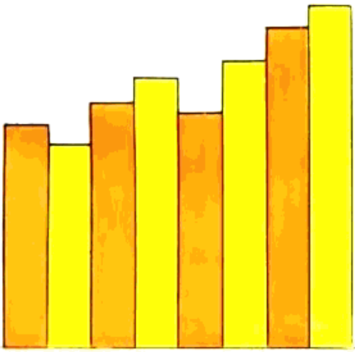
银行经营活动数量分析方法

阎虎勤 编著

西北大学出版社



序

在我国，对经济问题的数量研究已经深入到了经济工作的各个领域。经济数学在经济研究中发挥着重要作用，而且取得了许多丰硕的成果。用一些应用数学的基本方法来研究和分析各种经济量之间的关系从而揭示出经济活动的运行规律，并用以研究管理工作,使管理水平走上新的台阶,这方面成功事例不胜枚举。

与我国经济数量研究的总体水平相比，作为经济研究分支的金融研究工作在数量分析方面也取得了一些可喜的成果，数量研究方面的文章已不断在各种金融研究刊物上频频出现，许多有效的数量分析方法也开始被金融理论和管理工作者所认识、接受和掌握，数量研究成果的推广应用也已受到重视。在银行各专业的教科书以及各类参考书中，数量分析方法逐渐被采用，作为进行金融理论研究和实际管理工作的有效方法传授给学生。正是在这种情况下，我校青年教师闫虎勤同志编写了这本《银行经营活动数量分析方法》，系统地介绍了十种与银行管理密切相关的数量分析方法，并且针对我国银行管理的实际情况，给出较好的实际例证和说明，具有较强的实用性、针对性和可操作性。这些经济数学方法一经与银行管理实际相结合，会具有勃勃生机。

作为校长，我认为这在我校是一个良好的开端，它预示了银行经营活动运用数量分析方法的美好未来。本书对于银行系统的教学、研究和管理工作具有一定的参考价值，因此我愿将它推荐给金融界广大同仁。为表示支持，并鼓励我校广大青年教师今后能够取得更好成绩，虽瞩短文，是以为序。

丁德华

1992.5.25

注：丁德华同志系湖南省金融职工大学校长。

前　　言

目前，经济预测和决策研究是正在发展中的一门综合性新兴学科，它通过科学的经济预测，为正确的判断和决策提供前提条件，是现代化经济管理的一个重要手段。闫虎勤同志撰写的《银行经营活动数量分析方法》一书，用回归分析、决策分析、量期本利分析、数列方法、排队论、线性规划、综合评判、计划网络技术等十多种数学分析方法，对银行经济活动进行剖析、预测，具有较强的针对性和实用性，对于改变当前金融研究领域运用数量分析的专业人员少、素质低、基础差、方法少的现状，促进开展银行经营活动分析，提高金融研究的整体水平，都具有积极意义。该书从银行经营管理的实际出发，分析了影响银行成本、利润变动的因素，运用量期本利分析的原理，以边际利润图示、经营安全图示等坐标数值，判断经营状况好坏，提出经营安全率、危险率、保本点贷款量等标准数据，颇具新意。这些方法在实际工作中使用，有利于金融部门正确制订经营政策，可使贷款量、成本量等保持最佳水平，发挥最大的经营效益。该书采用回归分析法，计算相应系数，预测银行存贷业务的发展前景，提出标准误差的方法，其思路有科学性、实用性，对揭示各经济量之间的内在联系，总结过去，预测未来，实行科学管理等方面都能起到指导作用。纵观全书，观点明确，说理清晰，文笔通顺，举例适当，理论与实际能紧密结合，是一本实用价值较高的现代经济管理教材和工具书。不仅适宜于广大银行工作者学习和运用，也可作为经济、科技、信息等部门的学习教材。

中国人民银行庆阳地区分行

郑裕铨

1992.1.13

目　录

第一章　回归分析法

回归分析法就是运用统计分析的方法，计算各经济环境之间的相互关系及回归方程式，然后根据其中已知变量来预测其它未知变量．回归分析方法是预测分析的最主要方法，且因其科学性高．准确性强而被广泛使用．在本章我们讲述一下一元线性回归、二元线性回归、一元二次多项式回归分析及柯柏—道格拉斯方程式等．

