煤厂 \ 居民点	B_1	B_2	B_3	发 量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	25
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	35
收 量	19	25	16	60

由表 1.2 可得调运方案满足下面的约束条件的一组变量 $x_{ij}(i=1,2;j=1,2,3)$的值：

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=25 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=35 \\ x_{11}+x_{21}=19 \\ x_{12}+x_{22}=25 \\ x_{13}+x_{23}=16 \end{cases} \tag{1.1}$$

由表 1—1 及变量x_{ij} $(i=1,2;j=1,2,3)$ 不难得到

$$f=30x_{11}+40x_{12}+60x_{13}+50x_{21}+100x_{22}+150x_{23} \tag{1.2}$$

由此我们称式（1.1）为约束条件方程组，简称为约束条件；式（1.2）称为目标函数。这里，目标函数的实际意义是总运费。

由于$x_{ij}(i=1,2;\ j=1,2,3)$是变量，所以它表明本实际的运输问题有多种可行的方案。

如是，这一实际问题就归结为，求一组变量 $x_{ij}(i=1,2;\ j=1,2,3)$的值，使之满足约束条件（1.1），并且使目标函数 f 的值最小（即总运费最小）。

2. 一般实例

设某种物资有m个产地A_1，A_2，…，A_m，联合供应n个销地B_1，B_2，…，B_n。各产地产量（单位：吨），各销地销量（单位：吨），各产地至各销地的单位运价（单位：元/吨）等如表1.3所示：

表中：a_i表示产地A_i的产量（$i=1, 2, \cdots, m$）；

b_j表示销地B_j的销量（$j=1, 2, \cdots, n$）；

c_{ij}表示A_iB_j间的单位运价（元/吨）

$(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n)$；

表1.3

产地 \ 运价（元/吨） \ 销地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量（吨）
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
销　量（吨）	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

问应如何调运，才能使总运费最少？

此问题可使 x_{ij} 表示由产地 A_i 运往销地 B_j 的物资数 $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 。现列表如下：

表1.4

产地 \ 销地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量（吨）
A_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}	a_1
A_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	x_{m1}	x_{m2}	$\cdots$	x_{mn}	a_m
销　量（吨）	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

（1）当产销平衡即

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

时，这一运输问题根据表1.3及表1.4，得运输问题的数学模型为：

求一组变量$x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$的值，使它满足约束条件

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}=a_1 \\ x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}=a_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}=a_m \\ x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{m1}=b_1 \\ x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{m2}=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{mn}=b_n \\ x_{ij}\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n) \end{cases} \tag{1.3}$$

并使目标函数

$$f=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\cdots+c_{mn}x_{mn} \tag{1.4}$$

的值最小。

（2）当产销不平衡（比如产大于销），即

$$\sum_{i=1}^{m}a_i>\sum_{j=1}^{n}b_j$$

时，得运输问题的数学模型为：

求一组变量$x_{ij}(i=1,2,\cdots;m;j=1,2,\cdots,n)$的值，使它满足约束条件

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}\leqslant a_1 \\ x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}\leqslant a_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}\leqslant a_m \\ x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{m1}\leqslant b_1 \\ x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{m2}\leqslant b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{mn}\leqslant b_n \\ x_{ij}\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n) \end{cases} \tag{1.5}$$

并使目标函数

$$f=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\cdots+c_{mn}x_{mn} \tag{1.6}$$

的值最小

（二）生产组织问题的数学模型

设用A_1，A_2，…，A_m种原料，可以生产P_1，P_2，…，P_n种产品。现有的原料数，每个单位产品所需的原料数，以及每单位产品可得利润数如下表所示：

表1.5

原料 \ 单位产品所需原料 \ 产品	P_1	P_2	$\cdots$	P_n	现有原料
A_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
A_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_n
单位产品所得利润	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	

问如何组织生产才能使利润最大？

此问题可设x_j为生产产品$P_j(j=1,2,\cdots,n)$的计划生产数，因此，生产组织问题的数学模型为：

求一组变量$x_j(j=1,2,\cdots,n)$的值，使它满足约束条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_n \\ x_j\geqslant 0\ (j=1,2,\cdots,n) \end{cases} \tag{1.7}$$

并使目标函数

$$f=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{1.8}$$

的值最大。

（三）线性规划问题的数学模型

由较具体的实际应用问题的数学模型，根据需要，我们还可以进一步抽象化。

例如式（1.3）及式（1.4）所涉及的数学模型可抽象地写成：

求一组变量$x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$的值，使它满足约束条件

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \quad (i=1,2,\cdots,m)\\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \quad (j=1,2,\cdots,n)\\ x_{ij}\geqslant 0 \ (i=1,2,\cdots;m;j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

