

1/6

C15-1.2
Y7661

线性代数全程辅导与自测

俞南雁 编著

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数全程辅导与自测/俞南雁编著. —南京: 南京大学出版社, 2001. 11

ISBN 7-305-03777-X

I. 线… II. 俞… III. 线性代数-高等学校-自学参考资料 IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 091057 号

书 名 线性代数全程辅导与自测
编 著 者 俞南雁
出版发行 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮编 210093
电 话 025-3596923 025-3592317 传真 025-3303347
网 址 <http://press.nju.edu.cn>
电子邮件 [nupressl@ publicl.ptt.js.cn](mailto:nupressl@publicl.ptt.js.cn)
经 销 全国各地新华书店
印 刷 江苏兴化印刷有限责任公司
开 本 850×1168 1/32 印 张 7.875 字 数 195 千
版 次 2002 年 2 月第 1 版 2002 年 2 月第 1 次印刷
印 数 1-5000
ISBN 7-305-03777-X/O·270
定 价 11.00 元

* 版权所有, 侵权必究

* 凡购买南大版图书, 如有印装质量问题, 请与所购
图书销售部门联系调换

前 言

本书是写给普通高校理、工、经、管各专业学生,以及网上大学、高等教育自学考试和各类成人高校学生的学习参考书。

线性代数是各类高校许多专业必修的一门数学课程。由于线性代数的研究对象及处理问题的方法与中学数学及微积分有所不同,初学者不太适应;加之该课程的学时一般较少,大多不能安排习题课进行做题指导和训练;非普通高校学生答疑辅导的条件又不够好,因此,不少同学学起来比较吃力。针对这种情况,本书为同学们提供多角度、全方位的辅导。绪言回答了同学们在学习过程中遇到的一些综合性问题。1~8讲每讲都由**基本要求、内容要览、释疑解惑、典型例题和同步练习**(附参考答案)五个板块组成。前三板块务虚,主要廓清有关基本概念、基本理论和基本方法;后两板块务实,通过典型例题的示范和同步练习,构建知识体系,提高解题能力。

本书释疑解惑中的问题及绪言中的综合性问题,全都来自网上大学学生、成人高校学生、自考考生及普通高校学生,来自答疑、批阅作业和网上大学讨论区管理,因此有很强的针对性。典型例题不仅做了详细解答或一题多解,还通过解前“分析”或解后“评注”剖析解题思路,总结解题经验。特别是每个典型例题都根据其内容

设计了一个“题头”，并于卷首列出“典型例题一览表”，以方便读者研读与查阅.全书3份阶段自测题是配合同学阶段复习用的.

为了帮助同学在总复习期间进行自我检测，本书收录近年来12份全真试卷作为自测试卷(其中10份由作者命题).与所有同步练习及阶段自测题一样，所有试题也都给出了详细解答或答案，供同学校核参考.

限于水平，书中错误和疏漏之处在所难免，恳请同行专家及热心读者批评指正.

编著者
2002年1月

目 录

典型例题一览表(i)

绪 言 和同学们谈谈线性代数的学习(1)

第 1 讲 矩阵及其运算(7)

基本要求(7) 内容要览(7) 释疑解惑(12)

典型例题(14) 同步练习(24) 参考答案(25)

第 2 讲 线性相关性与秩(27)

基本要求(27) 内容要览(27) 释疑解惑(31)

典型例题(34) 同步练习(47) 参考答案(49)

第 3 讲 线性方程组(50)

基本要求(50) 内容要览(50) 释疑解惑(52)

典型例题(57) 同步练习(67) 参考答案(69)

阶段测试题 I (70)

第 4 讲 行列式(75)

基本要求(75) 内容要览(75) 释疑解惑(79)

典型例题(81) 同步练习(91) 参考答案(93)

第 5 讲 可逆矩阵(95)

基本要求(95) 内容要览(95) 释疑解惑(98)

典型例题(100) 同步练习(114) 参考答案(116)
阶段测试题 II (118)

