数　　学

代数学（环论）

环论是代数学中的一门内容非常丰富的分支学科。近几十年来，由于不断地提出了许多新的问题，出现了许多新的学派，研究出许多新的方法，致使环论在环的结构、环的分类、环的模表示和环的同调性质（基于模范畴）等理论方面，以及环与代数几何、代数拓扑、代数数论和函数论等学科相联系的应用方面，都取得了很大的进展。我国在环论方面的研究虽然目前与世界上的先进水平尚有不小的差距，但近几年来也作出了不少成果，取得了一定的进展，例如，1982年在南京大学召开的全国第一届代数学学术交流会议上，就报告了数十篇有一定质量的论文。现将部分结果简述如下。

环的结构这样一个概念的含义是非常广泛的，其中由 E. Nöther、Wedderburn-Artin 和 Jacobson 等环论学家所发展起来的根理论和半单纯性理论是极其重要的方面。许永华在这个理论的研究中，定义了拟 Jacobson 根和拟本原环的概念，得出了与 Jacobson 的环结构理论相平行的理论，其中也包括著名的稠密性定理。许永华还引进了一种特殊的拟本原环——M-Artin 环，并研究了它的结构。这种环可以认为是通常 Artin 环的扩展。

在 Jacobson的结构理论中，任何环都同态于一些本原环的次直和，因此，在各种类型的环中，本原环就处于一种很特殊的地位。许永华较深入地研究了这种环的结构理论，引进了 ν 基座的概念，建立了 ν 结构定理，从而推广了本原环的著名的结构定理。他用双侧模的方法来代替通常的有限拓扑方法，引进了规范本原环的概念，把著名的 Wedderburn-Artin 定理（有限秩）扩展到单纯规范本原环（无限秩）中，同时也给出了所有规范本原环的结构。许永华和他的学生们也对本原环及拟本原环证明了正交化定理。设 R 是具有非零基座的本原环，$L=\sum_{i=1,2,\cdots}\oplus L_i$ 是 R 的可数多个极小右理想的直和，那么，在 R 中必有可数多个正交幂等元 e_i, $i=1,2,\cdots$，使 $L=\Sigma\oplus e_iR$，其中 e_iR 是 R 的极小右理想。利用这样的定理，可以得出可数无穷维向量空间的连续线性映射变换完全环的结构。

潘世忠讨论了与本原环密切相关的稠密线性变换代数的性质，并研究了有核质环的子

环。

结合环与非结合环的交换性是环结构理论中的另一个重要的课题。谢邦杰和他的学生们在这个方面作了很多工作。例如，谢邦杰与郭元春合作提出了材料丰富的“Wedderburn定理及其推广与交换性问题”的综述，并证明了周期环是域的两个充要条件。牛凤文和郭元春分别对一些有关交换性的重要定理作出了新的证明。郭元春和董乃昌也分别给出了环可换的若干条件，诸如，对于半质环中任意两个元x与y，都有有界正整数$m=m(x, y)$、$n=n(x, y)$，使$(xy)^m=(yx)^n$；有单位元的非结合环满足P倍元性质，等等。

刘绍学与蔡英熙对于局部有限代数的结构进行了研究。如果一个代数A中任意有限生成的理想都是有限维子代数，则A叫做局部理想有限代数；如果A的每一个有限子集所生成的子代数都是有限维的，则A叫做局部有限代数。刘蔡二位把交错代数、约当代数和李代数在有限维情况下的Wedderburn-Мальцев型的定理推广到某一类局部有限的情况，后者是界于上述两类局部有限之间的一类代数。

一个代数A的子代数当然未必是A的理想。刘绍学考虑并刻划了每一个子代数都是理想的交错代数和约当代数。他的结果被Outcalt推广到幂结合代数的情况，刘绍学也刻划了每一个非零子代数都包含有非零理想的一般代数。

自从本世纪二十年代提出环的极大条件和极小条件以来，环论学家们就对这两种条件之间的关系深感兴趣，并研究出一系列的结果。例如，1939年Hopking证明了，如果有单位元的结合环对左理想满足极小条件，它也必满足左理想的极大条件；1960年有Fuchs定理，其后又有Akizuki和Cohen等数学家的工作。1975年和1977年许永华也研究了这个问题，他给出了另一种充要条件：设R是结合环，N是诣零根，则R对左理想满足极小条件等价于(1)R对左理想满足极大条件；(2)N是R中有限个极大左理想之交的充要条件是有正整k_i，使$k_iN^i\subseteq RN^i$，这里$k_iN^i=\{k_ia|a\in N^i\}$，$i=1,2,\cdots,m$, $N^m=0$。1976年，日本著名代数学家H. Tominaga发表了题为《关于许永华的一个定理》的论文，人们把许与Tominaga的结果结合起来，称为许-Tominaga定理。这定理还可以推广到非结合环中去。

许永华也对Köthe猜想和Goldie环进行了研究。他首先引进了R左模同态链归纳条件的概念和Köthe子集的概念，由此证明了，Köthe猜想对环R成立的充要条件是R的每一个Köthe子集都满足R左模同态链归纳条件。在此基础上，他也找到了一个环的诣零单侧理想是幂零的充要条件，并推广了环论中的Levitzki定理。

对于Goldie环，许永华得到了下列主要结果：(1)设R是半素环，则R是右Goldie环的充要条件是R满足条件(i)R有有限Goldie维数，(ii)R满足特殊左零化子的极大条件；(2)设R是半素环，满足右R模同态链归纳条件，且满足余闭右理想的有限维数条件，则R是Goldie环。

刘绍学对于约当环(特征$\neq 2$时)、交错环以及具Engel条件(对任意两个元素x与y，有自然数$n=n(x, y)$，使$xy^n=0$)的李环，证明了下列定理：设R是上述任何一种环，若有理想A，使A与R/A均局部幂零，则R本身也必局部幂零。由此即得，若R是上述三种非结合环中的任何一种，则R中存在一个最大的局部幂零理想N(称为R的Levitzki根)，它包含R的任何局部幂零理想，且R/N为Levitzki半单的(其Levitzki根为0)。

刘绍学也研究了结合环可表成Artin环直和的充要条件，以及理想稠密分布的诣零代数和广义哈密顿代数等。

除环是一种人们比较熟习的环，但对它的研究却还远没有结束，例如，除环上的伽罗瓦理论就是一个令代数学者们感兴趣的问题。许永华对此也作了研究，并建立了线性稠密环之间的一个有限结构定理，由此可导出除环上的有限伽罗瓦理论。

设 R 是一个除环，M 是一个 n 维自由 R 模，则自同态环 Hom_R（M, M）中的任一元素都可表成 R 上的一个 n 行矩阵。谢邦杰对这样的矩阵进行了深入细致的工作。特别，他对于四元数体上的矩阵建立了标准型的理论。他对四元数体的行列式也得出了一些重要的性质。董乃昌也讨论了环上线性方程组的求解方法。

环的张量积是多重线性代数的一个重要的组成部分。许永华研究了两个本原环的张量积，推广了 Azumaya-Nakayama 定理，并由此得到说明除环的张量积与单纯本原环张量积结构关系的一些基本定理。周伯壎得到了关于域 K 上两个有限维单代数的张量积为半单纯代数的充要定理，佟文廷也考虑了把 Clifford 代数的概念推广到一般交换环上的可能性。

环的同调性质是由相应的模范畴得出的，设 R 和 S 都是 K 环，三者都有单位元，A 为左 R 模，M 为左 S 模，则 $A\otimes_k M$ 为一个左 R_kS 模。它也可以用所谓 $R\otimes S$ 映射和它的泛性质来得到。周伯壎除证明了投射 R 模⊗投射 S 模为投射 $R\otimes S$ 模以外，也证明了，若 R 和 S 都是域 K 上的有限维代数，A 和 M 相应地为内射 R 和内射 S 模，则 $A\otimes M$ 为内射 $R\otimes S$ 模，这是日本数学家 Yoneda 所提问题的引伸。

张量积 $R\otimes S$ 的整体维数的问题早在五十年代就由 Eilenberg 等著名同调代数学家们提出。周伯壎对于 R 和 S 都是域 K 上的代数的情况找到了 $\mathrm{Pd}A\otimes M=\mathrm{Pd}A+\mathrm{Pd}M$ 的两个充要条件，从而得到 $\mathrm{ld}R\otimes S\geqslant \mathrm{ld}R+\mathrm{ld}S$ 的充分条件。周伯壎还应用三复形和过滤的理论来求出有关 $A\otimes M$ 的 Ext 与 Tor 的一些性质。周伯壎的研究生刘迎胜和胡述安都对左模的张量积进行了研究，得到了一些结果。

