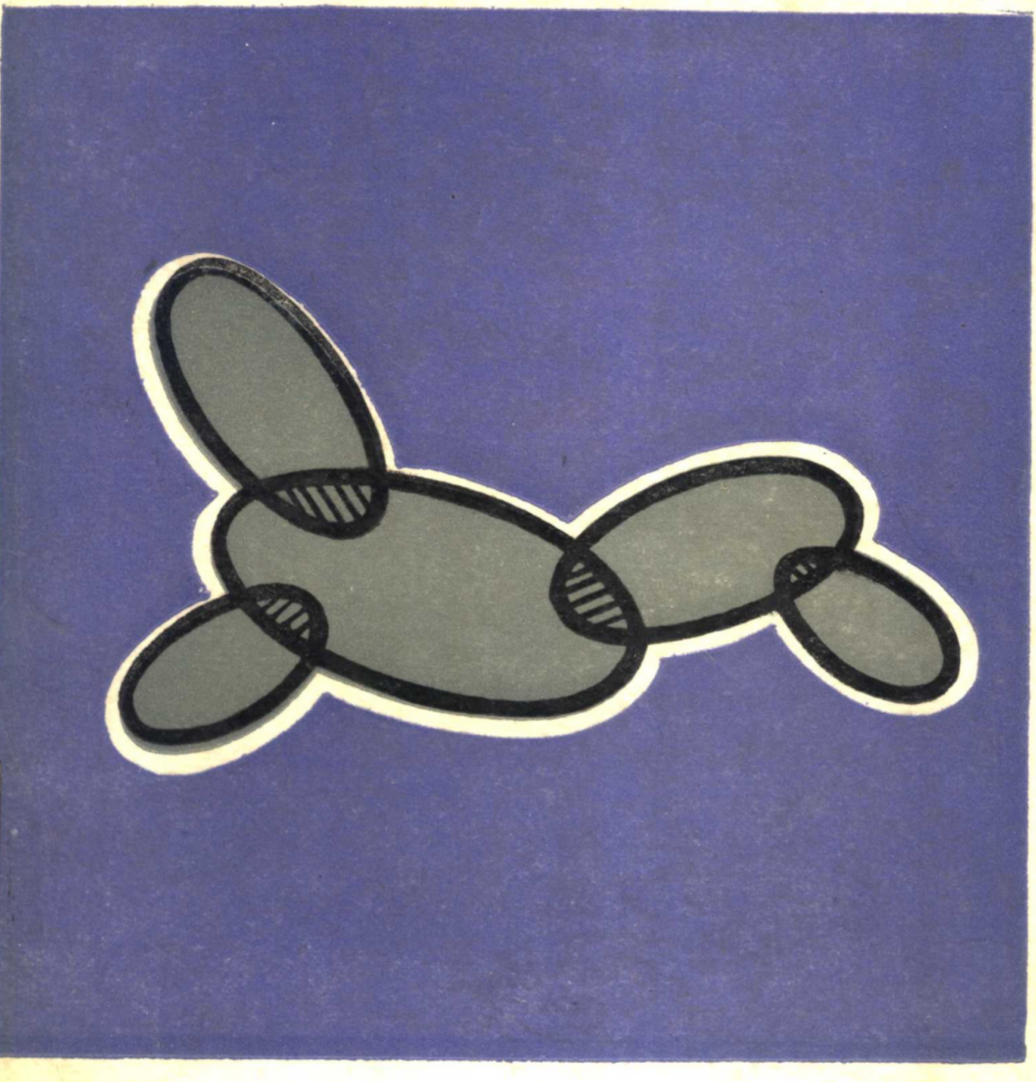
结构振动分析的子结构方法

殷学纲　陈　淮　蹇开林　编著

中国铁道出版社



结构振动分析的子结构方法

殷学纲　陈　淮　蹇开林　编著

中　国　铁　道　出　版　社

1991年·北京

(京)新登字063号

结构振动分析的子结构方法
殷学纲 陈 淮 蹇开林 编著

中国铁道出版社出版、发行
(北京市东单三条14号)
各 地 新 华 书 店 经 售
中国铁道出版社印刷厂印

开本：850×1168毫米 1/32 印张：13.375 字数：305 千
1991年9月 第1版 第1次印刷
印数：1—2000 册

ISBN7-113-01010-5/TU·221 定价：10.30 元

前　言

随着对工程结构动态设计要求的提高，结构的动态分析变得越来越重要了。在复杂结构的动态分析中，由于结构模型的自由度通常都较多，因此不得不进行大量的计算；另一方面，许多大型复杂结构，譬如：飞机、海洋钻探平台，航天器等等，它们是由若干个往往是在不同地方的生产厂家制造的部件（子结构）组装而成的，因此，进行各部件的动态试验不但更容易，而且也是必需的……。这样，即从这些实际的需要而提供了动态子结构方法发展的客观条件。动态子结构方法，就是结构动态分析中的子结构方法。其目的通常是简化计算，节省机时或有效地利用部件的动态试验的结果。对于动态子结构方法究竟应该如何分类，似乎并无定论。我们认为，从原理与方法上的差异来分，动态子结构方法基本上可以分为三类——模态综合方法，界面位移综合方法与迁移子结构方法。我们把聚缩阻抗矩阵综合法与超单元方法归入界面位移综合法之中。在这三类方法中，目前，模态综合法的应用最为广泛与成功。

自本世纪60年代初由Hurty.W.C与Gladwell.G.WL提出了模态综合法的概念并奠定其基础以来已30年了，在这30年中，模态综合方法得到了很大的发展，现在这一方法基本上已定型化并且已成为结构动态分析的一种常规方法，在不少的大型结构分析程序中，都有模态综合法的程序。而且，由于模态综合法的发展，促进了整个动态子结构方法的研究与发展。目前，在国内外虽然还有一些人在继续进行动态子结构方法的研究，但毕竟高潮已经过去。现在，不但可以对动态子结构方法进行较全面的、系统的归纳与总结，而且也到了向更多的从事结构分析与结构设计

