张鸿顺 著

错在哪里？

——初等数学错解分析

（续集）

CUO ZAI NA LI

科学技术文献出版社

错在哪里？

初等数学错解分析

（续 集）

张鸿顺 著

科学技术文献出版社

1984

内 容 简 介

本续集包括25个题目共50余个问题。大部分是高中数学总复习时所遇到的问题，而且多数是在推理论的过程中出现的错误。内容丰富，难度也较大。

本书还是采用对每个命题先给出错误的解法，再分析错误的原因，指出错误的关键，最后给出正确答案。

本书有助于读者加深对数学概念的理解，加强逻辑思维的训练，进一步掌握学习数学的方法。

读者对象是中学生、数学教师、数学爱好者、广大知识青年和青年工人。

错在哪里？

——初等数学错解分析（续集）

张鸿顺 著

科学技术文献出版社出版

中国科学技术情报研究所印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

开本：787×1092　1/32　印张：3　字数：87千字

1984年5月北京第一版第一次印刷

印数：1—115,000册

科技新书目：68—22

统一书号：13176·166　定价：0.42元

序　　言

1981年《错在哪里？——初等数学错解分析》出版以后，得到了广大读者的好评。《数学的实践与认识》杂志还刊登了书评，给予很高的评价。这些热情的支持和鼓励，促使我继续写下去，从积累的材料中又整理出50余个问题，归纳为25个题目，做为《错在哪里？》的续集，提供给读者参阅。

在这25个题目中，由于涉及高中数学总复习时所遇到的问题较多，而且多数是在推理论证过程中出现的错误，因此，内容显得更丰富一些，难度也更大一些。

希望通过这些问题的分析，将有助于读者加深对有关数学概念的理解；加强逻辑思维严密性的训练；进一步掌握学习数学的方法。

限于本人的水平，难免有不妥之处，欢迎批评指正。

作　者

1983.2.20于北京

封面设计：汪志洪

责任编辑：白树枫

目　　录

二十三、化简结果为$\sqrt{a^2-b^2}$

几个学生对下面一题的做法展开了争论。

题目 化简$a\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}-b\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}-\dfrac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

一部分学生的作法是：

$$原式=a\sqrt{\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}}-b\sqrt{\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}}-\frac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$=\frac{a(a+b)}{\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{b(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{a^2-b^2}.$$

另一部分学生说第二步错了，因为$\sqrt{(a+b)^2}=|a+b|$，因此，第二步应当是

$$原式=\frac{a|a+b|}{\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{b|a-b|}{\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}. \tag{1}$$

然后对于（1）式分四种情况，分别求出原式化简的结果，即

1．当$a+b>0$，$a-b>0$时，

$$原式=\frac{a(a+b)}{\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{b(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{a^2-b^2};$$

2．当$a+b>0$，$a-b<0$时，

$$原式=\frac{a(a+b)}{\sqrt{a^2-b^2}}+\frac{b(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$=\frac{a^2+2ab-3b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}=-\frac{a+3b}{a+b}\sqrt{a^2-b^2};$$

3．当$a+b<0$，$a-b>0$时，

$$原式=\frac{-a(a+b)}{\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{b(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$=\frac{-a^2-2ab-b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{a+b}{b-a}\sqrt{a^2-b^2};$$

4．当$a+b<0$，$a-b<0$时，

$$原式=\frac{-a(a+b)}{\sqrt{a^2-b^2}}+\frac{b(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$=\frac{-a^2-3b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{a^2+3b^2}{a^2-b^2}\sqrt{a^2-b^2}.$$

那么，他们的解法究竟哪个对？

他们的解法都不对．前者忽略了算术根必须取非负值；后者只是形式的记住了$\sqrt{a^2}=|a|$，即算术根取非负值，但是忽略了题中所给的条件，即所给的式子是有意义的，因此，他们只能形式地按四种情况进行讨论。