对于一个加法交换群，许永华定义了一种特殊的乘法，从而得到一种代数系统，称为两非环，并对之进行了大量的研究，也得到了一些与通常结合和非结合环相类似的结果。

（周伯壎）

单复变函数论（单叶函数论）

（1）设 $f(z)$ 是 $|z|<1$ 内凸象函数，$f(0)=0$, $f'(0)=1$，且 $f(z)\neq w$，令

$$F(z)=wf(z)/(w-f(z))=z+C_2z^2+C_3z^3+\cdots,$$

Clunie 和 Shell-Small 曾猜测：存在与 f 和 w 无关的常数 A，使得对任一项系数成立着 $|C_n|\leqslant A$。R. R. Hall[1] 证实了这个猜想，但没有给出常数 A 的最佳估计。

H.Silverman[2] 证明：若 $f(z)$ 是 $|z|<1$ 内有界的正 α 阶的星象函数，则上述 Clunie 和 Shell-Small 型猜想也成立。

（2）设 Σ 表示在 $1<|z|<\infty$ 上单叶解析且 $z=\infty$ 为简单极点的函数 $g(z)=z+b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots$ 所组成的函数族。人们猜测：$|b_n|\leqslant 2/(n+1)$，$n=1, 2,\cdots$，当 $g(z)=(1+z^{n+1})^{2/(n+1)}/z=z+2z^{-n}/(n+1)+\cdots$ 时等号成立。虽然这猜想对 $n=1$, 2 和某些 Σ 的子族是真实的，但已知这猜想对 $n=4$ 和大于 3 的一切奇数是不对的。当 $n>4$ 时，Anna Tsao[3] 否定了这一猜想。

（3）设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内正则且不取 0 和 1 为值，在 $z=0$ 的邻域内有 $f(z)=a_0+a_1z+$

$a_2z^2+\cdots$。1947年，W. K. Hayman 证明：$|a_1|\leqslant 2|a_0|(|\log|a_0||+K)$，$K=5\pi$；1955 年，J. A. Jenkins 将 K 改进成 7.77；1956 年他又将 K 改进成 5.94；1960 年，W. Lai 将K改进成 4.76。另一方面，W. K. Hayman 指出$K\geqslant K^*=(1/4\pi^2)\Gamma(1/4)^4=4.37\cdots$。1978 年，赖万才[4]证明 $K=K^*$，这结果是最好的。

（4）设 $S_R(M)(M>1)$ 由单位圆内单叶解析的实系数函数$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$所组成，且$|f(z)|\leqslant M$。Z. J. Jakobowiski 等[5] 证明：对任一给定的偶自然数N，存在常数M_N，$M_N>1$，使得对一切$f(z)\in S_R(M)$，$M>M_N$，系数 a_N 的精确上界为 $P_N(M)$，它是由方程 $w(1-w/M)^{-2}=z(1-z)^{-2}$ 所定义的 Pick 函数 $w=p(z, M)$（$p(0, M)=0$）的第 N 项系数。

（5）设 S 由$|z|<1$ 内单叶解析的函数$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$所组成，$F(w)$是$S$中函数$f(z)$的逆函数，$K(w)$是 Koebe 函数 $k(z)=z(1+z)^{-2}$的逆函数。A. Baernstein 和G. Schober[6]证明：$wF'(w)/F(w)$的第 n 项系数M_n 被$wK'(w)/K(w)$的对应项系数 $C_n=(2n)!/(n!)^2$ 所控制，即$|M_n|\leqslant C_n$（$n=1, 2, \cdots$）。

R. Klouth 和 K. J. Wirth[7]证明：$\log F'(w)$和许瓦尔兹导数 $\{F,w\}=(F''/F')'-1/2\cdot(F''/F')^2$的第 n 项系数 B_n 和 D_n 分别被 $\log K'(w)$和$\{K, w\}$的对应项系数 b_n和d_n 所控制，即$|B_n|\leqslant b_n$，$|D_n|\leqslant d_n(n=1, 2, \cdots)$。

（6）设 $S(p)$表示$|z|<1$ 内的单叶亚纯函数族，$z=p$（$0<p<1$）是简单极点，$F(w)$ 是 $S(p)$中函数的逆函数，$K_p(w)$ 是 $k_p(z)=\dfrac{z}{(1-pz)(1-z/p)}$的逆函数。A.Baernstein 和G. Schober[6]证明：$F(w)$关于 $w=0$ 和 $w=\infty$点展式的第 n 项系数 A_n 和B_n分别被 $K_p(w)$关于 $w=0$ 和 $w=\infty$ 点展式的对应项系数 $K_n(p)$和 $L_n(p)$所控制，即$|A_n|\leqslant K_n(p)$，$|B_n|\leqslant L_n(p)$（$n=1, 2, \cdots$）。

（7）设$f(z)\in S$，$M_p(r, f)=\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p}$，$p>0$，$0<r<1$。1974年，A. Baernstein[8]证明：$M_p(r, f)\leqslant M_p(r, k)$，$k(z)=z/(1-z)^2$，且等号成立仅限于 Koebe 函数 $k(z)$及其旋转，同时，他指出对$f\in S$，$M_p(r, f')\leqslant M_p(r, k')$是不成立的。

1975 年，A.Goodman[9]证明：对β阶近于凸函数族$C(\beta)$中的$f(z)$，$\beta\geqslant 1$，则对$p\geqslant 1/\beta$成立着 $M_p(r, f')\leqslant M_p(r,k_\beta')$，其中 $k_\beta(z)=\displaystyle\int_0^z(1+\zeta)^\beta(1-\zeta)^{-(\beta+2)}d\zeta$，且等号仅限于 $k_\beta(z)$及其旋转。近来，J. E. Brown[10]进一步证明：若$f\in C(\beta)$，$0\leqslant\beta<\infty$，$\Phi(w)$是实轴上一个非减的凸函数，则对 $r\in(0, 1)$成立着

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\pm\log|f'(re^{i\theta})|)\,d\theta\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\pm\log|k'_\beta(re^{i\theta})|)d\theta,$$

等号成立仅限于 $k_\beta(z)$及其旋转；特别地，对 $0<\beta<\infty$，有 $M_p(r, f')\leqslant M_p(r,k'_\beta)$。

（8）设 $\mu(\lambda)$表示单位圆 $\Delta=\{z||z|<1\}$ 上的具有单调裂纹映照的函数族，即若$f\in\mu(\lambda)$，则$f(z)$在Δ 内单叶解析，$f(0)=0,f'(0)=1$，且$C-f(\Delta)$是一约当曲线，其参数表示为 $W(t)$，$t_0\leqslant t\leqslant\infty$，使得 $w(\infty)=\infty$，当 $t_0<t_1<t_2<\infty$ 时 $0<|w(t_1)|<|w(t_2)|<\infty$，并且对每个 $t\in(t_0, \infty)$，

$$\varlimsup_{t\to t_1^+}\left|\arg\frac{w(t)-w(t_1)}{w(t_1)}\right|\leqslant\lambda,\qquad\varlimsup_{t\to t_1}\left|\arg\frac{w(t_1)-w(t)}{w(t_1)}\right|\leqslant\lambda。$$

A. Baernstein 和 J. E. Brown[11]证明：对$f(z)\in\mu(\lambda)$，$\lambda\in(0,\pi/2)$和$(-\infty,\ \infty)$上的单调非减凸函数$\Phi(w)$，则存在常数$C(\lambda)$，使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Phi\left(\pm\ \log\left|\frac{rf'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right|\right)d\theta\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\Phi\left(\pm\ \log\left|\ C(\lambda)\frac{rk'(re^{i\theta})}{k(re^{i\theta})}\right|\right)d\theta,$$

其中$k(z)$是 Koebe 函数。特别地，对$p\in(0,\ \infty)$有

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f'(re^{i\theta})|^{p}d\theta\leqslant C(\lambda)^{p}\int_{-\pi}^{\pi}|k'(re^{i\theta})|d\theta,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|r\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right|^{p}d\theta\leqslant C(\lambda)^{p}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{rk'(re^{i\theta})}{k(re^{i\theta})}\right|^{p}d\theta。$$