第 6 讲 内积与正交矩阵(122)

基本要求(122) 内容要览(122) 释疑解惑(124)

典型例题(125) 同步练习(133) 参考答案(133)

第 7 讲 矩阵的相似与特征值(135)

基本要求(135) 内容要览(135) 释疑解惑(136)

典型例题(139) 同步练习(151) 参考答案(153)

第 8 讲 实对称矩阵与实二次型(154)

基本要求(154) 内容要览(154) 释疑解惑(157)

典型例题(160) 同步练习(172) 参考答案(174)

阶段测试题 III (175)

线性代数自测试卷(附参考答案)(179)

A 类试卷(I)(179) A 类试卷(II)(183)

A 类试卷(III)(188) A 类试卷(IV)(192)

B 类试卷(I)(197) B 类试卷(II)(202)

B 类试卷(III)(208) B 类试卷(IV)(213)

C 类试卷(I)(218) C 类试卷(II)(222)

D 类试卷(I)(227) D 类试卷(II)(234)

典型例题一览表

第 1 讲 矩阵及其运算

- 1.1 有关矩阵的加法、数乘、转置和相等…………… (14)
- 1.2 矩阵的乘法及交换问题、消去问题…………… (15)
- 1.3 乘法公式不成立的一个例子…………… (15)
- 1.4 与一个 2 阶方阵乘法可交换的一切矩阵…………… (16)
- 1.5 消去律不成立的一个例子…………… (17)
- 1.6 矩阵乘法结合律的一个应用…………… (17)
- * 1.7 A, B 可交换条件下的两个公式…………… (18)
- 1.8 矩阵的多项式…………… (19)
- 1.9 一个特殊上三角阵正整数幂的计算…………… (19)
- 1.10 上三角阵的乘积…………… (21)
- 1.11 同型分块对角阵的乘法…………… (22)
- 1.12 分块矩阵的转置…………… (23)

第 2 讲 线性相关性与秩

- 2.1 关于线性相关和线性无关的定义和充要条件…………… (34)
- 2.2 向量组的等价及矩阵的等价…………… (36)
- 2.3 降秩矩阵的行向量组…………… (37)

2.4	根据定义和用初等变换求秩判断向量组的线性相关性·····	(38)
2.5	用矩阵的初等行变换确定向量间的线性关系·····	(39)
2.6	根据定义或秩的比较定理判断向量组的线性无关性·····	(40)
2.7	用矩阵的初等行变换求向量组的秩、极大无关组和线性表示关系·····	(41)
2.8	含参数矩阵的秩的讨论·····	(42)
2.9	线性相关、线性表示与向量组的秩·····	(43)
* 2.10	用多种方法求矩阵的秩·····	(44)
2.11	两个向量组之并集的秩的估计·····	(45)
* 2.12	关于矩阵乘积的秩的一个不等式·····	(46)

第 3 讲 线性方程组

3.1	非齐次线性方程组有解的充要条件·····	(57)
3.2	齐次线性方程组有非零解的充要条件,基础解系·····	(58)
3.3	非齐次线性方程组解的结构·····	(60)
3.4	齐次线性方程组的解法及解的结构·····	(61)
3.5	非齐次线性方程组的解法及解的结构·····	(63)
* 3.6	向量空间的判定及基和维数的求法·····	(64)
3.7	求子空间的基,实现基的扩充,并求向量的坐标·····	(65)
* 3.8	乘积为零矩阵的两个矩阵秩之和的上界·····	(66)

第 4 讲 行列式

4.1	关于行列式概念·····	(81)
4.2	关于行列式的性质·····	(82)
4.3	用性质将行列式转化为已知其值的行列式·····	(83)
4.4	巧用行列式的性质一例·····	(84)
4.5	巧用行列式的展开定理的推论一例·····	(84)
4.6	化三角形行列式法与逐次降阶法计算数字行列式·····	(85)
4.7	化三角形行列式法计算含参数的 n 阶行列式·····	(87)
4.8	用多种方法计算一个应用上常见的含参数的 n 阶行列式·····	(88)