并使目标函数

$$f=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

的值最小。

例如式（1.5）及式（1.6）所涉及的数学模型可抽象地写成：

求一组变量$x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$的值，使它满足约束条件

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\leqslant a_i \quad (i=1,2,\cdots,m)\\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \quad (j=1,2,\cdots,n)\\ x_{ij}\geqslant 0 \ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

并使目标函数

$$f=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}c_{ij}x_{ij}$$

的值最小。

再例如式（1.7）及式（1.8）所涉及的数学模型可抽象地写成：

求一组变量$x_j(j=1,2,\cdots,n)$的值，使它满足约束条件

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

并使目标函数

$$f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

的值最大。

以上我们仅仅建立了运输问题、生产组织问题的数学模型。除此之外，在经济领域中还有所谓“布局问题”、“计划问题”以及“合理下料问题”，虽然这些问题是各式各样的，但它们的数学模型却有相同的数学形式。并且其数学模型有一般形式：

求一组变量$x_j(j=1,2,\cdots,n)$的值，使其满足约束条件

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i\ (\text{或}\geqslant b_i;\ \text{或}=b_i) & (i=1,2,\cdots,m)\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

并使目标函数

$$f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

的值最小（或最大）。

其中a_{ij}，b_i，c_i $(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$ 为已知量。

由于在约束条件中的数学表达式都是线性等式或线性不等式，以及目标函数也都是线性函数，因此我们把这种模型的问题称之为线性规划问题。

二、要　求

1. 掌握线性规划问题的数学模型的一般形式。

2. 熟悉运输问题、生产组织问题、下料问题、配料问题等几个经济问题的数学模型。

3. 能建立简单的线性规划问题的数学模型。

三、例 题 分 析

例 1　（运输问题）设有一种物资要调运，其调出地A、B、C的调出量分别为 7（吨）、4（吨）、9（吨），其调入地甲、乙、丙、丁的调入量分别为 3（吨）、6（吨）、5（吨）、6（吨），调出的总量和调入的总量相等（都是20吨）。已知从调出地运这种物资 1 吨到调入地的运价如下表所示：

表1.6

调出地 \ 运价（元） \ 调入地	甲	乙	丙	丁
A	3	11	3	10
B	1	9	2	8
C	7	4	10	5

问每一调出地应调运多少到每一调入地，才使总运费最少？试将此问题建立起数学模型。

解 设调出地A运给调入地甲、乙、丙、丁的量分别为x_1，x_2，x_3，x_4；

调出地B运给调入地甲、乙、丙、丁的量分别为x_5，x_6，x_7，x_8；

调出地C运给调入地甲、乙、丙、丁的量分别为x_9，x_{10}，x_{11}，x_{12}。

由此列出调运表如下：

表1.7

调入地 / 调出地	甲	乙	丙	丁	发量
A	x_1	x_2	x_3	x_4	7
B	x_5	x_6	x_7	x_8	4
C	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	9
收量	3	6	5	6	20

由表1.7可得调运方案的线性规划的数学模型：

求一组变量x_1，x_2，…，x_{12}的值，使它们满足约束条件

$$
\begin{cases}
x_1+x_2+x_3+x_4=7\\
x_5+x_6+x_7+x_8=4\\
x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}=9\\
x_1+x_5+x_9=3\\
x_2+x_6+x_{10}=6\\
x_3+x_7+x_{11}=5\\
x_4+x_8+x_{12}=6\\
x_j\geqslant 0\ (j=1,2,\cdots,12)
\end{cases}
$$

并使目标函数

$$f=3x_1+11x_2+3x_3+10x_4+x_5+9x_6+2x_7+8x_8+7x_9$$

$$+4x_{10}+10x_{11}+5x_{12}$$

的值最小。

例 2 （运输问题）有A_1、A_2两个工厂生产同一产品，其月产量分别为30(吨)和20(吨)，这些产品要分配并运输至B_1，B_2，B_3三个用户，这三个用户的月需求量分别为10(吨)、15(吨)和25(吨)。已知各厂到各用户的运价如下：

表1.8

工厂 \ 用户 运价(元/吨)	B_1	B_2	B_3
A_1	100	140	110
A_2	160	150	190

问如何分配产品，能使运费最省？试建立此问题的数学模型。

解 设x_{ij}表示工厂$A_i(i=1,2)$运往用户$B_j(j=1,2,3)$的产品量（单位：吨）。现以$x_{ij}(i=1,2;j=1,2,3)$列出调运表如下：

表1.9

工厂 \ 用户	B_1	B_2	B_3	产量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	30
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	20
需求量	10	15	25	50

由表 1.9 可得产品分配调运方案的线性规划问题的数学模型：

求一组变量$x_{ij}(i=1,2;j=1,2,3)$的值，使它们满足约