研究生入学统考

高等数学复习指导教程

白富多　万大成　编

哈尔滨工业大学出版社

研究生入学统考

高等数学复习指导教程

白富多　万大成　编

哈尔滨工业大学出版社

研究生入学统考

高等数学复习指导教程

Yanjiusheng Ruxue Tongkao

Gaodengshuxue Fuxi Zhidao Jiaocheng

白富多　万大成　编

哈尔滨工业大学出版社出版

新华书店首都发行所发行

东北农业大学印刷厂印刷

开本 787×1092　1/16　　印张 14.25　字数 329 千字

1995年 6 月第 1 版　　1995 年 6 月第 1 次印刷

印数 1－5 000

ISBN 7-5063-1084-2/O·71　　定价 13.80 元

前　言

本书是根据我们多年从事高等数学教学及对报考硕士研究生的考生进行辅导的教学实践与经验，为帮助报考硕士研究生的考生复习好高等数学而编写的指导书。从1993年3月到现在，作为校内教材试用了两年，受到了考生的好评，收到了满意的效果。这一次是在原来的基础上，根据两年多来“考研辅导”的教学实践，又进行了重新修改，增加了典型例题，使内容更加充实。

本书共分十个单元。突出了“三基内容”，加深了对基本概念与基本理论的理解；对基本方法进行了归纳，做到条理化、系统化、规范化。并根据《高等数学课程教学基本要求》和硕士生入学考试《数学参考大纲》，结合对硕士生入学考试的“数学试题”多年跟踪和认真分析，选编了具有典型性和针对性例题，进行了分析、解答，突出了解题的基本思路和基本技巧。全书共选编了794个题目，类型全，综合性强，无论其广度与深度均达到了数学统考的应试水平。

本书不但是准备攻读硕士研究生的考生复习数学的得力工具，而且对各类高校的大学生，深入学习和掌握高等数学的基本内容，提高解数学题目的能力，都会有很大的帮助。对从事高等数学教学的教师也是一本很好的参考书。

本书从编写到定稿，一直得到杨克劭教授的具体指导，并认真地审阅了全书。借此机会谨向他表示真挚的谢意。

由于我们水平所限，书中难免有不当之处，请批评指正。

编　者

1995年2月于

哈尔滨工业大学

目　录

第一单元　函　数

函数是高等数学的研究对象。这里所涉及的一些问题都是常识性的基本知识。考虑到共性及篇幅，将多元函数的有关部分也一并放在此处。主要分求函数定义域、函数的性质和函数符号的使用等三部分加以介绍。

一　求函数的定义域

函数的定义域分自然定义域与实际定义域，前者是对撇弃实际意义的、纯数量间的函数关系而言，此时只需注意数学运算的要求，如：分母不能为零；负数不能开方（高等数学只在实数域上讨论问题）；正数才能取对数等。如果函数表达式由几项组成，则其定义域应是各项自变量取值的集合的交集（公共部分）。后者是对具有实际意义的几何意义或物理意义的函数关系而言，此时除要考虑上述数学运算的要求外，还必须考虑实际意义的要求。例如，边长为 a 的正方形铁片，在四个角上各剪去边长为 x 的小正方形后做一个无盖的盒子，则其容积 V 与小正方形边长 x 的函数关系为：

$$V=x(a-2x)^2$$

如果只从数学运算考虑，x 可取任何实数，但考虑到问题的几何意义，其定义域只能是开区间 $(0,\ \frac{a}{2})$。

设函数 $y=f(u)$，$u\in D_1$；$u=\varphi(x)$，$x\in D$，且记 $u=\varphi(x)$ 的值域为 D_2，$D_2=\{u|\ u=\varphi(x)\ x\in D\}$，则这两个函数能够复合必须具备的条件是：$D_1\cap D_2\neq\Phi$。而复合函数

$$y=f[\varphi(x)]$$

的定义域是取得函数值 $\varphi(x)=u\in D_1\cap D_2$ 的 D 中所有 x 值，记作 D_0，$D_0=\{x|\ x\in D$，且 $\varphi(x)\in D_1\}\neq\Phi$。

例 1　已知 $f(x)$ 的定义域是 $[0,\ 1]$，求 $g(x)=f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域，其中 $a>0$。