第一节　一元线性回归分析

一元线性回归因其自变量只有一个，且自变量最高次幂为一次而得名．我们通过具体实例来分析．以下是某行 1980 年到 1987 年存款余额与贷款余额的统计资料:

年　份	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
存款余额	155	175	203	225	297	329	441	542
贷款余额	207	227	238	251	334	409	526	616

一、绘制分布图

我们以存款余额合计作为自变量，置 x 轴．以贷款余额合计作为因变量，置 y 轴．作如下图 1.1 所示．

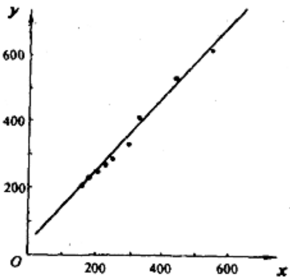


图 1.1 一元线性回归直线图示

观察此图，可以发现这些点的发展趋势是自下而上，呈直线式分布，其相关程度甚高。这正符合一元线性相关函数的性质。

二、计算相关系数

从分布图中虽然可以观察其相关程度，但是必须计算相关系数才能判断准确的相关程度。公式如下：

$$R=\frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2\sum(y-\bar{y})^2}}$$

R—— 相关系数

x—— 存款余额　　　　$\bar{x}$—— 八年存款余额平均数

y—— 贷款余额　　　　$\bar{y}$—— 八年贷款余额平均数

通过计算我们对上例得到如下结果，如下表 1.1 所示—— 相关系数统计表。

表 1.1　　单位：千万元

N 年次	x 存款余额	y 贷款余额	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-x)\cdot(y-\bar{y})$
1	155	207	−140	−144	19600	20736	20160
2	175	227	−120	−124	14400	15376	14880
3	203	238	−92	−113	8464	12769	10396
4	225	251	−70	−100	4900	10000	7000
5	297	334	2	−17	4	289	−34
6	329	409	34	58	1156	3364	1972
7	441	526	146	175	21316	30625	25550
8	542	616	247	265	61009	70225	65455
合计	2360	2808			130849	163384	145379

$\bar{x}=295$　　　　$\bar{y}=351$

相关系数 R 恒在 0 与 ± 1 之间，其绝对值愈大，表示相关程度愈高．+称正相关，−称负相关，0 称完全不相关，现所求之系数 $R=0.9942868$．表示存款余额与贷款余额有很强相关性．贷款余额的 98.86062%（相关系数 R 的平方，表示指标与预测间的相关范围）可以由存款余额这一指标来预测．

三、拟订回归方程式

在分布图上配合一条直线 L，也称作回归直线．这一条直线表示存款余额（x）与贷款余额（y）两个变量之间的关系式，并由此关系式可以估计 y，下面我们详细介绍．

对于前面的统计资料中的数据可以假设有如下结构式：

$$y_\alpha = \beta_0 + \beta_1 x_\alpha + \varepsilon_\alpha$$

$$\alpha = 1，2，\cdots\cdots，N\ (\text{上例中} N = 8) \tag{1.1.1}$$

其中 ε_1，ε_2，……，ε_N 分别表示其它随机因素对 y_α 的影响的总和，一般它们相互独立。

设 b_0 和 b_1 分别是参数 β_0 和 β_1 的最小二乘估计，于是得到一元线性回归的回归方程

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x \tag{1.1.2}$$

b_0，b_1 又叫回归方程的回归系数．对于一个 x_α 由方程（1.1.2）可以确定一个回归值 $\hat{y}_\alpha = b_0 + b_1 x_\alpha$。这个回归值 $\hat{y}_\alpha$ 与实际观察值 y_α 之差 $y_\alpha - \hat{y}_\alpha = y_\alpha - b_0 - b_1 x_\alpha$，刻画了 y_α 与回归直线 $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ 的偏离程度．因此全部观察值 y_α 与回归值 $\hat{y}_\alpha$ 的偏离平方和

$$\begin{aligned} Q(b_0,\ b_1) &= \sum_{\alpha=1}^{N} (y_\alpha - \hat{y}_\alpha)^2 \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N} (y_\alpha - b_0 - b_1 x_\alpha)^2 \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