事实上，如果原题无意义，当然就谈不上化简，而原题有意义，必定有$a+b$与$a-b$同号的条件（因为根式化简问题是在实数范围内研究的），这样就不会出现$a+b>0$，$a-b$

<0，以及$a+b<0$，$a-b>0$的情况，也就是后一部分学生的解法中的第二、三两种情况不可能存在。因此，此题的正确解法是后者的第一、四两种情况，即

当$a+b$与$a-b$同正时，原式$=\sqrt{a^2-b^2}$；

当$a+b$与$a-b$同负时，原式$=\dfrac{a^2+3b^2}{a^2-b^2}\sqrt{a^2-b^2}$．

在解题时不要忽略题中暗含的条件，这是必须注意的。在解题的写法上可以先指明暗含的条件，如对此题来说，就是$a+b$与$a-b$同号。也可以在解题的过程中运用这些暗含的条件，如在后者的解法中，指明第二、三两种情况使原式无意义，所以这两种情况不存在，可不予考虑。

二十四、$a\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$或$a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$

关于一元二次方程的问题是极其普通的问题，但是，在解题的过程中，稍不留心，就会出现错误。如有这样一个问题：

当a为何值时，关于x的二次方程

$$(1-a^2)x^2-2x+2=0$$

有两个实根。

学生很容易地如下求解：

因为一元二次方程有两个实根的充要条件是判别式$\Delta\geqslant0$。因此，有

$$4-4\times2(1-a^2)\geqslant0.$$

即

$$a^2 \geqslant \frac{1}{2}.$$

所以 $a \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $a \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

这个答案正确吗？

我们不妨取$a=1$来检验一下，因为$1>\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以取$a=1$，满足$a\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$的条件。但是，这时原方程为$2x-2=0$，只有一个根为1，并没有两个实根，可见上边的答案有毛病。

毛病在于忽视了有两个实根这个条件里暗含着这个方程必须是二次方程。也就是说一个一元二次方程有两个实根不仅需要$\Delta\geqslant0$，而且必须二次项的系数不为零，也就是要保证它确实是一个二次方程，因此，这个题应当解

$$\begin{cases}\Delta \geqslant 0, \\ 1-a^2 \neq 0.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}a \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } a \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ a \neq \pm 1.\end{cases}$$

因此，正确的答案是

$$a \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 且 a \neq 1，或\ a \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 且 a \neq -1.$$

忽视二次项系数不为零而出现错误的现象是经常发生的，要特别予以注意。例如：

已知方程

$$2(m+1)x^2 + 4mx + 3m - 2 = 0,$$

问m为何值时有等根，有相异实根，有虚根？

由于判别式

$$\begin{aligned}\Delta &= (4m)^2 - 4 \times 2(m+1)(3m-2) \\ &= -8(m+2)(m-1).\end{aligned}$$

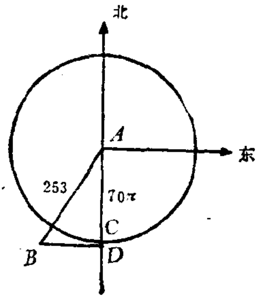
所以当$m=-2$或$m=1$时，有等根；

当$m>1$或$m<-2$时，有虚根；

当$-2<m<1$且$m \neq -1$时，有相异实根，这里切勿再丢掉$m \neq -1$的条件。

二十五、能 否 触 礁

在A岛的周围，以70π海里为半径的圆内有暗礁。轮船B在A岛的南30°西处且与A距253海里。问轮船B沿正东方向航行有无触礁危险。



有的学生的解法如下：

设B沿正东方向航行至A的正南处D。则ΔABD为直角三角形，$\angle ABD=60^\circ$，$AB=253$。于是

$$\begin{aligned}AD &= 253 \times \sin 60^\circ = 253 \times 0.87 \\ &= 220\end{aligned}$$

而$AC = 70\pi = 70 \times 3.14 = 219.8$.