解　欲求 $g(x)$ 的定义域，只需解不等式组

$$\begin{cases} 0\leqslant x+a\leqslant 1 \\ 0\leqslant x-a\leqslant 1 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} -a\leqslant x\leqslant 1-a \\ a\leqslant x\leqslant 1+a \end{cases}$$

可见 x 应该取在 $a\leqslant x\leqslant 1-a$，而且 a 应满足 $a\leqslant 1-a$，于是得

当 $0\leqslant a\leqslant \frac{1}{2}$ 时，所求定义域为 $[a,\ 1-a]$；

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，所求定义域为空集。

例 2　设 $y=\ln|u|$，$(u\neq 0)$，$u=x^2-2$ $(|x|>1)$，求 y 作为 x 的复合函数。

解　首先，函数 $u=x^2-2$ 的值域为 $u>-1$，它与函数 $y=\ln|u|$ 定义域的公共部分为 $u>0$ 和 $-1<u<0$。于是，两个函数可以复合。

确定复合函数的定义域。由 $u=x^2-2$ $(|x|>1)$ 可知，当 $u>0$ 时，$|x|>\sqrt{2}$；当 $-1<u<0$ 时，$1<|x|<\sqrt{2}$。

从而得到复合函数

$$y=\ln|x^2-2|\,,\qquad (|x|>2,\ 或\ 1<|x|<\sqrt{2}\,)$$

由此可见，确定复合函数关键是确定定义域，对此又必须先确定中间变量的变化范围，所以关键的关键是中间变量的取值。

例 3 已知 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，求 $f\{f[f(x)]\}$ 的定义域。

解 由 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$f[f(x)]=\dfrac{1}{1+f(x)}$，$f\{f[f(x)]\}=\dfrac{1}{1+f[f(x)]}$

知

$$\begin{cases} x\neq -1 \\ f(x)\neq -1 \\ f[f(x)]\neq -1 \end{cases} \qquad 即 \qquad \begin{cases} x\neq -1 \\ \dfrac{1}{1+x}\neq -1 \\ \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}\neq -1 \end{cases}$$

解得 $x\neq -1,\ x\neq -2,\ x\neq -3/2$。

故其定义域为

$$(-\infty,\ -2)\cup\left(-2,\ -\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2},-1\right)\cup(-1,\ +\infty)$$

若只从 $f\{f[f(x)]\}=\dfrac{2+x}{3+2x}$，判定其定义域为 $\left(-\infty,\ -\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{3}{2},\ +\infty\right)$ 是错误的，它忽略了在复合过程中 x 不能取的值 -1 与 -2。

例 4 求由参数方程

$$\begin{cases} x=t^2-2t-3 \\ y=\dfrac{1}{t} \end{cases} \qquad t\leqslant 1,\ t\neq 0$$

所确定的函数 $y=f(x)$ 的定义域。

解 由

$$x=t^2-2t-3=(t-1)^2-4 \qquad (t\leqslant 1,\ t\neq 0)$$

知

$$x\geqslant -4$$

$$x\neq (0-1)^2-4=3$$

故所求的定义域为 $[-4,\ -3)\cup(-3,\ +\infty)$。

例 5 求二元函数 $Z=\ln[x\ \ln(y-x)]$ 的定义域。

解 显然应有 $x\ \ln(y-x)>0$

若

$$\begin{cases} x>0 \\ \ln(y-x)>0 \end{cases} \qquad 即 \qquad \begin{cases} x>0 \\ y>x+1 \end{cases} \tag{1}$$

若

$$\begin{cases} x<0 \\ \ln(y-x)<0 \end{cases} \qquad 即 \qquad \begin{cases} x<0 \\ x<y<x+1 \end{cases} \tag{2}$$

故该函数定义域为由 (1)，(2) 所确定的区域。

例 6 求由

$$\begin{cases} x=u+v \\ y=u^2+v^2 \\ z=u^3+v^3 \end{cases}$$

所确定的函数 $Z=f(x,\ y)$ 的定义域。

解 由 $2y-x^2=(u-v)^2\geqslant 0$ 知，定义域为 xy 平面上由 $y\geqslant \dfrac{x^2}{2}$ 所确定的区域。

注：若由

$$Z=u^3+v^3=(u+v)(u^2-uv+v^2)=\frac{3xy-x^3}{2}$$

得出函数的定义域是整个 xy 平面，错在哪里？

例 7 求函数

$$y=f(x)=\frac{1-\sqrt{1-2x}}{1+\sqrt{1-2x}}\qquad \left(x\leqslant \frac{1}{2}\right)$$ 的反函数及其定义域。