刻画了全部观察值与回归直线的偏离程度，所谓最小二乘法，就是使得

$$Q(b_0,\ b_1) = \text{最小}$$

据微积分原理,在最小值存在的情况下要估计 b_0 和 b_1 的值是下列方程之解:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial b_0} = -2\sum\limits_{\alpha=1}^{N} (y_\alpha - b_0 - b_1 x_\alpha) = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial b_1} = -2\sum\limits_{\alpha=1}^{N} (y_\alpha - b_0 - b_1 x_\alpha) x_\alpha = 0 \end{cases} \tag{1.1.4}$$

解这一方程组得

$$\begin{cases} b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} \\ b_1 = \dfrac{\sum\limits_{\alpha=1}^{N} x_\alpha y_\alpha - \dfrac{1}{N}(\sum\limits_{\alpha=1}^{N} x_\alpha)(\sum\limits_{\alpha=1}^{N} y_\alpha)}{\sum\limits_{\alpha=1}^{N} x_\alpha^2 - \dfrac{1}{N}(\sum\limits_{\alpha=1}^{N} x_\alpha)^2} \end{cases} \tag{1.1.5}$$

将 b_0 代入(1.1.2)式可得

$$\hat{y} = \bar{y} + b_1(x - \bar{x}) \tag{1.1.6}$$

由此可见，回归方程是通过（$\bar{x}$、$\bar{y}$）这一点的，这对作图极有帮助。

我们令 $$R = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2\sum(y-\bar{y})^2}}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{N}} \qquad S_y = \sqrt{\frac{\sum(y-\bar{y})^2}{N}}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_\alpha,\quad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum y_\alpha$$

并代入(1.1.6)就得到

$$\hat{y} = \bar{y} + R\frac{S_y}{S_x}(x - \bar{x}) \tag{1.1.7}$$

对于上例，我们求得：

$\bar{x}=295$，$\bar{y}=351$，$S_x=127.89$，$S_y=142.90$，得到回归方程如下：

$$\hat{y}=351+1.111044(x-295)$$

此即为 y 对 x 的回归方程式，其回归系数为 1.111044。也就是说，每增加一千万元的存款，贷款余额就将增加 1.111044 千万元，图形如前分布图 1.1。

四、贷款余额预测

据估计第九年存款余额将达到 658 千万元，则根据上述回归方程式有

$$\hat{y}=351+1.111044(658-295)=745.309$$

五、估计标准误差

估计数与实际值之间常有误差发生，其误差大小以标准误差公式来表示：

即
$$S=\sqrt{\frac{\sum(y-\hat{y})^2}{N}}$$

八年来实际贷款余额与估计值之间差异如下表 1.2 标准误差估计表．表中$\hat{y}$之值系由将 x 实际值代入回归方程而得．

表 1.2　　　　单位：千万元

年次	(x) 存款余额	(y) 贷款余额	($\hat{y}$) 贷款余额估计	($y-\hat{y}$)	$(y-\hat{y})^2$
1	155	207	195.4539	11.54614	133.3134
2	175	227	217.6747	9.325272	86.96069
3	203	238	248.784	−10.78397	116.2939
4	225	251	273.2269	−22.22693	494.0364
5	297	334	353.2221	−19.22208	369.4882
6	329	409	388.7755	20.22452	409.0311
7	441	526	513.2124	12.7876	163.5227
8	542	616	625.4279	−9.42856	88.88448

$S=15.25423$（标准误差）

对于一元线性回归模型，当观察值个数 N 很大时，各误差值 ε_α（$\alpha=1, 2, \cdots\cdots, N$）接近于正态分布，故可用正态分布原理来推断预测的可靠性．按正常态分布法则，观察值在$\hat{y}\pm S$两数之间者占 68.26%，在$\hat{y}\pm 2S$ 两数之间者占 95.45%，在$\hat{y}\pm 3S$ 两数之间者占 99.73%，因此，可以推断第九年、第十年……贷款余额．