的工程技术人员，科研人员以及与此相关的专业的大学生与研究生们系统介绍动态子结构方法的时刻了。这就是编写本书的所在。因此本书中对上述三类动态子结构方法的原理与方法只作简要的说明，避免了对各类方法发展过程的陈述，以及对烦琐的公式推导等等。力求使具有工科大学学历的人都能顺利地阅读本书。

本书的内容分为两部分，第一部分是与动态子结构方法相关的结构振动分析基础。包括第一章：多自由度线性系统振动理论基础；第二章：结构振动分析的有限元法基础；第三章：结构振动特征问题的求解方法。在这一部分中我们力图以简明的陈述与推导，说明与动态子结构方法相关的结构振动分析的基本理论与方法，补充一般工科大学生在这方面的不足，以便能顺利地阅读第二部分的内容。第二部分是各类动态子结构方法及其应用介绍，包括第四章，模态综合方法；第五章，界面位移综合方法，与第六章迁移子结构方法。在这一部分中，我们重点介绍了目前较通用的各种动态子结构方法（特别是模态综合法），并且说明了这些方法在结构动态响应分析中的应用，以及最近的某些发展情况。而对于动态子结构方法中的一些较深的内容，譬如，关于复模态的模态综合法，流固耦合振动的模态综合法等等，本书没有涉及。

由于编著者的水平所限，书中难免有不少不当之处，恳请读者指正。

编著者

1991

内 容 简 介

结构振动分析的子结构方法，即动态子结构方法，是当今进行结构动态分析的一种常用方法。本书简明地说明了该方法的原理与具体运用。

全书内容分两个部分：第一部分介绍了与动态子结构方法相关的振动理论与有限元方法等；第二部分则扼要地介绍了几种常用的动态子结构方法，包括模态综合法、界面位移综合法与迁移子结构方法，以及这些方法在结构态动特性分析与响应分析中的应用。

本书可供高等院校理工专业高年级学生、研究生、教师，以及从事飞机、船舶、导弹、航天器、汽车、机床、电气机械，工程机械、机车、桥梁等分析、设计、试验与制造部门的工程技术人员参考使用。