可见$AD > AC$.

因此，沿正东方向航行无触礁危险。

这个结论是错误的．事实上，正相反，有触礁危险．

因为 $AD = 253 \times \sin 60^\circ$

$= 219.1$,

而 $AC = 70\pi = 219.9$.

恰恰是 $AD < AC$.

这就说明，沿正东方向航行，必驶进危险圈内，所以有触礁危险．

为什么同样的算法会得出两种截然不同的结论呢？原因在于在计算过程中取近似数时，究竟应取不足近似值，还是应取过剩近似值？

对于该取不足近似值，还是取过剩近似值的问题，往往被忽略，这是很不应该的．在现实生活中也经常遇到这样的问题，取错了近似值会造成严重的后果．如做一条裤子，师傅量得结果需要买1.13米衣料，这时绝不能取不足近似值，按四舍五入法，只买1.1米的衣料，因为1.1米做不成合身的裤子．通常情况下，为保险起见而买1.2米，这时用的不是四舍五入法而是收尾法．或者最少也应买1.15米．同样，某公路桥洞高4.9米，某汽车载货过此桥洞，货物离地面的高度不能取4.9米的过剩近似值 5 米，因为这样肯定过不去．通常情况下为保险起见取 4 米，或4.5米．这种实际的例子不胜枚举．但是在做能否触礁这类问题时，却往往忽略近似值的取法，以至造成错误．

就这个题来说，计算AD时，为保险起见，应取不足近似值。如果取不足近似值时，无触礁危险，那么眞值大于不足近似值，就肯定无触礁危险了。相反地，对于AC来说应取过剩近似值，如果取过剩近似值时还小于AD，那么AC的眞值必小于AD。

本着这样的想法，$\sin 60°$取0.86时

$$AD = 253 \times 0.86 = 217.58;$$

$\sin 60°$取0.866时，$AD = 253 \times 0.866 = 219.10$，

都小于219.8，即$AD < AC$，所以有触礁危险。

如果π取3.15，那么

$$AC = 70 \times 3.15 = 220.5,$$

则　$AD < AC$　所以有触礁危险。

在中学的课本里或者是教师留的习题中，常遇到触礁这种类型的问题，希读者注意所取的近似值。

二十六、不 大 于 3

题目　当$0 < x < \dfrac{\pi}{8}$时，$\operatorname{ctg}x - \operatorname{ctg}8x$是否大于3。

一部分学生采用反证法来判断，即证$\operatorname{ctg}x - \operatorname{ctg}8x > 3$是错误的，从而肯定$\operatorname{ctg}x - \operatorname{ctg}8x$不大于3。他们的证法如下：

设　$\operatorname{ctg}x - \operatorname{ctg}8x > 3$，

则有

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 8x}{\sin 8x} > 3.$$

因为 $0<x<\frac{\pi}{8}$，所以$0<8x<\pi$，于是$\sin x>0$，$\sin 8x>0$。用$\sin x\ \sin 8x$乘不等式两边，得

$$\sin 8x\cos x-\sin x\cos 8x>3\sin x\sin 8x.$$

左边符合两角差的正弦公式，右边用积化和差，得

$$\sin 7x>\frac{3}{2}(\cos 7x-\cos 9x),$$

即

$$3\cos 9x>3\cos 7x-2\sin 7x. \qquad (1)$$

而

$$3\cos 7x-2\sin 7x=\sqrt{3^2+2^2}\ \sin(\varphi-7x)\leqslant\sqrt{13},$$

因此 $3\cos 7x-2\sin 7x$的最大值为$\sqrt{13}$。

如果（1）式成立，必存在x的值，使得$3\cos 9x>\sqrt{13}$但$3\cos 9x$最大值为3，而$3<\sqrt{13}$，所以$3\cos 9x\ngtr\sqrt{13}$。