(9)设$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\in S$, 1972 年,C. H. Fitz Gerald 证明：$|a_n|<1.081n$。1980 年，D. Horowitz 把它改进成：$|a_n|<(1\,659\,164\,137/681\,080\,400)^{1/14}\ n<1.0657n$。近来，李江帆和朱惠霖[12]利用 FitzGerald-Horowitz 方法证明：

$$|a_n|\leqslant\left(\frac{1,774,766,210,865,123,855,113,043,283,091,267}{274,094,621,805,930,760,590,852,096,000,000}\right)^{1/30}n<1.0643n。$$

(10)关于第二项、第三项系数限制下的 Bieberbach 猜想。设$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\in S$,G. Ehrig[13]证明：若$f\in S$，且$|a_2|<1.15$，则$|a_n|<n$；若$|a_3|<1.032$，则$|a_n|<n$ $(n\geqslant9)$；若$|a_3|<2.434$，则存在与f无关的绝对整数N，当$n\geqslant N$时，$|a_n|<n$。随后，D. H. Bishouty[14]证明：若$|a_2|<1.55$，则$|a_n|<n$；龚昇[15]将它改进成$|a_2|<1.64$，则$|a_n|<n$。同年，任福尧[16]证明：若$|a_3|<1.71$，则$|a_n|<n(n\geqslant7)$；若$|a_3|<2.449$，则存在绝对整数N，当$n\geqslant N$时$|a_n|<n$。新近，胡克等[17]证明：若$|a_2|<1.68$或$|a_3|<2.4$，则$|a_n|<n(n\geqslant7)$；若$|a_3|<2.553$，则存在绝对整数N，当$n\geqslant N$时，$|a_3|<n$。

(11)关于 Springer 猜想。设$g(z)=z+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots\in\Sigma'$，$z=G(w)=g^{-1}(w)=w+B_1w^{-1}+B_2w^{-2}+\cdots$，G.Spring[18] 证明$|B_3|\leqslant1$，并猜想：

$$|B_{2k-1}|\leqslant(2k-2)!/k!(k-1)!\ \ (k=2,\ 3,\ \cdots)。$$

极值函数仅限于$g(z)=z+\eta z^{-1}$的逆函数，$|\eta|=1$。Y. Kubota[19]证明$k=3$, 4 和 5 时上述猜想成立。接着，G. Schober[20]和任福尧[21]证明$k=6,7$时猜想成立。1979 年,任福尧[22]证明$k=8$时猜想成立。近来，姚璧芸[23]、黄新民[24]、肖政初[25]、王冠闽、程宝龙、杨双善先后分别证明$k=9$, 10 和11, 12, 13, 14, 15 和16 时，Springer 猜想是真实的。

(12)关于从属函数的系数估计。设$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$和$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^n$在$|z|<1$内解析，且$f(z)$在$|z|<1$内从属于$F(z)$ $(a_0=A_0)$。W. Rogosinski[26] 证明：

$$|a_n|\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{|A_k|\}\quad(n=1,\ 2),|a_n|<\sqrt{n}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{|A_k|\}\quad(n\geqslant3),$$

前者是精确的，后者并不精确。夏道行[27]获得精确的不等式：$|a_3|\leqslant\sqrt{2}\max\limits_{1\leqslant k<\infty}\{|A_k|\}$。近来，陈纪修[28]证明：$|a_4|\leqslant\frac{5}{3}\max\limits_{1\leqslant k\leqslant4}\{|A_k|\}$，极值函数仅限于$f(z)=F(\omega(z))$，$\omega(z)=e^{i\theta}z(z-c)/(1-\bar{c}z),|c|=\sqrt{2/3}$。

(13)设$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$是$|z|<1$内的有界非零解析函数，令$A_n=\sup\limits_{f}|a_n(f)|$，这上确界是对一切有界非零解析函数的。1931 年就有人证明$A_1=2/e$。1968 年，J. Krzyz[29]证明$A_2=2/e$，并猜想$A_n=2/e$, $n=3$, $4,\cdots$。随后，J. A. Hummel[30] 证实$A_3=2/e$。近来，谭德邻[31]证明$A_4=2/e$。

(14)设$f(z)=\int_0^z p(\zeta)d\zeta$，$p(z)$在$|z|<1$内解析且$p(0)=1$，$\mathrm{Re}\,p(z)>0$，$\check{f}(w)=f^{-1}(w)=w+\gamma_2w^2+\gamma_3w^3+\cdots$，R. J. Liebra和E. J. Zlotkiewicz[32]证明：$|\gamma_2|\leqslant 1$，$|\gamma_3|\leqslant 4/3$，$|\gamma_4|\leqslant 13/6$，$|\gamma_5|\leqslant 59/15$，$|\gamma_6|\leqslant 344/45$，其等号为$f_0(z)=-z-2\log(1-z)$的逆函数$\check{f}_0(w)=w+B_2w^2+B_3w^3+\cdots$所达到。新近，邓远北[33]证明：对一切$n\geqslant 7$，$|\gamma_n|\leqslant|B_n|$。

(任福尧)

[1] Hall R.R., *Bull. London Math. Soc.*, **12** (1980) 25

[2] Silverman H., *Rocky Mountain J. Math.*, **13**, 4 (1983) 627

[3] Anna Tsao, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **274**, 2 (1982) 783

[4] 赖万才，《中国科学》，5 (1978) 495

[5] Jakobowiski Z. J. *et al.*, *Ann. Polonici Math.*, **XL** (1983) 193

[6] Baernstein A., Schober G., *Israel J. Math.*, **36**, 1 (1980) 75

[7] Klouth R., Wirth K. J., *Proc. Amer. Math. Soc.*, **80**, 4 (1980) 594

[8] Baernstein A., *Acta Math.*, **133** (1974) 139

[9] Goodman A., *Ann. Univ. Sci. Budapest Eotvos Sect. Math.*, **15** (1975) 17

[10] Brown J. E., *Math. Z.*, **178**, 3 (1981) 353

[11] Baernstein A., Brown J. E., *Comment. Math. Helvetici*, **57** (1982) 331

[12] 李江帆，朱惠霖，《自然杂志》，**6**，10 (1983) 793

[13] Ehrig G., *Math. Z.*, **140** (1974) 111

[14] Bishouty D. H., *Math. Z.*, **149** (1976) 183

[15] 龚昇，《中国科学》数学专辑(Ⅰ)，(1979) 202

[16] 任福尧，《中国科学》数学专辑(Ⅰ)，(1979) 275

[17] 胡克等，《科学通报》，**28**，3 (1983) 189

[18] Springer G., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70** (1951) 421

[19] Kubota Y., *Kodai Math. Sem. Rep.*, **28** (1977) 253

[20] Schober G., *Proc. Amer. Math. Soc.*, **67** (1977) 111

[21] 任福尧，《复旦学报》(自然科学版)，4 (1978) 93

[22] 任福尧，*KEXUE TONGBAO*, **25**, 4 (1980) 277

[23] 姚璧芸，《数学年刊》，**3**，1 (1982) 85

[24] 黄新民，《数学年刊》，**A4**，6 (1983) 713

[25] 肖政初，《中南矿冶学院学报》，3 (1983) 100

[26] Rogosinski W., *Proc. Lond. Math. Soc.*, **48**, 2 (1943) 48

[27] 夏道行，陈开明，《数学学报》，**8**，3 (1958) 408

[28] 陈纪修，《科学通报》，**27**，4 (1982) 193

[29] Krzyz J., *Ann. Pollon. Math.*, **20** (1968) 314

[30] Hummel J. A., *J. Analyse Math.*, **31** (1977) 169

[31] 谭德邻，《数学年刊》，**A4**，1 (1983) 97

[32] Libera R.J., Zlotkiewicz E.J., *Proc. Amer. Math. Soc.* **87**, 2 (1983) 251