目　　录

第一章　多自由度线性系统振动的理论基础

在复杂结构的振动分析中，一般都需要首先用各种离散化方法，建立结构的离散化力学模型，即把一个无穷多自由度的系统，通过离散化的方法，转变成为一个近似的多自由度系统来进行研究。而且复杂结构的实际振动多是微幅振动，既使是有刚体自由度的系统，除去其刚体运动部分以外的振动，也多是微幅振动。对于作微幅振动的系统，一般总可以通过线性化的方法将它作为一个线性振动系统，既系统的动力学方程是一个线性振动方程。另外，由于阻尼机制本身的复杂性，以及对阻尼的实际测量精度不高，所以目前仍通用“等效粘滞阻尼”的近似线性阻尼理论。在这样的实际背景下，目前的多自由度线性系统的振动分析，一般多采用实模态理论所导出的方法进行。近几年来，有不少人从事复模态理论与方法的研究，也取得了不少有意义的成果，但由于阻尼理论不完备，实测精度不高，因此复模态理论的实际应用还远不及实模态理论普遍。

本章将主要说明多自由度线性振动分析的“实模态理论”，它是本书后叙部分的理论基础，而对于“复模态理论”只作简单的介绍。

§1—1　多自由度系统的动力学方程

多自由度系统的动力学方程可以利用Newton定律来建立，也可以利用分析力学中的多种方法来建立。在本书中我们只简要

介绍与第二类Lagrange方程有关的内容，并假定读者已具备"虚位移原理"，"动力学普遍方程"等分析力学的基础知识。

质点系在笛卡儿坐标系下的动力学普遍方程为：

$$\sum_{i=1}^{3N}(X_i-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i=0 \qquad (1-1-1)$$

其中，N为系统的质点总数，对于连续体，N为无穷大。设有如图1—1所示的质点系，j为质点的编号，X_i为对应于x_i坐标方向的作用力，$m_i=m_{3j+k}$（$k=1,2,3$）为第（$j+1$）个质点的质量，显然应有$m_{3j+1}=m_{3j+2}=m_{3j+3}$，$\delta x_i$为$x_i$坐标方向的虚位移。

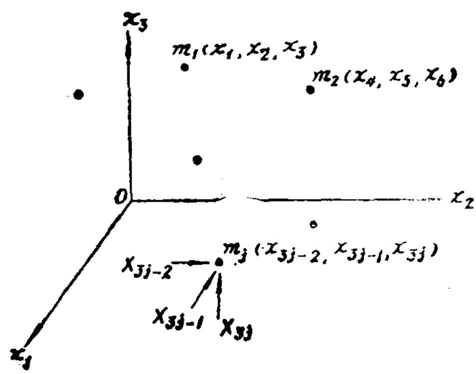


图 1—1

可以方便地把（1—1—1）式改写为以下的矩阵形式：

$$\{\delta x\}^T(\{X\}-[m]\{\ddot{x}\})=0 \qquad (1-1-2)$$

其中 $[m]$为由m_i组成的$3N$阶对角阵。

若选一组广义坐标$\{q\}_{n\times1}$且$\{x\}_{3N\times1}$与$\{q\}_{n\times1}$之间有如下的变换关系

$$x_i=x_i(q_1\cdots q_n,t) \qquad (1-1-3)$$

则由（1—1—3）式可得如下的重要关系式：

$$\dot{x}_i=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial x_i}{\partial t} \qquad (1-1-4)$$

$$\delta x_i=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k \qquad (1-1-5)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \qquad (1-1-6)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}=\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} \qquad (1-1-7)$$

在以上的四式中，（1－1－4）与（1－1－5）式无须证明，（1－1－6）式是由（1－1－4）式两端对$\dot{q}_k$求偏导得到的。（1－1－7）式的证明如下：

因为$\frac{\partial x_i}{\partial q_k}=f(q(t),t)$，所以有

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_l\partial q_k}\partial\dot{q}_l+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k\partial t}$$

而 $$\frac{\partial}{\partial q_k}\dot{x}_i=\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k\partial q_l}\partial\dot{q}_l+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k\partial t}$$