解 由 $y=\dfrac{1-\sqrt{1-2x}}{1+\sqrt{1-2x}}=\dfrac{2}{1+\sqrt{1-2x}}-1$，解得 $\sqrt{1-2x}=1-\dfrac{1-y}{1+y}$

$\Rightarrow x=\dfrac{2y}{(1+y)^2}$. 故

$$y=\varphi(x)=\frac{2x}{(1+x)^2}\qquad (x\neq -1)$$

由于反函数的定义域，正是直接函数 $f(x)$ 的值域，为此

$$f'(x)=\left[\frac{1-\sqrt{1-2x}}{1+\sqrt{1-2x}}\right]'=\frac{2}{\sqrt{1-2x}\ (1+\sqrt{1-2x}\ )^2}>0\qquad \left(x<\frac{1}{2}\right)$$

$\therefore\ f(x)\nearrow\left(x<\dfrac{1}{2}\right)$, 而 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$. 又

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt{1-2x}}{1+\sqrt{1-2x}}=-1$$

故 $f(x)$ 的值域为 $(-1,\ 1]$，此即反函数 $y=\varphi(x)$ 的定义域。

二 函数的性质

函数的性质包括有界性、单调性、奇偶性和周期性。有界性：若存在常数 $M>0$，使得

$$|f(x)|\leqslant M\qquad\qquad \forall\ x\in I$$

则称 $y=f(x)$ 在 I 上是有界的。

单调性：若

$$f(x_1)<f(x_2)\qquad\qquad \forall\ x_1,\ x_2\in I\qquad x_1<x_2$$

则称 $y=f(x)$ 在 I 上是单调增加的；若

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \forall\, x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2$$

则称 $y=f(x)$ 在 I 上是单调减少的。

单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数。

奇偶性：设集合 I 关于原点对称，若

$$-f(x) = f(-x) \qquad \forall\, x \in I$$

则称 $y=f(x)$ 为 I 上的奇函数；若

$$f(x) = f(-x) \qquad \forall\, x \in I$$

则称 $y=f(x)$ 为 I 上的偶函数。

周期性：若存在常数 T，使得

$$f(x) = f(x+T) \qquad \forall\, x \in I$$

则称 $y=f(x)$ 为 I 上的周期函数，$T>0$ 时的最小值若存在，称此值为 $y=f(x)$ 的最小正周期。例如 $y=\sin x$ 的最小正周期为 2π，$y=\operatorname{tg} x$ 的最小正周期为 π。

例 8 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 是有理数时} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 是无理数时} \end{cases}$$

是有界的偶函数，它是周期函数，但是没有最小正周期，它不仅不是单调函数，而且没有单调区间。

例 9 设 I 是关于原点对称的数集，

$$y=f(x) \qquad x \in I$$

既非奇函数也非偶函数，但它一定可以表示为一个奇函数与一个偶函数之和，即

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

其中 $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ 为 I 上的偶函数，$\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 为 I 上的奇函数，而且这种表示式是唯一的（证略）。

例 10 若 $y=f(x)$ $x\in(-\infty, +\infty)$ 的图形关于直线 $x=a$ 与 $x=b$ $(a<b)$ 均对称，求证：$y=f(x)$ 是周期函数。

证 由假设 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $x=a$ 与 $x=b$ 对称，即

$$f(a+x) = f(a-x)$$
$$f(b+x) = f(b-x)$$

成立，于是

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a-(a-x)) = f(a+(a-x)) = f(2a-x) \\ &= f(b-(b+x-2a)) = f(b+(b+x-2a)) \\ &= f(x+2(b-a)) \end{aligned}$$