[33] 邓远北，《自然杂志》，**7**，3 (1984) 234

调 和 分 析

本文对近几年来国内调和分析的进展情况作个概述。这里调和分析是指古典调和分析(即一维或高维傅里叶级数或积分理论，也称傅里叶分析)，不指任何抽象情形。但对傅里叶分析的范围的理解则比较广泛，即它除了包含围绕傅里叶级数或积分本身的理论（如收敛、求和、局部化原理、唯一性集合等）以外，还包含五十年代以后，特别是七十年代蓬勃发展起来的许多与微分方程等密切相关的新分支（如奇异积分、拟微分算子、多线性算子、加权理论、新的函数空间等)。这些新领域的产生与发展强烈依赖于傅里叶变换这个工具，同时反过来又丰富了傅里叶分析的内容，刺激着傅里叶分析的发展。因此把它们归属于傅里叶分析这一大类是再恰当不过的。在陈建功、程民德先后带领下，国内调和分析这支队伍在前述第一个方面打下了较好的基础，多年来陆续有一些较好的工作出现。在前述第二个方面陈、程两先生至少在六十年代初期就组织了力量，作了试图赶上当时世界潮流的努力。十年动乱期间，这种努力被中断了。虽然如此，当初的这些准备仍然为现在培养新生力量的工作奠定了一定的基础。现仅就最近几年(基本上是八十年代)国内学者在傅

里叶分析的几个方面的贡献分类简述如次。

1. 关于若干新的函数空间

H_p 空间本是一个老概念，但在 R^n 上获得它们的重要性质只是近十多年来的事。BMO 空间也有类似的情况。虽然它在二十多年前就被发现，但其重要性只是在近十多年中才显露出来。现在它们已是实函数论中可与勒贝格空间 L^p 相提并论的空间了。其中 H_1 与 BMO 最引人注目，它们在许多问题中实际上是 L^1 与 L^∞ 的合适代替。近十多年来，它们实际上处于当代调和分析的中心位置，与调和分析的许多其他近代内容发生联系。国内调和分析学者在 H_p-BMO 理论的下述有关课题中作出过贡献。

（1）卡尔森测度与卡尔森不等式　　卡尔森测度是 H_p-BMO 理论中的一个重要概念。$R_+^{n+1}=R^n\times R_+$ 上一个非负波莱尔测度 μ 称为一个 α-卡尔森测度，记为 $\mu\in CM_\alpha$，如果

$$\mu(\hat{I})\leqslant C|I|^\alpha,\ \forall \text{方体 } I\subset R^n, \tag{1}$$

其中 $\alpha\geqslant 1$，$\hat{I}$ 是以 I 为底的帐篷(tent)①。上述不等式中最小常系数记为 $|||\mu|||_\alpha$，称为 μ 的卡尔森范数。

L.卡尔森的一个涉及到 H_p 的著名不等式(如只看 $n=1$)是：$\mu\in CM_{q/p}$，$0<p\leqslant q$，当且仅当

$$\left(\int_{R_+^2}|F(x,\ t)|^q\,d\mu\right)^{1/q}\leqslant C\|F\|_{H^p},\ \forall F\in H_p, \tag{2}$$

这里 $F\in H_p$ 意味着 $F(x,t)$ 是 R_+^2 上的解析函数，满足

$$\|F\|_{H^p}=\sup_{t>0}\left(\int_R|F(x,t)|^p dx\right)^{1/p}<\infty。$$

H_p 可以等价地用角形极大函数来定义，即设 $F(y,t)$ 在 R_+^2 解析，若令

$$F^*(x)=\sup\{|F(y,t)|:(y,t)\in\Gamma(x)\},\Gamma(x)=\{(y,t):|x-y|<t\},$$

则有 $\|F\|_{H^p}\sim\|F^*\|_p$。记住这个等价，考虑式(2)中 $p=q=1$ 情形的推广，邓东皋[3]得到了如下结果。先引进两个记号。设 $F(x,t)$ 只是 R_+^2 上波莱尔可测函数，令

$$A_r(F)(x)=\left(\int_{\Gamma(x)}|F(y,\ t)|^r t^{-2}dydt\right)^{\frac{1}{r}},\ 1\leqslant r\leqslant\infty.$$

又设 $\nu(x,t)$ 是 R_+^2 上非负波莱尔可测函数，取定。令

$$\nu_{*,r'}(x)=\sup_{I\in x}\left(|I|^{-1}\int_{\hat{I}}|\nu(y,t)|^{r'}\frac{dydt}{t}\right)^{\frac{1}{r'}},\ \frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1.$$

邓得到了如下不等式：

$$\left|\int_{R^+_2}F(x,\ t)\nu(x,\ t)\frac{dydt}{t}\right|\leqslant C\int_R A_r(F)(x)\nu_{*,r'}(x)dx \tag{3}$$

这个不等式当 $r=\infty$，并且 $\nu_{*,1}(x)\in L^\infty$ 时，便得到式(2)中 $p=q=1$ 的情形，因为此时 $A_\infty(F)=F^*$，并且 $\nu_{*,1}(x)\in L^\infty$ 即意味着 $\nu(x,t)\dfrac{dydt}{t}\in CM_1$。邓[3]还给出了这个不等式的一些应用 。

对 CM_α，以前更多为人注意的是 $\alpha=1$ 的情形。韩永生[5]则对 $\alpha>1$ 给予了重视。他对 $\mu\in CM_\alpha$ 得到了

$$\left(\int_{R_+^{n+1}}|\varphi(x,t)|^\alpha d\mu\right)^{1/\alpha}\leqslant C\int_{R^n}\varphi^*(x)dx,\ \forall\varphi。 \tag{4}$$

① $n=1$ 时的帐篷 $\hat{I}$ 定义为，以区间 $I\subset R$ 为底的位于 $R_2{}^+$ 中的等腰直角三角形。$n>1$ 时作类似理解。

他并利用这不等式对 H_p 理论中出现在 C. Fefferman 与 E. M. Stein 的著名文章中的几个重要引理给出了简化证明。

(2)BMO 空间　这是一个由定义于 R^n(或T)上满足如下性质的函数构成的空间：

$$\|f\|_* = \sup_{I\in x} \frac{1}{|I|}\int_I |f-f_I|dx<\infty,\ \text{其中}\ f_I=\frac{1}{|I|}\int_I f(x)dx。\tag{5}$$

这个空间与很多领域有关，性质很丰富。王斯雷[23]发现 BMO 派生的一个性质作为傅里叶级数一致收敛的判别条件是很合适的。他对$f\in L'(T)$引进了如下量：

$$\mu(f,\ h)=\sup_{I:|I|=h}\frac{1}{|I|}\int_I |f-f_I|dx。\tag{6}$$

他得到：对$f\in C(T)$，由 $\mu(f,h)=o\left(\left(\log\dfrac{1}{h}\right)^{-1}\right)$可以推出$f$的傅里叶级数$S(f,x)$一致收敛。他并且指出这个条件在如下意义下不能改进，即存在$g_1\in L^1(T)$使$\mu(g_1,h)=o\left(\left(\log\dfrac{1}{h}\right)^{-1}\right)$，也存在$g_2\in C(T)$使$\mu(g_2,h)=O\left(\left(\log\dfrac{1}{h}\right)^{-1}\right)$，它们都使傅里叶级数不一致收敛。此外，王斯雷还研究了李特伍德-佩利 g 函数算子在 BMO(R^n)上的作用。他指出，存在$f\in L^\infty(R^n)$，使

$$g(f)(x)=\left(\int_0^\infty y|\nabla u(x,\ y)|^2dy\right)^{1/2}=\infty,\ \text{处处},$$

其中 $u(x,y)=P_y*f(x)$, $p_y(t)$是泊松核,∇是梯度算子；也存在$f\in L^\infty(R^n)$使$g(f)(x)<\infty$, a.e.，但$g(f)\notin L^\infty$。但对BMO空间，他指出：$\forall f\in BMO(R^n)$，或者 $g(f)(x)=\infty$, a.e.，或者$g(f)(x)<\infty$, a.e.，且在第二种情况下恒有

$$\|g(f)\|_*\leqslant C\|f\|_*,\ f\in BMO,\ \text{只要}\ g(f)<\infty,\ \text{a.e.}。$$

(3)函数的结构块(block)分解　H_p 有所谓原子分解，意即 H_p的元素都是由简单的称为"原子"的结构部件叠加而成。受此启发，人们想到了一种更简单的结构部件，即将原子的定义条件中"消失矩"一条除去，姑且称这样的结构部件为"结构块"。M. H. Taibleson 与 G. Weiss 首先考虑了由结构块生成的空间 C_q，并发现了它在傅里叶级数收敛问题中有良好的性质。陆善镇[12,13]则联系 R. Fefferman的熵概念研究了这种块结构在高维傅里叶级数的求和、某些奇异积分的收敛等问题中的应用，改进了 C. P. Calderon 的一些结果。龙瑞麟[9]发现了 $L^p(0<p\leqslant 1)$可以进行更为简单的块分解，他并独立于 G.Weiss 等人也得到了 $C_q(1<q<\infty)$的对偶空间刻划。