比较以上二式便可得（1－1－7）式。

（1－1－4）～（1－1－7）式所对应的矩阵形式为：

$$\{\dot{x}\}=\left[\frac{\partial x}{\partial q}\right]\{\dot{q}\}+\left\{\frac{\partial x}{\partial t}\right\}, \qquad (1-1-4')$$

$$\{\delta x\}=\left[\frac{\partial x}{\partial q}\right]\{\delta q\} \qquad (1-1-5')$$

$$\left[\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}}\right]=\left[\frac{\partial x}{\partial q}\right] \qquad (1-1-6')$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial x}{\partial q}\right]=\left[\frac{\partial \dot{x}}{\partial q}\right] \qquad (1-1-7')$$

其中$\left[\frac{\partial x}{\partial q}\right]$是系统的坐标变换式（1－1－3）的Jacobi矩阵，

定义为 $\left[\frac{\partial x}{\partial q}\right]=\begin{bmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial q_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial x_{3N}}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial x_{3N}}{\partial q_n}\end{bmatrix}$，

把（1—1—5′）式代入（1—1—2）式可得：

$$\{\delta q\}^T\left[\frac{\partial x}{\partial q}\right]^T(\{X\}-[m]\{\ddot{x}\})=0$$

即为：$\{\delta q\}^T\left(\left[\frac{\partial x}{\partial q}\right]^T\{X\}-\left[\frac{\partial x}{\partial q}\right]^T[m]\{\ddot{x}\}\right)=0$

（1—1—8）

考虑到（1—1—6′）与（1—1—7′）式，（1—1—8）式中括号内的第二项一广义惯性力为：

$$\left[\frac{\partial x}{\partial q}\right]^T[m]\{\ddot{x}\}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\left[\frac{\partial x}{\partial q}\right]^T[m]\{\dot{x}\}\right)-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial x}{\partial q}\right]^T[m]\{\dot{x}\}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\left[\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}}\right]^T[m]\{\dot{x}\}-\left[\frac{\partial \dot{x}}{\partial q}\right]^T[m]\{\dot{x}\}\right.$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\left(\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\right\}\{\dot{x}\}^T\right)[m]\{\dot{x}\}\right)$$

$$-\left(\left\{\frac{\partial}{\partial q}\right\}\{\dot{x}\}^T\right)[m]\{\dot{x}\}$$

$$=\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\right\}\left(\frac{1}{2}\{\dot{x}\}^T[m]\{\dot{x}\}\right)$$

$$-\left\{\frac{\partial}{\partial q}\right\}\left(\frac{1}{2}\{\dot{x}\}^T[m]\{\dot{x}\}\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\right\}T-\left\{\frac{\partial}{\partial q}\right\}T$$

$$=\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right\}-\left\{\frac{\partial T}{\partial q}\right\} \qquad (1-1-9)$$

（1—1—9）式中的 $T=\frac{1}{2}\{\dot{x}\}^T[m]\{\dot{x}\}$ 是系统的动能。

在（1—1—8）式中，括号内的第一项是广义力，即
$\left[\frac{\partial x}{\partial q}\right]^T\{X\}=\{Q\}$，所以（1—1—8）式即为：

$$\{\delta q\}^T\left(\{Q\}-\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right\}+\left\{\frac{\partial T}{\partial q}\right\}\right)=0$$

（1—1—10）

若在（1—1—10）式中$\{\delta q\}$中的虚位移是独立的，则可得：

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right\}-\left\{\frac{\partial T}{\partial q}\right\}=\{Q\} \qquad (1—1—11a)$$

（1—1—11）式即为动力学中有名的第二类Lagrange方程，一般习惯地简称为"*Lagrange*方程"。不过通常把（1—1—11a）式写作：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i,(i=1\sim n)$$

（1—1—11b）

当系统是有势系统时，即当系统的广义力仅为有势力时，这时

$$\{Q\}=-\left\{\frac{\partial V}{\partial q}\right\} \qquad (1—1—12)$$

则相应的系统Lagrange方程可写作：

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right\}-\left\{\frac{\partial L}{\partial q}\right\}=\{0\} \qquad (1—1—13)$$

或
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\ (i=1\sim n)$$

其中$L(q,\dot{q},t)=T-V$是完整有势系统的Lagrange函数；V是系统的势能。

当系统的广义力只有一部分是有势力时，系统的Lagrange方程为：

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right\}-\left\{\frac{\partial L}{\partial q}\right\}=\{Q'\}$$