故 $y=f(x)$ 是周期函数。

例 11 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是奇函数，$f(1)=a$，且对于任何 x 值均有

$$f(x+2) = f(x) + f(2) \tag{3}$$

① 试用 a 表示 $f(2)$ 与 $f(5)$；

② 问 a 取什么值时，$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数。

解 ① 在 (3) 式中令 $x=-1$ 得

$$f(1)=f(-1)+f(2)$$

又由于 $f(x)$ 是奇函数，$f(-1)=-f(1)$，所以 $f(2)=2f(1)=2a$，又在 (3) 中令 $x=1$ 得

$$f(3)=f(1)+f(2)=3a$$

最后，在 (3) 中令 $x=3$ 得

$$f(5)=f(3)+f(2)=5a$$

② 由①知，当且仅当 $a=0$ 时，$f(2)=0$，此时由 (3) 式得

$$f(x+2)=f(x)$$

故 $a=0$ 时 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数。

例 12 设 $y=f(x)$ 是定义在与原点对称的某集合上，且

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=cx \tag{4}$$

其中 a, b, c 均为常数，且 $|a|\neq|b|$，求证：$f(x)$ 是奇函数。

证 在 (4) 中将 x 换为 $\frac{1}{x}$ 得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=\frac{c}{x} \tag{5}$$

(4) 式两端乘以 a 减去 (5) 式两端乘以 b，得

$$(a^2-b^2)f(x)=acx-\frac{bc}{x}$$

由于 $|a|\neq|b|$，故

$$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(ax-\frac{b}{x}\right)$$

可见 $f(x)$ 是奇函数。

三　函数符号的使用

这里主要是函数的复合。

例 13 已知

$$f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{x^3-x}{x^4+1}\quad(x\neq0)$$

求 $f(x)$。

解 视 $x-\frac{1}{x}$ 为中间变量，将右端变形，

$$f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{x^3-x}{x^4+1}=\frac{x-\frac{1}{x}}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\frac{x-\frac{1}{x}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$$

故 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2}$。

例 14 已知

$$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x$$

求 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$。

解 关键在于通过变形，进行转化。

方法 Ⅰ 由于

$$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}=2\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)$$

所以

$$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)=1-\cos x$$

方法 Ⅱ 由于

$$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right]=f\left(\sin\frac{\pi-x}{2}\right)=1+\cos(\pi-x)=1-\cos x$$

例 15 已知

$$f(x+y,\ \frac{y}{x})=x^2-y^2$$

求 $f(x,\ y)$。

解 令

$$\begin{cases} x+y=u \\ \dfrac{y}{x}=v \end{cases}$$

解得 $x=\dfrac{u}{1+v}$，$y=\dfrac{uv}{1+v}$，得

$$f(u,\ v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2$$

$$=u^2\frac{1-v}{1+v}$$

故 $f(x,\ y)=x^2\dfrac{1-y}{1+y}$ 。

例 16 若 $Z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$，并且已知 $Z|_{y=1}=x$，试求 $f(x)$ 及 Z 的表达式。

解 由已知条件得

$$x=1+f(\sqrt[3]{x}-1)$$

令 $\sqrt[3]{x}-1=t$， 则 $x=(1+t)^3$

$$f(t)=(1+t)^3-1=3t+3t^2+t^3$$

于是 $f(x)=x^3+3x^2+3x$。 故

$$f(\sqrt[3]{x}-1)=(\sqrt[3]{x}-1)^3+3(\sqrt[3]{x}-1)^2+3(\sqrt[3]{x}-1)$$

$$=(\sqrt[3]{x}-1)[(\sqrt[3]{x}-1)^2+3(\sqrt[3]{x}-1)+3]$$

$$=(\sqrt[3]{x}-1)[(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1]$$

$$=x-1$$

所以

$$Z=\sqrt{y}+x-1$$

例 17 设

$$\varphi(x)=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ 1, & x\geqslant 0 \end{cases},\qquad \psi(x)=\begin{cases} \sin x, & x\geqslant 1 \\ 0, & x<1 \end{cases}$$

求 $\psi[\varphi(x)]$

解 显然

$$\psi[\varphi(x)]=\begin{cases} \sin\varphi(x) & \varphi(x)\geqslant 1 \\ 0 & \varphi(x)<1 \end{cases}$$

由 $\varphi(x)\geqslant 1$，可知 $x\geqslant 0$ 或 $x\leqslant -1$，又由 $\varphi(x)<1$，可知 $-1<x<0$。
于是最后得

$$\psi[\varphi(x)]=\begin{cases} \sin x^2 & x\leqslant -1 \\ 0 & -1<x<0 \\ \sin 1 & x\geqslant 0 \end{cases}$$

第二单元　极限与连续

极限理论是高等数学的理论基础，在高等数学中连续、导数、微分、定积分、级数的敛散性等都是以极限的形式出现，另一方面，极限运算规则又是微积分运算规则的依据，可见极限理论的重要性。