在 R_+^{n+1} 上也可考虑结构块生成的空间。这时为适应 R_+^{n+1}的特点，块的支柱应考虑用帐篷包含，块的大小则与帐篷的底的测度相联系。R. R. Coifman、Y. Meyer、E. M. Stein 最近考虑的空间族 $T_q^p(1\leqslant q\leqslant\infty,\ 0<p\leqslant\infty)$中有一些就是可进行块分解的。他们自己首先证明了 T_2^1（这或许是这族中最有意义的一个）就是这样。韩永生、龙瑞麟比较详细地讨论了$T_\infty^{p②}$,对这个子族获得了比较完整的结果，如结构块分解、对偶空间、内插空间以及形如式(2)的卡尔森不等式等，并且他们实际上考虑的是更一般的 $T_\infty^p(\nu)$，其中 ν 是 R^n 上事先给定的一个满足二倍条件的非负波莱尔测度。这时卡尔森不等式成为如下所述

② $T^p_\infty=\{$波莱尔可测$\varphi(x,t)$: $\varphi^*(x)=\sup\limits_{\Gamma(x)}\{|\varphi(y,\ t)|\}\in L^p\}$，$0<p\leqslant\infty$。

的一个两权不等式。这不等式中的两权可以刻划得很清楚，即：$\mu\in CM_{\frac{q}{p}}(\nu)$（意义自明），$0<p\leqslant q<\infty$，当且仅当

$$\left(\int_{R_+^{n+1}}|\varphi(x,t)|^q d\mu(x,t)\right)^{1/q}\leqslant C\left(\int_{R^n}\varphi^{*p}(x)d\nu(x)\right)^{1/p},\ \forall\varphi。\qquad(2)'$$

（4）一个联系于 H_p 的函数分解　设 $0<p_1\leqslant p\leqslant p_2<\infty$，则对任意 $f\in L^p$，任意 $\lambda>0$，存在 f 的一个自然分解 $f=g+h$ 满足

$$\|g\|_{p_2}^p\leqslant\lambda^{p_2-p}\|f\|_p^p,\quad \|h\|_{p_1}^p\leqslant\lambda^{p_1-p}\|f\|_p^p。$$

这只需简单地令 $g=f\chi(\{|f|\leqslant\lambda\})$，$h=f\chi(\{|f|>\lambda\})$ 即可。是否可以考虑 $p_1\leqslant1$ 时用 $\|h\|_{H^{p_1}}$ 代替 $\|h\|_{p_1}$ 呢？美、日学者和韩永生等都得到了肯定的结果。韩[6]对 $p_1\leqslant1<p\leqslant p_2$ 的情况得到了分解 $f=g+h$，使得

$$\|g\|_{p_2}\leqslant C\lambda^{p_2-p}\|f\|_p^p,\ \|h\|_{H^{p_1}}^{p_1}\leqslant C\lambda^{p_1-p}\|f\|_p^p,\ \forall f\in L^p。$$

（5）哈代-索博列夫空间　彭立中[15]利用 $H_p(R^n)$，$0<p\leqslant1$ 的原子-分子理论，研究了分数次积分算子在 H_p 上的作用，并进而定义了哈代-索博列夫空间 H_k^p 与 $\mathscr{H}_s^p$，得到了与古典的索博列夫空间 L_k^p 与 $\mathscr{L}_s^p$ $(1<p<\infty)$ 相类似的结果，如嵌入定理、等价模定理、对偶定理等。

2. 加权模不等式

调和分析中出现的许多算子（如哈代-李特伍德极大算子、希尔伯特变换、奇异积分算子）很早就被知道是 $L^p(dx)$ 到自己的有界算子。设 $\omega(x)$ 是一个权函数，对怎样 $\omega(x)$，它们仍是 $L^p(\omega)$ 到自己的有界算子呢？这是长达几十年未能很好解决的问题。直到七十年代初，B. Muckenhoupt 在这个问题上获得了突破。他发现一个施加在权上的很简单的条件即所谓 A_p 条件，便是必要充分条件。此后十多年来，对权函数的性质本身，对各种各样算子的加权不等式，以及对加权理论与其他领域的联系等的研究，构成了当代调和分析的重要内容之一。国内学者主要研究了各种各样算子的加权不等式。如王斯雷研究了一类李特伍德-佩利型算子的加权不等式；彭立中推广了 Coifman-Meyer 的所谓 Calderón-Zygmund 算子的概念，并得到了这样的算子的加权不等式。此外，尤众研究了混合齐性空间上的极大算子、奇异积分算子的加权不等式；王世林研究了拟微分算子的加权不等式；韩永生研究了奇异积分的交换子的加权不等式；胡跃和钱涛分别对拟微分算子的各种高阶交换子也得到了加权不等式；骆程还讨论了希尔伯特变换局限于满足一定消失矩条件的函数类上时的加权不等式。

3. 多线性算子理论

多线性算子理论来源于奇异积分的交换子理论。后者是1965年 A. P. Calderón 为研究带不光滑系数的微分方程而引进的一个新概念。它的典型代表是

$$T(a_1,\cdots,a_n,f)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}\frac{a_j(x)-a_j(y)}{x-y}\ \frac{f(y)}{x-y}dy。\qquad(7)$$

多线性算子是上述算子的推广：

$$M_n(f_1,\cdots,f_n)(x)=\int_{R^{dn}}K(x-u_1,\cdots,x-u_n)f_1(u_1)\cdots f_n(u_n)du_1\cdots du_n,\qquad(7)'$$

或者用傅里叶变换的语言，即

$$M_n(f_1, \cdots, f_n)(x) = C_n\int_{R^{dn}} \exp(ix(\xi_1+\cdots+\xi_n))\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_n)\hat{f}_1(\xi_1)\cdots\hat{f}_n(\xi_n)d\xi_1\cdots d\xi_n, \quad (7)$$

其中$\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_n)$是$K(x_1,\cdots,x_n)$的某种意义下的傅里叶变换，称为算子$M_n$的符号。多线性算子理论与微分方程、复变函数、拟微分算子、甚至非线性分析等都有关系。特别值得指出的是：正是这个理论被成功地用来解决关于利普希茨曲线上的柯西积分算子L^2有界性的著名的Calderón猜测。关于这个理论在非线性分析中的应用，邓东皋与他人合作(Coifman-Deng-Meyer[4])在L^∞模小的条件下证明了Kato猜测，即Kato算子

$$\sqrt{-\Delta}/\sqrt{-\nabla\ (I+B)\nabla}$$

是$L^2(R^n)$上的有界算子，其中$\nabla(I+B)\nabla$表示一强椭圆型微分算子，I是$n\times n$单位矩阵，$B=(b_{i,j})$是$n\times n$函数矩阵，满足$\|b_{i,j}\|\leqslant\delta_n$，$\delta_n>0$，$\nabla$是梯度算子，$\Delta$是拉普拉斯算子。

4. 关于高维求和

傅里叶级数的(点)收敛与求和是傅里叶分析中最古老而又最基本的问题之一。高维的情形与一维相比较有许多本质上不同的地方。高维时最著名的求和方法是Bochner-Riesz求和，形如下述(如只看积分情形)：

$$\sigma_R^\delta(f)(x) = \int_{|y|<R}\left(1-\frac{|y|^2}{R^2}\right)^\delta \hat{f}(y)e^{2\pi ix\cdot y}dy, \quad (8)$$