因此（1）式不成立，即原不等式不成立，所以

$$\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}8x\ngtr 3.$$

这个结论是错误的。

当（1）式的右边化为$\sqrt{13}\sin(\varphi-7x)$时，

$$\sin\varphi=\frac{3}{\sqrt{13}},\ \cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{13}},\ \varphi\text{取锐角。}$$

即

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{3}{2}.$$

那么 $\sin(\varphi-7x)$ 的最大值能达到 1 吗？如果不是 1，$\sqrt{13}\sin(\varphi-7x)$ 的最大值就不是$\sqrt{13}$，从而前边论断的立据就错了。

事实上，由$\varphi=\mathrm{arctg}\,\frac{3}{2}$，而 $\mathrm{arctg}\,\frac{3}{2}>\mathrm{arctg}1=\frac{\pi}{4}$。可知

$$\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{2}.$$

又，已知

$$0<x<\frac{\pi}{8},$$

所以

$$0<7x<\frac{7\pi}{8}.$$

即

$$0>-7x>-\frac{7\pi}{8}.$$

于是

$$\frac{\pi}{4}-\frac{7x}{8}<\varphi-7x<\frac{\pi}{2}.$$

更确切一些，因为

$$\varphi - 7x < \varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{2},$$

所以

$$-\frac{5\pi}{8} < \varphi - 7x < \operatorname{arctg}\frac{3}{2}.$$

因此，

$$\sin(\varphi - 7x) < \sin\operatorname{arctg}\frac{3}{2} = \sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

这就是说$\sin(\varphi - 7x)$的最大值应小于$\frac{3}{\sqrt{13}}$，从而$\sqrt{13}\sin(\varphi - 7x)$的最大值应小于$\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\sqrt{13}$（即3）。

于是（1）式的两端的最大值分别为3或小于3．但是，这并不能判断（1）式是否成立。因此需改变方法，另行证明，证法如下：

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ctg}x - \operatorname{ctg}8x \\
&= \operatorname{ctg}x - \operatorname{ctg}2x + \operatorname{ctg}2x - \operatorname{ctg}4x + \operatorname{ctg}4x - \operatorname{ctg}8x \\
&= \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right) + \left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\cos 4x}{\sin 4x}\right) + \\
&+ \left(\frac{\cos 4x}{\sin 4x} - \frac{\cos 8x}{\sin 8x}\right) \\
&= \frac{\sin(2x - x)}{\sin x \sin 2x} + \frac{\sin(4x - 2x)}{\sin 2x \sin 4x} + \frac{\sin(8x - 4x)}{\sin 4x \sin 8x}
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\frac{1}{\sin 8x}.$$

因为$0<x<\frac{\pi}{8}$，所以$\sin 2x$，$\sin 4x$，$\sin 8x$都是小于1的正数，从而可知

$$\frac{1}{\sin 2x}>1,\quad \frac{1}{\sin 4x}>1,\quad \frac{1}{\sin 8x}>1.$$

因此

$$\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}8x>1+1+1=3.$$

即当

$$0<x<\frac{\pi}{8}\text{时，}\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}8x>3.$$

二十七、截面能是直角三角形吗?

研究用一个平面去截立方体所得的截面可能得到什么样的图形，对于巩固平面的基本性质以及直线与平面的位置关系的知识是很有好处的．但是学生往往认为只能有三角形、四边形的截面，而作不出五边形与六边形的截面；在三角形的截面中又认为各种三角形的截面都存在；在四边形的截面中又认为不存在不等腰的梯形截面．

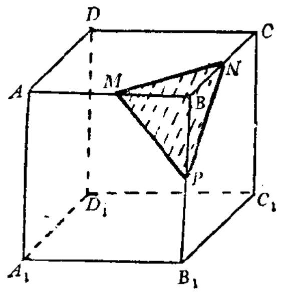


图 1

针对这些问题，逐一研究．