第5讲 逆矩阵

5.1	根据定义求逆阵	(100)
5.2	根据性质求逆阵	(101)
5.3	逆阵与伴随阵	(102)
5.4	关于可逆阵的定义、运算性质及消去问题	(103)
5.5	关于初等变换与初等阵	(104)
5.6	用初等变换求逆阵	(105)
5.7	简单矩阵方程的两种解法	(106)
5.8	已知 A^{-1} 求 $(A^*)^{-1}$: 先化简再计算一例	(108)
5.9	矩阵方程先化简再求解一例	(109)
5.10	不能用(普通)逆矩阵求解的矩阵方程	(110)
5.11	伴随矩阵的行列式	(112)
* 5.12	伴随矩阵的秩	(112)
5.13	系数矩阵含参数的一个 3×3 线性方程组解的讨论	(113)

第6讲 内积与正交矩阵

6.1	内积、长度、夹角、正交向量组	(125)
6.2	关于正交矩阵	(127)
6.3	由正交矩阵衍生的正交矩阵	(128)
6.4	一类对称的正交矩阵	(129)
6.5	求与给定向量组 G 等价的标准正交的向量组及与 G 正交的所有向量	(130)
6.6	正交变换下度量的不变性	(131)
* 6.7	一个与正交矩阵有关的行列式	(132)

第7讲 矩阵的相似与特征值

7.1	关于特征值与特征向量	(139)
7.2	相似矩阵及与对角阵相似的条件	(140)
7.3	判断矩阵 A, B 是否相似	(142)

7.4	相似对角化问题的计算(一).....	(143)
7.5	相似对角化问题的计算(二)(含参数的情况).....	(145)
7.6	可逆阵及其逆矩阵的特征值.....	(146)
7.7	不同特征值对应的特征向量之和不是特征向量.....	(148)
*7.8	关于特征值的两个命题.....	(148)
*7.9	矩阵相似对角化的一个应用:线性齐次差分方程组的 求解.....	(150)

第8讲 实对称矩阵与实二次型

8.1	关于实二次型和实对称阵的一些重要概念.....	(160)
8.2	关于正定的充要条件.....	(162)
8.3	实对称矩阵的正交相似对角化.....	(163)
8.4	用正交变换化简实二次型.....	(165)
8.5	用可逆线性变换化简实二次型.....	(166)
8.6	正定和负定的判定.....	(167)
8.7	由一切可能特征值全正断定实对称矩阵正定.....	(168)
8.8	把实对称矩阵表示成某个实对称矩阵的三次幂.....	(168)
*8.9	由特征值及部分特征向量反演实对称矩阵.....	(169)
8.10	实对称矩阵的一个特点.....	(170)
8.11	利用定义证明某个“抽象”矩阵是正定矩阵.....	(171)
*8.12	n 元实二次型的分类数目.....	(172)

绪 言

和同学们谈谈线性代数的学习

网上大学学生、自学考试考生、各类成人高校学生以及普通高校学生,经常问起关于线性代数学习的许多问题.以下答问仅供同学参考.

一、怎样从总体上认识线性代数这门课的主要内容?

粗浅地说,线性代数是处理多变量与多变量之间线性关系的数学分支.这种线性关系主要通过矩阵去研究,因此矩阵(包括只有一列或一行的矩阵即向量)是该课程的主要研究对象和主要研究工具.

稍微具体一点说,大学线性代数课程中,矩阵及其运算提供了描述多变量线性关系的基本工具;向量的线性相关性、极大无关组和秩、矩阵的秩、行列式以及向量空间等一系列基本概念及理论构成了线性代数的理论基础;矩阵的等价、相似、合同和正交相似提供了处理线性关系的一系列有效方法;而线性方程组和二次型的表示、求解或化简等则是上述工具、理论和方法的典型应用.以上内容大致形成于 19 世纪中叶以后,构成了线性代数这个数学分支的基础.