连续函数是原函数存在和定积分存在的充分条件，另一方面，可导函数一定连续，可见在高等数学中连续函数类是十分重要的函数类。

由上述可见，本单元是学好高等数学的基础，准备研究生入学考试时，不能因为试题中本单元内容所占比例不大而有所忽视，事实上，其它单元的试题的求解，均与本单元内容有直接或间接的关系，这也从另一侧面表明它是“基础”的标志。

本单元将分为基本概念与基本性质；极限的计算方法（包括洛必达法则等）和往届试题等三方面加以介绍，其中也包括多元函数的有关部分的内容。

一　基本概念与基本性质

1. 极限的概念及其三个等价命题

定义　若对任给 的 $\varepsilon>0$，存在某个时刻，在这个时刻之后，恒有

$$|u-a|<\varepsilon \tag{1}$$

则称常数 a 为变量 u 的极限。

由于 $\varepsilon>0$ 是任给的，当然可以给的任意的小，变量 u 接近常量 a 的程度比 ε 还要小，而极限又是变量变化趋势的一种描述，变量 u 以常量 a 为极限，并不要求 u “始终”“徘徊”在 a 的周围，而只须在“某个时刻之后”(1) 式成立即可，而这个“时刻”又与 $\varepsilon>0$ 的大小有关。

把极限不存在只理解为极限为无穷大是不全面的，无确定趋向的变量极限也不存在，对极限不存在的片面理解，将给某些题的求解在理解上带来困难。

为了适应不同情况的需要，将极限的定义改为与之等价的其它形式是极为有用的。

现就以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 极限过程为例。

等价命题一：$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-A]=0$

例 1　求证：$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$

证：令 $\sqrt[n]{n}=1+\alpha_n$，显然 $\alpha_n>0$，于是由等价命题一、只需证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$。事实上，由于

$$\begin{aligned}n=(1+\alpha_n)^n&=1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2+\cdots+\alpha_n^n\\&>1+\frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2\end{aligned}$$

得

$$0<\alpha_n<\sqrt{\frac{2}{n}}$$

由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$，证毕。

等价命题二：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 均存在，且相等。

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$。

解 当 $x\to 0-$ 时，$\dfrac{1}{x}\to-\infty$，故

$$\lim_{x\to 0-}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$$

当 $x\to 0+$ 时，$\dfrac{1}{x}\to+\infty$，故

$$\lim_{x\to 0+}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$

由于左、右极限虽然均存在，但不相等，因此所求极限不存在。

等价命题三：对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(x_0,\varepsilon)>0$，当 x'，$x''\in O(x_0,\delta)-\{x_0\}$ 时，恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

其中 $\delta=\delta(x_0,\varepsilon)$ 表示 δ 与 x_0 及 ε 均有关，$O(x_0,\delta)$ 表示点 x_0 的 δ 邻域。

例 3 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在。

证 取 $x'=\dfrac{1}{\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi}$，$x''=\dfrac{1}{\left(2n-\dfrac{1}{2}\right)\pi}$，当 n 充分大时，$|x'-x''|$ 可以充分小，

但 $\left|\sin\dfrac{1}{x'}-\sin\dfrac{1}{x''}\right|=|1-(-1)|=2$，由此可知 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 是不存在的。

2. 极限的四个重要性质

唯一性：如果某变量的极限存在，则其极限值必唯一。

这个性质是极限计算所依据的基础，如果用不同的方法求同一个极限，得到了两个不同的极限值，可以断定其中至少有一个求法是错误的。

有界性：如果某变量的极限存在，则在“某个时刻之后”，此变量是有界的。

这个性质对收敛的数列而言，可导得整个数列有界，而对 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则函数 $y=f(x)$ 只能在点 x_0 的某个空心邻域上有界；对于 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=B$，则 $y=f(x)$ 只能在 $|x|$ 充分大时有界。这个性质反映了有极限的函数的一种特有的性质，在乘积和商的极限运算法则的证明中，都要用到这个性质。

保序性：若 $f(x)>g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{n\to x_0}g(x)=B$，则 $A\geqslant B$。

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且 $A>B$，则在点 x_0 的某个空心邻域内，有 $f(x)>g(x)$。