其中$\delta\geqslant 0$，$x\cdot y$表R^n中内积，$\hat{f}$是f的傅里叶变换。$\delta_0=\frac{n-1}{2}$称为临界指标。这是因为S. Bochner发现，当$\delta>\delta_0$时，σ_R^δ的性质很好；而当$\delta\leqslant\delta_0$时，则留下许多问题待解决。陆善镇对$\sigma_R^{\delta_0}$以及它的共轭$\tilde{\sigma}_R^{\delta_0}$的点收敛问题进行了较多的研究，在定点收敛、几乎处处收敛与一致收敛方面都得到了较好的结果。陆在文[10]中引进了球形积分的概念。所谓$f\in L^1$的球形积分是指

$$F(x, r) = \int_{B(x,\ r)} (f(t)-f(x))dt。 \quad (9)$$

陆在球形积分上施加条件，得到了古典的Salem定理的高维类似，即$f\in L\log^+L(Q_k)$，以及$\forall x\in Q_k$，$r^{1-k}(F(x,r+2h)+F(x,r)-2F(x,r+h))=o(h(\log 1/h)^{-1})$，对$r\in[h,r_0]$一致，推出$\sigma_R^{\delta_0}(f)(x)\to f(x)$，a.e.。此外，他还在$F(x,r)$上施加条件，得到了保证$\sigma_R^{\delta_0}$一致收敛的结果，这比Б. И. Голубов的已有结果要好。关于定点收敛，陆[11]利用f的球面平均$f_{x_0}(t)$在$[0, \delta]$上的调和有界变差属性作为充分条件之一，得到了$\sigma_R^{\delta_0}(f)(x_0)$的定点收敛，这也比Голубов的结果要好。潘文杰在文[14]等中讨论了$\delta<\delta_0$时σ_R^δ的局部化原理、收敛性以及一致逼近f的阶的估计。王昆阳[21]研究了二维傅里叶级数的对角线部分和的q阶哈代强型求和(简称M型(H, q)求和)。他指出只需$f\in L\log^+L(Q_k)$，上述求和法便几乎处处可求和到f。

5. 若干一维结果

(1)关于ΛBV函数类　在讨论傅里叶级数的收敛与求和问题的过程中，D. Waterman提出了Λ有界变差函数的概念，这个空间记为ΛBV。所谓$f\in\Lambda\mathrm{BV}(I)$，是指对给定的$\Lambda=\{\lambda_n\}$，$\lambda_n\nearrow\infty$，$\sum\frac{1}{\lambda_n}=\infty$，有

$$V_\Lambda(f)=\sup\{\sum\lambda_n^{-1}|f(I_n)|：\forall\text{ 剖分 } I=\cup I_n\}<\infty, \quad (10)$$

其中$|f(I_n)|=|f(b_n)-f(a_n)|$，$I_n=[a_n, b_n]$。现记$\Lambda_m=\{\lambda_{n+m}\}$。如果$\lim\limits_{m\to\infty}V_{\Lambda_m}(f)=0$，

则谓$f\in \Lambda BV_c$。Waterman曾经提出如何刻划ΛBV_c的问题。王斯雷[22]给出了ΛBV_c的一个刻划，并且改进了Waterman关于ΛBV中函数的傅里叶系数的阶的估计。邵国梁则基本上回答了Waterman的关于ΛBV是否等于ΛBV_c的问题。他指出，一般地$\Lambda BV_c \subsetneqq \Lambda BV$，但当$\{\lambda_n\}$凸时，则$\Lambda BV=\Lambda BV_c$。此外，施咸亮将$\Lambda BV$与BMO两概念结合起来，提出了$\Lambda BMV$的概念。即如果

$$\sup\left\{\sum \lambda_n^{-1}|I_n|^{-1}\int_{I_n}|f(x)-c_{I_n}|dx:\forall\text{ 剖分 }\{I_n\}\right\}<\infty, \tag{11}$$

则谓$f\in \Lambda BMV$。此外，他并讨论了这个新类分别与BMO或ΛBV的关系，讨论了此类中函数的傅里叶分析性质，改进了前人的有关结果。

（2）关于绝对收敛　谢庭藩[16]对$f\in L^p(T)\,(1\leqslant p\leqslant\infty)$引进了$r$阶弱$L^p$连续模$\underline{\omega_r}(f,\delta)_{L^p}$的概念，并且指出下两条件之一都推出$f$的傅里叶级数$S(f,x)$绝对收敛：

$$\int_0^1 \underline{\omega_r}(f,\delta)_{L^p}\delta^{-\left(1+\frac{1}{p}\right)}d\delta<\infty, \tag{12}$$

$$f\in BV\text{ 且}\sum n^{-1}\underline{\omega_r}\left(f,\frac{1}{n}\right)_{L^p}<\infty。 \tag{12$'$}$$

这改进了著名的S. Bernstein定理及其后的若干推广。谢庭藩[17]还讨论了具有小缺项的傅里叶级数的绝对收敛性。所谓f的傅里叶级数具有小缺项性是指

$$f\sim a_0+\sum_1^{\infty}(a_k\cos n_kx+b_k\sin n_kx), \tag{13}$$

其中$\varliminf\limits_{k}(n_{k+1}-n_k)<\infty$。这方面已有的结果是，设$f$在$[-\eta,\eta]$适当光滑，且$n_{k+1}-n_k\geqslant\dfrac{4\pi}{\eta}$，则式(13)中级数绝对收敛。谢[17]在条件$\varliminf\limits_{k}(n_{k+1}-n_k)>\dfrac{\pi}{\eta}$下得到了更广一些的结果。

（3）关于绝对Cesàro求和　对复阶Cesàro求和(c,α)，已知若α_1与α_2只是实部相等，则(c,α_1)与(c,α_2)不必等价。但陈全德[2]发现，对绝对Cesàro求和$|c,\alpha|$，则情况不然。他指出，若$\mathrm{Re}\alpha_1=\mathrm{Re}\alpha_2>-1$，则$|c,\alpha_1|$与$|c,\alpha_2|$总是等价的，从而对绝对Cesàro求和，仅考虑实阶就够了。

（4）关于(f,d_n)求和的勒贝格常数　对于G. Smith引入的(f,d_n)求和法，许多人曾致力于它的勒贝格常数的渐近估计。施咸亮[20]给出了一切非负正则(f,d_n)求和法的勒贝格常数的渐近估计，并且指出非负正则(f,d_n)求和法具有吉布斯现象。

（5）一个涉及到函数重排的不等式　A. Garsia曾为了研究傅里叶级数的一致收敛与绝对收敛的需要，用组合论的方法证明了如下不等式：设$f\in L^p_{2\pi}$，f^*是它的非增右连续重排，则

$$f^*(x)-f^*(2\pi-x)\leqslant C_p\int_x^{\pi}Q_p(\delta,f)\delta^{-\left(1+\frac{1}{p}\right)}d\delta,\quad 0<x\leqslant\pi,\ \forall f\in L^p_{2\pi}, \tag{14}$$

其中

$$Q_p(\delta,f)=\left(\frac{1}{\delta}\iint_{|x-y|\leqslant\delta,\,x,y\in[0,2\pi]}|f(x)-f(y)|^p dxdy\right)^{1/p}。$$

鉴于原来的证明较长，他曾提出给出这个不等式的函数论的直接证明的问题。王斯雷[22]正面回答了这个问题。以后他并进一步探讨了Garsia据此建立的判别法的意义，加强了Garsia的结论。

（6）一个极值问题　在1976年布达佩斯傅里叶分析与逼近论会议文集中曾提出如下问题：对给定的$f\in L^2_{2\pi}$，求出$h\in\mathscr{H}_n$使

$$\delta(f,h)=\sum_{k=0}^{\infty}(d_k(f)-d_k(h))^2 \tag{15}$$

达到极小，其中

$$d_k(f)=\left(a_k^2(f)+b_k^2(f)\right)^{1/2},\ a_k(f),\ b_k(f)\text{分别是}f\text{的正、余弦系数，}$$

$\mathscr{H}_n$表示$[0,2\pi]$上仅在n等分点处间断的阶梯函数集。施咸亮[18]对此给出了解答，他并给出了$\delta(f,h)$的下确界的精确表达式。

（7）傅里叶子列的可和性　设$\{S_n(f,x)\}_1^\infty$是傅里叶部分和算子序列，T是任一正则求和矩阵，$(a_{m,k})$是T对应的求和矩阵。D. J. Newman曾经指出，对任意给定的T，存在$f\in C(T)$和$x\in T$，使$\sum_{k=0}^{\infty}a_{m,k}S_{2k}(f,x)$发散。施咸亮[19]就子列$\{n_k\}_1^\infty$满足$n_{+1}\geqslant qn_k,q>1$，以及求和法$T=(a_{m,k})$的情形，对函数类

$$H_{x_0}[\omega]=\{f\in C(T):\omega(f,x_0,t)\leqslant\omega(t)\}\ (\omega(f,x_0,t)\text{为连续模})$$