希望同学们从总体上,从各部分内容的联系和对比中,系统地掌握该课程的知识体系,并通过解题实践不断提高矩阵运算能力,用矩阵方法处理有关问题的能力,以及运用概念进行推理的能力.

二、学习线性代数与学习微积分有什么不同?

微积分(高等数学)是关于连续量的数学,主要研究对象是函数.对于函数同学们通过中学数学已经有较多的了解.微积分课程中要做的主要事情,简单地说是通过极限方法引入导数(或微分)和积分,着重研究它们并用来处理有关问题.

线性代数是关于离散量的数学,主要研究对象是向量和矩阵.这是全新的概念,关于数的运算规则很多不再适用,稍不注意就可能犯错.其次概念比较密集,运用概念进行逻辑推理较多,需要我们多用脑思索.如果不注意基本概念和基本理论,做题会很吃力,一做就错,甚至无从下手.另外,有些计算步骤较长,需要细心加耐心.

线性代数总学时不多,每堂课都要及时消化,及时作业,有问题要及时解决.这样就能学出轻松,学出自信.

三、学习线性代数有什么用?

线性代数是一门重要的基础理论课程.线性代数的理论与方法,已渗透到自然科学、工程科学和经济科学等众多领域,并产生出许多崭新的理论和方法.现代控制理论的出现就是一例.俄裔美国学者 *Wassily Leontief* 由于成功地将线性代数应用于经济系统的研究而获得 1973 年度诺贝尔经济奖也是一例.

线性代数已经成为许多专业基础课和专业课的必要的基础.事实上,向量和矩阵是描写多变量之间线性关系的基本工具,例如

线性差分方程组及线性微分方程组,都可以用向量、矩阵去描述;矩阵的相抵、相似、相合和正交相似,则是处理线性关系的重要手段.而科学、工程和经济中的大量问题,最终都归结为线性方程组;最优化问题、控制论和解析几何的一些问题还与二次型有关.只是限于课程性质、学时数及同学的专业知识背景,一般线性代数教材中不大可能举出太多的应用实例.

另外我还想提醒同学们的是,学习数学课程不能有太多的功利色彩,不要老想着“立竿见影”.数学是关于模式和秩序的科学,我们学习它,更重要的是学会运用数学思维、数学方法,提升我们的数学素质和创新能力.

总之,我们学习线性代数的重要性在于:

1. 学习分析处理多变量线性关系的理论和方法,为学习后续课程和日后工作打下基础.
2. 通过学习提高抽象思维和逻辑推理能力,提高科学素养.

四、怎样学习线性代数中抽象概念?

第一,每个定义要逐字逐句仔细阅读2~3遍,找出要点,并结合课本及本书的具体例子,仔细琢磨,反复体会.通过概念的外延理解概念的内涵,通过感性认识达到理性认识.

第二,着重弄清定义中一些关键词语的作用.例如:线性相关定义中的“不全为零”,特征向量定义中的“非零向量”,正交向量组定义中要求“不含零向量”,正交矩阵定义的前提“实方阵”,正定矩阵定义的前提“实对称”,等等.

第三,借助几何直观帮助想像和理解.例如线性代数中向量、向量空间、基、维数、坐标、内积、标准正交基、正交变换等许多概念皆源自解析几何,由此可得有关概念的几何解释,有助于同学们在自己的头脑中构建知识体系.

第四,在阅读例题和做习题中有意识地不断巩固、加深对基本概念的理解。

五、对定理、性质或公式及其证明的要求是什么?

对每个定理、性质或公式应正确理解它的条件和结论,并通过例题、习题来掌握它们的用法.特别要分清楚充要条件、必要条件和充分条件,以免盲目使用发生错误。

有些过渡性的结果可以不记忆;有些结论抓住根本性的东西就很容易记住,例如向量组线性相关或线性无关的几个简单判别准则的关键是抓住线性相关的定义;还有很多结论要在联系和对比中记忆效果更好,例如 n 阶方阵可逆的各种充要条件、实对称矩阵正定的各种充要条件等等。

限于课程的性质(公共课)及学时数,对定理证明的要求是:简短的看懂;一般的了解证明思路;较长较难的证明不作要求。

六、如何提高解题能力? 平时看了很多例题,觉得都看懂了,为什么自己做题做不出来?