若 A 或 B 为零，则保序性成为保号性。

例如在罗尔定理的证明中就应用了保号性。

子数列：设$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的任意子数列。则有如下结论。

(1) 数列$\{x_n\}$收敛于a的充要条件是它的所有子数列$\{x_{n_k}\}$均收敛于a;

(2) 一个子数列发散，或者有两个子数列收敛于不同的极限值，均可断定原数列是发散的;

(3) 可以证明：数列的奇数子列$\{x_{2k-1}\}$和偶数子列$\{x_{2k}\}$均收敛于同一常数a时，则$\{x_n\}$也收敛于a。

3. 无穷小及其阶

定义 若$\lim f(x)=0$，则称$f(x)$为该过程中的无穷小。

关于无穷小，有下述两个重要性质：

(1) 有界函数与无穷小的乘积是无穷小；

(2) $\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中$\lim\alpha=0$。

若α及β都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小，而$\lim \dfrac{\beta}{\alpha}$也是在这个变化过程中有极限，则

定义：

如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=0$，就说$\beta$是比$\alpha$是高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，就说$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小，记作 $\beta=O(\alpha)$；

如果存在$k>0$，使$\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k}=c$ ($c\neq 0$，$c\neq\infty$) 则称β是α的k无阶无穷小；

如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称$\beta$与$\alpha$为等阶无穷小，记作 $\beta\sim\alpha$。

关于等价无穷小，有下述两个重要性质：

(1) 若$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且$\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在，则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha}=\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

(2) $\alpha\sim\beta \Rightarrow \beta=\alpha+o(\alpha)$ (或$\beta=\alpha+o(\beta)$)。

此时也称α为β的主要部分，简称主部。称$o(\beta)$为β的次要部分。

例4 当$x\to 0^+$时，下列函数各是x的几阶无穷小？其形如cx^n的主部是什么？

(1) $y=x^3+100x^2$

(2) $y=\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}$

(3) $y=\operatorname{tg}x-\sin x$

解 对于 (1) 因为

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3+100x^2}{x^2}=100$$

所以 $y=x^3+100x^2$是$x\to 0^+$的二阶无穷小，其主部为$100x^2$。

对于 (2) 由

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}}{x^k}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{x^2+x^{1/3}}{x^{2k}}}$$

可见，取$k=\dfrac{1}{6}$，则上式$=1$，于是得知$y=\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}$的阶数为$\dfrac{1}{6}$，主部是$x^{1/6}$。

对于 (3)，由

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^k}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^k}\frac{(1-\cos x)}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^{k-1}}\frac{1}{\cos x}$$

易知，当 $k=3$ 时，上式极限为 $\frac{1}{2}$，于是知 $y=\operatorname{tg}x-\sin x$ 为 x 的三阶无穷小，其主部是 $\frac{1}{2}x^3$。

例 5　当 $x\to 1$ 时，$f(x)=\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$ 与 $g(x)=1-x$ 都是无穷小，问 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的几阶无穷小?

解　由 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{g^k(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{(1-x)^k}\xlongequal{1-\sqrt{x}=t^3}\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{(2t^3-t^6)^k}$

可见，若取 $k=\frac{1}{3}$，则上式 $=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$，故知 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 $\frac{1}{3}$ 阶无穷小。

4. 函数在一点连续的三种定义形式

定义　若对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。

这种形式的定义，便于与函数的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 对比 ($0<|x-x_0|<\delta$ 改为了 $|x-x_0|<\delta$，A 改为了 $f(x_0)$)。

等价命题一：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$

这种形式表明可以利用函数的连续性计算极限。

等价命题二：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，其中 $\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=f(x)-f(x_0)$。

这种形式宜于用来证明函数的连续性。

例 6　若函数 $f(x)$ 对一切正实数 x_1，x_2 恒有

$$f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$$

且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续。

证　由假设 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续知

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(1+\Delta x)-f(1)]=0$$

又

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(1+\Delta x)-f(1)]=\lim_{\Delta x\to 0}[f(1\cdot(1+\Delta x))-f(1)]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[f(1)+f(1+\Delta x)-f(1)]=\lim_{\Delta x\to 0}f(1+\Delta x)=0$$

对任意 $x>0$ 有

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f\left(x(1+\frac{\Delta x}{x})\right)-f(x)\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x)+f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-f(x)\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=0$$