建立了$\sum_{k=0}^{\infty}a_{m,k}S_{nk}(f,x_0)$收敛于$f(x_0)$的必要充分条件。

（8）大筛法不等式进入调和分析　E. Bombieri对大筛法作了整理，将它改述为一个关于三角多项式的不等式，并将它成功地应用于解析数论中的许多重要问题。H. L. Montgomery也从R上广义希尔伯特变换的角度考虑过大筛法，求得了不等式中最好或接近最好的常系数，龙瑞麟[7]则从傅里叶分析的角度看待它。他认为大筛法不等式是调和分析中的一个课题，它反映了如下一个基本事实：即任何一个支柱包含在固定紧集K内的$L^p(1\leqslant p\leqslant 2)$函数，它的傅里叶变换在任意给定的离散点列$\{x_r\}_1^\infty$上的取值，除依赖函数本身和$K$以外，整体上只依赖于这点列彼此接近的程度，而与这点列如何挑选是无关的。说得确切一些，设$\{\lambda_r\}_1^\infty$是由点列$\{x_r\}_1^\infty$彼此接近程度和K决定的一个权序列，考虑算子T：$f\to\{\hat f(x_r)\}_1^\infty$，龙指出$T$是$L^p(K)$到$l^{p'}(\{\lambda_r\})$有界的，意即

$$\left(\sum_1^\infty|\hat f(x_r)|^{p'}\lambda_r\right)^{1/p'}\leqslant C\|f\|_p,\ \forall f\in L^p(K), \tag{16}$$

这里$\hat f$表傅里叶变换，p'是p的相伴数。这个结论对很一般的群和齐型空间都成立，并且它给出的估计一般而言足够精确。这个不等式在比较抽象的场合（如代数数论）可望有用。在古典场合，除了解析数论以外，在古典调和分析中也已发现了它的应用。龙瑞麟[8]应用它解决了一维傅里叶级数部分和算子的给定子序列在固定点的表现的一个问题。确切而言，设$\{n_k\}_1^\infty$是自然数的一个给定子序列，且是凸的，即$\Delta n_k=n_{k+1}-n_k\nearrow$。设$1\leqslant p<\infty$，记$S_n(f,0)$为$x=0$处的傅里叶部分和算子，龙证明了下述命题：

$$\left(\frac{1}{m}\sum_1^m|S_{n_k}(f,0)|^p\right)^{1/p}\leqslant C\|f\|_\infty,\ \forall f\in L^\infty(T),\ \forall m, \tag{17}$$

当且仅当$\log n_k\leqslant Ck^{\min(\frac{1}{p},\frac{1}{2})}$。这个问题是由J. P. Kahane提出的，除他以外，Y. Katznelson与L. Carlesón等都先后在这问题上作出过很重要的贡献。

6. 李特伍德猜测和Calderón猜测

最后，作为本文的结束，我们简单提一下国际上近几年调和分析的两个最引人注意的

进展，即李特伍德猜测与 Calderón 猜测的解决。

1948 年，J. E.李特伍德猜测对于$\{n_k\}_1^N$的任意选取，$0<n_1<\cdots<n_N$，总有

$$\left\|\sum_1^N e^{in_kx}\right\|_1 \geqslant C\log N。 \tag{18}$$

1960 年前后，P. J. Cohen 首先获得突破，他证明了(18)右边可以是$C(\log N/\log\log N)^{1/8}$。H. Davenport 稍后便将$\frac{1}{8}$改进为$\frac{1}{4}$。1978 年前后，S. K. Pichorides 和J. J. F. Fournier 分别用不同方法得到式（18）右边可以是 $C(\log N)^{1/2}$ 的结果。1980 年 Pichorides 因将右边改进为 $C\log N/(\log\log N)^2$ 而获得1980 年度的 Salem奖。1981年，李特伍德猜测最终被 O. C. McGehee、L. Pigno、B. Smith(独立地，也被 S. V. Konjagin) 解决。奇怪的是，他们所用的方法竟是迄今最简单的一个，他们的思想是先证明关于 H_1 的哈代定理的下述推广：设 $S=\{n_1,n_2,\cdots\}\subset Z,\mu\in M(T)$(有界测度的集合)，$\operatorname{supp}\hat{\mu}\subset S$，则

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}|\hat{\mu}(n_k)| \leqslant C\,\|\mu\|。 \tag{19}$$

利用这个定理，取 $S=\{n_k\}_1^N$, $\mu=\sum_1^N e^{in_kx}dx$，则立即得到式(18)，李特伍德猜测获证。

所谓 Calderón 猜测是 A. P. Caldorón 在1978年国际数学家大会上正式提出的，它的历史却可追溯到1965年。这个猜测有如下几个等价提法：

(a)设 $A'\in L^\infty(R)$，则利普希茨曲线 $z=x+iA(x)$上的柯西积分算子

$$C(f)(x)=\text{p. v.}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x-y+i(A(x)-A(y))}f(y)dy$$

是 L^2 上的有界算子；

(b)设复平面上的曲线$z=z(s)$满足

$$0<r\leqslant\left|\frac{z(s)-z(t)}{s-t}\right|\leqslant R<\infty,$$

则柯西积分算子

$$C(f)(x)=\text{p.v.}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{z(s)-z(t)}dt$$

是 L^2 上的有界算子；

(c)设 K 是复平面内的紧集，复值函数$A(x)$满足$\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\in K$, $\forall$实 x, y,$x\neq y$,又设 $F(z)$在 K 的一个邻域内解析，则

$$C(f)(x)=\text{p.v.}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F\left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)\frac{f(y)}{x-y}dy \tag{20}$$

是 L^2 上的有界算子。

表面上看起来，(c)最强且最有用，实则三者等价。(c)常常被作为 Calderón猜测的提法的代表。由幂级数展开易知，为研究一般 $F(z)$，充分地只需研究$F(z)=z^k$。A.P.Calderón 于 1965 年首先研究并完满解决了$F(z)=z$的情况，随后他就提出对应于$F(z)=z^k$，$k\geqslant2$，算子$f\to C_k(f)$的 L^2 有界性问题。直到 1974 年，R.R. Coifman 与 Y. Meyer 才证明了 C_k的 L^2 有界性。1977年，Calderón 在$\|A'\|_\infty$小的条件下，证明了(a)中$C(f)$的L^2有界性。

1981 年，R. R. Coifman、A. McIntosh、Y. Meyer 才用多线性算子理论得到如下估

计：

$$\|C_k\| \leqslant B_0(1+k)^4\|A'\|_\infty^k, \ \forall k_\circ$$

从而 K 凸时的 Calderón 猜测获得解决。G. Davis 不久后从 Calderón 1977 年的估计出发，用实方法除去了 K 的凸性限制。最近，这些作者们还将 F 的全纯性也减弱为 C^∞ 性质。关于多线性算子理论与 Calderón 猜测，可参见程民德、邓东皋[1]，以及 Coifman-Davis-Meyer（*Advances in Math.*, 48, 2(1983) 144)。

在本文写作过程中，作者得到了北京大学程民德老师，以及北京大学邓东皋、彭立中，杭州大学王斯雷、施咸亮，北京师范大学陆善镇等同志的大力支持，在此一并致以深深的谢意。

（龙瑞麟）

[1] 程民德，邓东皋，«逼近论会议论文集»，(1983)
[2] 陈全德，«科学通报»，**26** (1981) 957
[3] 邓东皋，*Studia Math.*, **78**, 3 (1984) 245
[4] Coifman R.R. *et al.*, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, **33**, 2 (1983) 123
[5] 韩永生，*Chin. Ann. of Math.*, **4B**, 1 (1983) 15
[6] 韩永生，«中国科学»A辑，7 (1983) 604
[7] 龙瑞麟，«中国科学»，3 (1978) 264
[8] 龙瑞麟，*C.R. Acad. Sc. Paris, t* **288**, **A**(1979) 1009
[9] 龙瑞麟，«中国科学»A辑，7 (1983) 594
[10] 陆善镇，«数学学报»，**23** (1980) 609
[11] 陆善镇，«科学通报»，**26** (1981) 1
[12] 陆善镇，*Lect. Notes in Math.*, 908 (1983) 319
[13] 陆善镇，«中国科学»A辑，12 (1983) 1089
[14] 潘文杰，«中国科学»，11 (1981) 1310
[15] 彭立中，«北京大学学报»，2 (1983) 26
[16] 谢庭藩，«杭州大学学报»，4 (1980) 1
[17] 谢庭藩，«数学研究与评论»，创刊号 1 (1981) 47
[18] 施咸亮，«科学通报»，**26** (1981) 1150
[19] 施咸亮，«数学研究与评论»，创刊号(1981) 1
[20] 施咸亮，«数学年刊»，**3**，3 (1982) 365
[21] 王昆阳，«科学通报»，**27** (1982) 894
[22] 王斯雷，«科学通报»，**25** (1980) 917
[23] 王斯雷，«杭州大学学报»，10 (1981) 18
[24] 王斯雷，«中国科学»，11 (1981) 1299