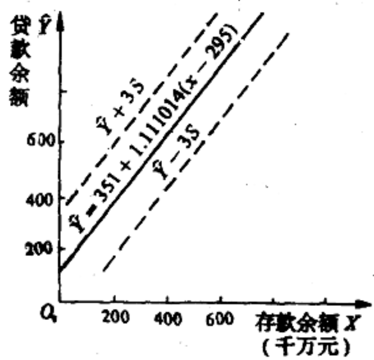


图 1.2　相关性预测及 3S 界限图

在对第九年贷款余额进行预测之后，我们就可断言在（745 ± 15.25）千万元之间约有 68.26%的可能性，在（745 ± 30.50）千万元之间约有 95.45%的可能性，在（745 ± 45.75）千万元之间约有 99.73%的可能性．

进一步我们可利用三个标准差界线，作为经营分析的工具，以追查变异的原因．

第二节　二元线性回归分析

在许多情况下我们往往要考虑的不是一种情况而是多种情况，比如，要对储蓄存款余额进行分析，就要分析定期存款和活期存款两种情况。与第一节一样，我们采取举例分析的方法来研究。

某地区储蓄存款变化情况如下表 1.3 统计数字。

表 1.3　　　　　　　　　　　　　　　　　单位：千元

年　份	1979	1980	1981	1982	1983
定期存款	81095	90068	96531	103385	110958
活期存款	22012	23627	25017	25659	27129
储蓄存款	103107	113695	131548	129044	138087
年　份	1984	1985	1986	1987	
定期存款	118698	123606	121811	124733	
活期存款	27070	29179	29903	29734	
储蓄存款	145768	152785	151714	154467	

现在，我们就是要求出储蓄存款随着定期存款，活期存款变化的关系式来。

一、建立模型拟订回归方程式

假设 y 与另外两个变量 x_1、x_2 的内在联系是线性的，它的第 α 次观察数据是

$$y_\alpha,\ x_{\alpha 1},\ x_{\alpha 2};\ \alpha=1,\ 2\cdots\cdots,\ N \tag{1.2.1}$$

那么这一组数据可以假设有如下结构式：

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{22} + \varepsilon_1$$

$$y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \varepsilon_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{1.2.2}$$

$$y_N = \beta_0 + \beta_1 x_{N1} + \beta_2 x_{N2} + \varepsilon_N$$

其中 β_0、β_1、β_2 是三个待估计参数，x_1、x_2 是两个可精确测定或可控制的一般变量，ε_1，ε_2，……，ε_N 是 N 个相互独立且服从同一正态分布的随机变量，用矩阵表示关系式（1.2.2）可令

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_N \end{bmatrix}_{N\times 1} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{N1} & x_{N2} \end{bmatrix}_{N\times 3}$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}_{3\times 1} \qquad E = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}_{N\times 1}$$

那么（1.2.2）可以表示为

$$Y = XB + E \tag{1.2.3}$$

为了估计参数 β，与第一节一样我们仍采用最小二乘法。设 b_0、b_1、b_2 分别是参数 β_0、β_1、β_2 的最小二乘估计，则回归方程为：

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 \tag{1.2.4}$$

由最小二乘法知道，b_0、b_1、b_2 应使全部观察值 y_a 的偏差平方和 Q 达到最小，即使

$$
\begin{aligned}
Q &= \sum(y_\alpha - \hat{y}_\alpha)^2 \\
&= \sum(y_\alpha - b_0 - b_1 x_{\alpha 1} - b_2 x_{\alpha 2})^2 = \text{最小}
\end{aligned}
$$

对于给定的数据（1.2.1），Q 是 b_0、b_1、b_2 的非负二次式，所以最小值一定存在。根据微积分学中的极值原理，b_0、b_1、b_2 应是下列方程的解：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial Q}{\partial b_0} = -2\sum\limits_\alpha (y_\alpha - \hat{y}_\alpha) = 0 \\
\dfrac{\partial Q}{\partial b_j} = -2\sum\limits_\alpha (y_\alpha - \hat{y}_\alpha) x_{\alpha j} = 0 \quad j = 1,\ 2
\end{cases}
\tag{1.2.5}
$$