其中$\{Q'\}$为系统的非有势力部分的广义力矢量。

在笛卡儿坐标下，系统动能的矩阵表达式为：

$$T=\frac{1}{2}\{x'\}^T[m]\{\dot{x}\} \qquad (1-1-14)$$

若把$\left[\frac{\partial x}{\partial q}\right]$简记为$[J]$，并把（1－1－4′）式代入（1－1－14）式可得：

$$T=\frac{1}{2}\left((\{\dot{q}\}^T[J]^T+\left\{\frac{\partial x}{\partial t}\right\}^T)[m]+\left([J]\{\dot{q}\}+\left\{\frac{\partial x}{\partial t}\right\}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\{\dot{q}\}^T[J]^T[m][J]\{\dot{q}\}+\{\dot{q}\}^T[J]^T[m]\left\{\frac{\partial x}{\partial t}\right\}$$

$$+\left\{\frac{\partial x}{\partial t}\right\}^T[m][J]\{\dot{q}\}+\left\{\frac{\partial x}{\partial t}\right\}^T[m]\left\{\frac{\partial t}{\partial t}\right\})^T$$

因为$[m]$为一对称阵，而上式中的每一项均为一数，所以有：

$$\{\dot{q}\}^T[J]^T[m]\left\{\frac{\partial x}{\partial t}\right\}=\left(\{\dot{q}\}^T[J]^T[m]\left\{\frac{\partial x}{\partial t}\right\}\right)^T$$

$$=\left\{\frac{\partial x}{\partial t}\right\}^T[m][J]\{\dot{q}\}$$

所以最后可得系统的动能用广义坐标与广义速度表示的表达式为：

$$T=\frac{1}{2}\{\dot{q}\}^T[J]^T[m][J]\{\dot{q}\}+\left\{\frac{\partial x}{\partial t}\right\}^T[m][J]\{\dot{q}\}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial x}{\partial t}\right\}^T[m]+\left\{\frac{\partial x}{\partial t}\right\}=T_2+T_1+T_0$$

$$(1-1-15)$$

其中，T_2，T_1，T_0分别为广义速度的二次齐次式、一次齐次式与零次齐次式。

显然，当系统为一定常系统，即有$\{x\}=\{x(q)\}$时，系统的动能的（1－1－15）式可简化为：

$$T=\frac{1}{2}\{\dot{q}\}^T[J]^T[m][J]\{\dot{q}\}$$

$$=\frac{1}{2}\{\dot{q}\}^T[M]\{\dot{q}\} \qquad (1-1-16)$$

其中$[M]=[J]^T[m][J]$是系统对应于广义坐标$\{q\}$的质量矩阵。

当坐标变换式（1—1—3）式为线性变换时，〔J〕矩阵为一常数阵，这时〔M〕矩阵也是一个常数阵。在线性振动理论中的“模态坐标变换”就属于这种情况。在一般情况下，〔J〕矩阵是一个$\{q\}$的函数矩阵，则〔M〕阵也是$\{q\}$的函数矩阵——〔M〕中的 元素随广义坐标$\{q\}$而变，这时系统的动力学方程便是一个非线性方程。

当系统的势能U不明显地依赖于时间t时，这时的有势力亦称保守力，主动力只有保守力的系统称为保守系统。

在非保守力中，阻尼力有重要的作用，在理论分析中，特别是在线性振动理论中，常用的一种模型是线性阻尼模型，即假定阻尼力与广义速度$\{\dot{q}\}$成正比。在这种情况下可引入Rayleigh耗散能函数D

$$D=\frac{1}{2}\{\dot{q}\}^T[C]\{\dot{q}\} \qquad (1-1-17)$$

其中〔C〕是系统的阻尼矩阵，假设它是正定实对称阵。而由阻尼所产生的广义力为

$$\{Q\}=-\left\{\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}\right\} \qquad (1-1-18)$$

对于仅受有势力与线性阻尼作用的系统，其Lagrange方程为

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right\}-\left\{\frac{\partial L}{\partial q}\right\}+\left\{\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}\right\}=\{0\}$$

(1—1—19)

或
$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right\}-\left\{\frac{\partial T}{\partial q}\right\}+\left\{\frac{\partial V}{\partial q}\right\}+\left\{\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}\right\}=\{0\}$$

(1—1—20)