运　筹　学

近年来我国的运筹学研究是活跃的。特别自1980年成立中国数学会运筹学会以后，它主办的一个刊物《运筹学杂志》于1982年出版，对运筹学在我国的发展有相当的推动作用。

下面简述两年来我国在运筹学方面的研究成果，依据的主要材料有：国内杂志上近两年来发表的论文，1982年10月在武汉召开的全国最优化理论与应用学术会议上所提交的论文。

非线性规划　在算法模型方面，越民义研究了相当广泛的一类点到集映射及有关算法的收敛性，推广了 Zangnill 与Huard的结果，并以部分线性化的中心法为例说明这种推广是实质的。

在总体最优化方面，郑权进一步从积分途径研究了最优性的充要条件，并对无约束与有约束情形，给出了均值水平集方法等算法；章祥荪与 J. B. Rosen对凹极小化问题给出了一种求总体极小值的算法，并证明了其收敛性。

在无约束最优化方面，吴方与桂湘云把拟牛顿法中具有 3 个独立参数的 Huang 族矩阵推广到具有 $n+1$ 个独立参数的矩阵族，且保持了 Huang 族矩阵所具有的重要性质；诸梅芳与张建中证明某些 Levenberg-Marguardt 型非线性最小二乘法的收敛性，其中的阻尼因子按某种条件允许增加或减少；邓乃扬与陈志研究了具有非线性尺度不变性的共轭梯度

法，改进了有关结论；俞文魮与陈开明对切块法与变步长轴向搜索法等直接搜索法进行了分析，给出了收敛定理。

在约束最优化方面，赖炎连、吴方和桂湘云对线性约束下的凸规划问题，将既约梯度法与变尺度法相结合，给出了一个新算法，证明了它的收敛性与适当条件下的超线性收敛速率。越民义、韩继业和姚恩瑜对可行方向法的全局收敛性作了一种统一的处理，所得结果有较大的概括性；王长钰、章祥荪等对某些可行方向法、既约梯度法和梯度投影法进一步进行了研究；张建中与杨有锠把无约束不可微凸规划的 Bundle 方法推广到了带有不可微凸约束的情况；张连生改进了有关精确罚函数的一些结果。

线性规划 章祥荪证明了约束右端为参数的线性规划问题的稳定性；马仲蕃应用 Bland 关于单纯形法的新准则，对变量具有上界的线性规划问题，给出了改进的单纯形算法。

多目标规划 魏权令与应玫茜给出了多目标规划问题弱有效解集合的稳定性概念与该集合为稳定的充分条件；林锉云把单目标规划问题的对称对偶理论推广到多目标规划问题。

组合最优化 管梅谷研究了 E. Minieka 提出的 WPP问题(Windy postman problem，其中邮递员在两点之间正向和反向的行走时间可不相同)，证明了 WPP 是 NP 完全的，而当某种条件成立或近似成立时，存在着多项式解法或近似算法；管梅谷等还研究了一些组合最优化问题与中国邮路问题的等价性；谢力同用组合拓扑方法统一处理了图上作业法；蔡茂诚研究了路长有限制时最优二分树的一些性质；王哲民对 Welsh定理给出了一个构造性证明；董纯飞等研究了一类变权网络的最短路问题；林诒勋对最小化误时损失的一台设备排序问题，建立了有效的近似算法；张盛开与赵玉鹏研究了一类最优服务的排序问题。

随机运筹学 徐光辉与 K. Bosch 对于在两种泄放速度情形下的有限水库，导出了放空分布、库容分布、溢流量分布等的明显表达式；徐光辉与颜基义研究了 GI/M/n排队系统的概率规律；曹晋华与程侃对服务台可修的 M/G/1排队系统讨论了与排队论和可靠性理论有关的各种指标。

运筹学应用 桂湘云等利用大规模可分离变量的非线性规划的分解，处理了全国性的石油资源的运输和加工等方面综合在一起的最优分配问题；钱令希、钟万勰等将序列二次规划方法用于工程结构优化；韩锋利用整数规划制订列车编组计划；顾基发与舒光复将多目标规划用于齿轮传动设计；段虞荣用罚函数法求解梯级水电站功率的有关最优分配问题；康金章研究了结构布局几何可调的优化设计问题；吴伟雄等利用线性规划求解光学自动设计的有关问题；郑英元将配棉问题归纳为一个与线性规划联系在一起的最优分组问题；郑仲三等用目标规划法研究配棉问题。此外，尚有许多应用研究涉及机械设计、电子器件、化学工程、道路断面与桥梁设计、物资调运、水资源分配、生产流水线效率、农业结构布局等方面。

在国际上，1981年7月，国际运筹学联合会召开了第九届国际运筹学会议，其重点是运筹学理论与应用研究的结合与相互渗透；1982年8月，数学规划学会召开了第十一届国际数学规划讨论会，其重点是数学规划理论的新发展，涉及线性规划、非线性规划、组合

最优化、随机最优化、博弈论、有关应用软件、最优控制理论等方面。特别值得注意的是，S. Smale研究了线性规划单纯形法在平均意义下的计算复杂性，证明了当约束个数固定时，平均迭代次数与变量个数的比值具有上界；J. Edmonds 与 R. G. Bland关于有向拟阵与线性规划的工作联系着单纯形法在某种转轴运算下的计算复杂性问题；M. J. D. Powell等关于约束最优化的变尺度的研究展示了这是一个富有生命力的新算法；L. Lovász关于次模函数最优化问题的研究给出了一些较深刻的结果。此外，作为对数学规划方面具有开创性工作的奖励，国际数学规划学会在1982年将第一次 Dantzig 奖颁发给M.J. D. Powell与R. T. Rockafeller。

（俞文鮆）

物　理　学

高能物理学

最重要的发现　1983年1月和6月，欧洲核子研究中心宣布发现了传递弱相互作用的中间玻色子 $W^{\pm}$ 和 Z^0 粒子。这一发现是在欧洲核子研究中心的超级质子同步加速器(SPS)上获得的。1981年10月，欧洲核子研究中心利用这一机器实现了质子-反质子对撞，每一束能量为270GeV，质子和反质子在质心系中总的有效能量为540GeV，因而有了足够的能量产生中间玻色子 $W^{\pm}$ 和 Z^0。然而，由于机器的亮度低，在1982年的运转中虽然做了一些物理工作，但并未发现中间玻色子。因为在质子和反质子的碰撞过程中产生 $W^{\pm}$ 的几率很小，大约在2亿次碰撞中才会产生一个 $W^{\pm}$，而产生 Z^0粒子的几率要比产生 $W^{\pm}$ 粒子的几率小得多。1982年下半年经过四个多月努力，将亮度提高了十倍，增加了产生中间玻色子的几率。1983年1月初首先发现了荷电的中间玻色子 $W^{\pm}$，同年6月又发现了中性的中间玻色子。为了寻找它们，除了机器的亮度以外，就是需要精密的实验装置和复杂的分析手段，从几亿次的碰撞事件中找出它们。欧洲核子研究中心有两个实验组UA1和UA2同时进行测量，目前的实验结果如下：

UA1组　$m_{W^{\pm}}=(80.9\pm1.5)\mathrm{GeV}$,
$m_{Z^0}=(95.6\pm1.4)\mathrm{GeV}$,
$\sin^2\theta_W=0.226\pm0.008$,
$\rho=0.925\pm0.05$;

UA2组　$m_{W^{\pm}}=(81.0\pm2.5\pm1.3)\mathrm{GeV}$,
$m_{Z^0}=(91.9\pm1.3\pm1.4)\mathrm{GeV}$,
$\sin^2\theta_W=0.226\pm0.014$,
$\rho=1.004\pm0.052$。

其中 $\sin^2\theta_W$ 和 ρ 值是由 $m_{W^{\pm}}$ 和 m_{Z^0} 的实验值确定的，在误差范围内与格拉肖、温伯格和萨拉姆的弱电统一理论的预言相一致。这一发现的重要意义可与十九世纪末电磁学理论的验证相比拟。