这一方程组可进一步简化成为

$$
\begin{cases}
N b_0 + (\sum\limits_\alpha x_{\alpha 1}) b_1 + (\sum\limits_\alpha x_{\alpha 2}) b_2 = \sum y_\alpha \\
(\sum\limits_\alpha x_{\alpha 1}) b_0 + (\sum\limits_\alpha x_{\alpha 1}^2) b_1 + (\sum\limits_\alpha x_{\alpha 1} x_{\alpha 2}) b_2 = \sum\limits_\alpha x_{\alpha 1} y_\alpha \\
(\sum\limits_\alpha x_{\alpha 2}) b_0 + (\sum\limits_\alpha x_{\alpha 2} x_{\alpha 1}) b_1 + (\sum\limits_\alpha x_{\alpha 2}^2) b_2 = \sum\limits_\alpha x_{\alpha 2} y_\alpha
\end{cases}
\tag{1.2.6}
$$

正规方程组系数矩阵是对称矩阵，若用 A 来表示它则 $A = X'\ X$

$$
A = \begin{bmatrix}
N & \sum\limits_\alpha x_{\alpha 1} & \sum x_{\alpha 2} \\
\sum\limits_\alpha x_{\alpha 1} & \sum x_{\alpha 1}^2 & \sum x_{\alpha 1} x_{\alpha 2} \\
\sum x_{\alpha 2} & \sum x_{\alpha 1} x_{\alpha 2} & \sum x_{\alpha 2}^2
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{M} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{N2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{N1} & x_{N2} \end{bmatrix} = X'X
$$

正规方程组（1.2.6）右端常数项矩阵 B 也可用矩阵 X 和 Y 表示:

$$
B=\begin{bmatrix} \sum_{a} y_{a} \\ \sum_{a} x_{a1} \quad y_{a} \\ \sum_{a} x_{a2} \quad y_{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{N1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{N2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1} \\ y_{2} \vdots \\ y_{N} \end{bmatrix}
$$

$$
= X'Y
$$

因此，就有

$$
(X'X)b = X'Y \tag{1.2.7}
$$

$$
\text{或} \quad Ab = B \tag{1.2.8}
$$

其中 $b' = (b_0、b_1、b_2)$ 是正规方程组（1.2.6）中的未知系数，在系数矩阵 $A = X'X$ 满秩的条件下（这一条件一般情况下易满足），A 的逆矩阵 A^{-1} 存在，因而

$$
b = A^{-1}B = (X'X)^{-1}X'Y \tag{1.2.9}
$$

复相关系数的估计式为:

$$
R = \sqrt{1 - \frac{R_0^2 / N}{S_{yy}^2} (1.2.10)}
$$

其中，$R_0^2 = Y'Y - b'(X'Y)$

$$
S_{yy}^2 = \frac{1}{N} \sum_{a} (y_a - \bar{y})^2
$$

线性预测误差方差

$$\sigma = \sqrt{R_\delta^2 / N} \tag{1.2.11}$$

按照矩阵乘法及求逆矩阵法则，由（1.2.9）式、（1.2.10）、（1.2.11）三个式子就可以确定出回归方程（1.2.4），并且计算出其相关系数的误差估计.

对于前面的实例，我们令 x_1 表示定期存款，x_2 表示活期存款，y 表示储蓄存款，则

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 81095 & 22012 \\ 1 & 90068 & 23627 \\ 1 & 96531 & 35017 \\ 1 & 103385 & 25659 \\ 1 & 110958 & 27129 \\ 1 & 118698 & 27070 \\ 1 & 123606 & 29179 \\ 1 & 121811 & 29903 \\ 1 & 124733 & 29734 \end{bmatrix}$$

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 81095 & 90068 & 96531 & \cdots & 123606 & 121811 & 124733 \\ 22012 & 23627 & 35017 & \cdots & 29179 & 29903 & 29734 \end{bmatrix}$$

$$A = X'X = \begin{bmatrix} 9 & 970885 & 249330 \\ 970885 & 1.067709E+11 & 2.712744E+10 \\ 249330 & 2.712744E+10 & 7.02582E+09 \end{bmatrix}$$