解题能力首先是来自对知识的理解、掌握,如果基本概念不清,重要定理(包括性质、公式)不明,凭什么来解题呢?凭想当然来解题,错误是必然的.因此同学们要弄清每个定义的确切含义,掌握每个定理(包括性质、公式)的条件、结论,并且融汇贯通.研读典型例题,则可以加深对知识的理解和把握,拓宽解题的思路和技巧。

所谓看例题看懂了,其实可能是很表面的,因此难免“眼高手低”:看来听来总归浅,真要会做需多练!做题是不能用看题来代替的.即使对于例题,也不能光是看,也要动脑想,动手做,才能加

深印象.我提倡做例题.做例题的好处是做不下去时可以看,找到“卡壳”的所在,搞明白了再做,这样就提高了一步.在把例题看懂做对的基础上,还要做一定数量的练习题和自测题.解题过程中不能想当然,要始终不离基本概念、基本理论和基本方法,不断总结经验教训,这样解题能力才能不断提高,考试时才能得心应手.

七、怎样避免或减少练习和考试中的错误?

四点建议:

1. 认真审题,弄清已知、未知及解题要求,避免起始错误.
2. 计算推理,不离原则(定义、定理、公式、性质),避免想当然的错误.
3. 弄清特殊和一般,条件和结论,充分条件、必要条件及充要条件的区别,避免逻辑错误.
4. 注意检查验算,避免不应有的错误.

举例说,在许多线性代数试卷中,常考“用正交变换化简实二次型”的题,但每次都有不少同学用“配方法”.部分原因是没有看清题目要求,根子可能还在于概念不清:不知道正交变换与普通可逆线性变换的区别,不知道正交矩阵的判别(充要条件),不知道“配方法”一般得不到正交变换.

再如,求 3×4 齐次线性方程组的基础解系,系数矩阵的秩为 3,有的考生答案竟含 2 个或 3 个向量,既反映了基本方法、基本概念不清,也反映了根本没有检查验算.其实,线性代数中的大部分计算题如解线性方程组、求逆矩阵或解矩阵方程、求特征值特征向量、二次型化简等等都容易验算.检查验算应该贯穿于解题过程之中,发现问题,及时修正.例如,当求出矩阵 A 的特征值之后,验算 $\sum \lambda_i = \text{tr} A$,可避免错上加错.

对于某些“客观性试题”,除了上述四点之外,还有一些逻辑方

法或曰考试技巧.例如,对于单项选择题,除了正确求解(证)的直接法之外,还可以用以下间接法:

(1) 蕴含关系排除法——若选项 P 蕴含了选项 Q($P \Rightarrow Q$),则不选 P(因为若 P 对则 Q 也对).

(2) 对等关系排除法——若选项 P 与选项 Q 互相蕴含($P \Leftrightarrow Q$),则不选 P, Q.

(3) 反例排除法——找到选项 P 的反例则不选 P.

(4) 归谬排除法——若由选项 P 出发能导出错误结论,则不选 P.

第 1 讲

矩阵及其运算

基本要求

1. 理解矩阵及相等的概念.
2. 掌握矩阵的加法、数乘、转置、乘法和方阵的幂、方阵的多项式的定义及运算性质.
3. 了解零矩阵、单位矩阵、数量矩阵、对角阵的定义及性质.
4. 了解矩阵的分块运算,掌握分块对角阵的运算.

内容要览

1.1 矩阵

(1) 矩阵是数字构成的矩形表格. mn 个数排成 m 行 n 列(并用方括号括起来),称为一个 $m \times n$ 矩阵. $m = n$ 时,称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵.

矩阵常记为 $[a_{ij}]$, $[a_{ij}]_{m \times n}$ 或 A , $A_{m \times n}$ 等.