若系统上还作用有除有势力与阻尼力以外的广义力$\{Q'\}$，则系统的Lagrange方程为

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right\}-\left\{\frac{\partial T}{\partial q}\right\}+\left\{\frac{\partial V}{\partial q}\right\}+\left\{\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}\right\}=\{Q'\}$$

(1—1—21)

质点系在其稳定平衡位置附近作微幅振动时，其运动方程可由(1—1—21)式导出。设系统是由N个质点组成的并具有n个自由度的完整系统，则按微振动的假设，系统的各个广义坐标q_k与广义速度$\dot{q}_k$均可当作为一阶微量，故在利用（1—1—21）式的Lagrange方程时，其中$\left\{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right\}$、$\left\{\frac{\partial T}{\partial q}\right\}$与$\left\{\frac{\partial V}{\partial q}\right\}$也只须精确到一阶微量，但考虑到$T$、$V$对$\dot{q}$、$q$求导时，$V$中的微量将降低一阶，所以在计算系统的动能$T$与势能$V$时，须精确到二阶微量。

当系统的约束是定常的，即有$\{x\}=\{x(q)\}$时，系统的动能表达式由（1—1—16）式给出。由（1—1—16）式可看出，当〔M〕精确到零阶微量——为常数阵时，T便精确到二阶微量，因此，这时应取

$$[M]=[J]_0^T[m][J]_0 \qquad (1-1-22)$$

$[J]_0$表示$[J]$中的各元素所包含的广义坐标取0值。

在定常约束情况下，系统的势能只是广义坐标的函数，即

$$V=V(q)$$

它在系统平衡位置附近的Taylor展开式可写作

$$V=V(0)+\sum_k\left(\frac{\partial V}{\partial q_k}\right)_0 q_k+$$

$$\frac{1}{2}\sum_r\sum_s\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_s}\right)q_r q_s+\cdots$$

在系统的平衡位置处有

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_k}\right)_0=0 \qquad k=1,2\cdots n$$

且不失一般性。可令在平衡位置处，有$V(0)=0$，则系统的势能V，舍去二阶以上的微量后可写作

$$V=\frac{1}{2}\sum_r\sum_s\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_s}\right)_0 q_r q_s=\frac{1}{2}\{q\}^T[K]\{q\}$$

（1—1—23）

其中$[K]=[K_{rs}]$　$K_{rs}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_s}\right)_0$称为系统的"刚度矩阵"，显然，它也是对称阵。

把（1—1—16），（1—1—17）与（1—1—23）式代入（1—1—21）式便可得系统作微幅振动时的线性动力学方程：

$$[M]\{\ddot{q}\}+[c]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{Q\}$$

（1—1—24）

其中的$\{Q\}$即为（1—1—21）式中的$\{Q'\}$，它是除了线性阻尼力与有势力以外的广义力矢量。（1—1—24）式为线性系统的强迫振动方程，当$\{Q\}=\{0\}$时，表示系统作自由振动，其动力学方程为

$$[M]\{\ddot{q}\}+[c]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{0\}$$

（1—1—25）

而系统的无阻尼自由振动方程为

$$[M]\{\ddot{q}\}+[k]\{q\}=\{0\} \qquad (1-1-26)$$

【例1—1—1】一个弹簧常数为k，质量不计的弹簧OA，其原长为l，0端铰支，A端与一长为$2a$，质量为m的均质直杆铰接。试求系统在铅垂平面内作微幅振动的动力学方程。

【解】设ξ为弹簧的伸长量，则可选择$\{q\}=[\xi \quad \theta \quad \varphi]^T$为系统独立的广义坐标。在（1—1—1）式中的$\{x\}$除作为系统的笛卡儿坐标外，也可作为系统的一般"初坐标"。在本例中可取系统的初坐标为

$$\{x\}=[x_a \quad y_a \quad x_c \quad y_c \quad \varphi]^T$$

而且该系统为一个完整有势系统，若取ox轴平面为重力势能零点，则系统的势能为

$$V=-mgy_c+\frac{1}{2}k\xi^2$$

$$=-mg[(l+\xi)\cos\theta+a\cos\varphi]+\frac{1}{2}k\xi^2$$

对于所选择的系统初坐标，系统的质量矩阵为