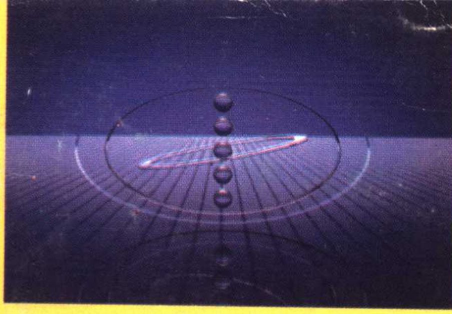
选修课程教材



朱匀华　周健伟

数学分析选讲

广东科技出版社

选修课程教材

数学分析选讲

朱匀华　周健伟

广东科技出版社

图书在版编目（CIP）数据

数据分析选讲/朱匀华等编。-
州：广东科技出版社，1995.12.
ISBN 7-5359-1658-9
Ⅰ.数
Ⅱ.朱
Ⅲ.数学分析
Ⅳ.O.17

出版发行：广东科技出版社
（广州市环市东路水荫路11号　邮码.510075）
经　　销：广东省新华书店
排　　版：广州市科新电脑技术服务中心
印　　刷：广东佛陶印刷厂
规　　格：850×1168　1/32　印张8　字数200千
版　　次：1995年12月第1版
1995年12月第1次印刷
印　　数：0001-1000
ISBN 7-5359-1658-9
分 类 号：O.75
定　　价：10元
新书信息电话：16826202

如发现因印装质量问题影响阅读，请与承印厂联系调换。

内容简介

本书介绍了数学分析中的九个专题，内容包括：数 e 的存在性、无理性与超越性，上极限与下极限，一元与多元连续函数的等价定义及性质，凸集与凸函数，黎曼－斯蒂阶斯积分，外微分等。这些专题内容或者背景与思想高于一般教材的内容，或者对一般教材中比较薄弱的内容进行扩充与加深，或者提供了数学分析中解决某些问题的新证明或新方法。

本书以数学分析课程的一般数学基础为起点，既帮助读者巩固数学分析课的学习内容，又能使读者有所提高，得到新的收获。本书可作为高等院校开设《数学分析选讲》课的教材，也可作为综合性大学、理工科大学与师范院校中数学系、应用数学系、计算机系、力学系学生的学习参考书，以及高等院校数学教师的教学参考书。

序　　言

《数学分析》是高等院校数学类各专业的一门主干基础课。这门课程不仅对许多后继课程的学习有直接影响，而且对学生基本功的训练与良好素质的培养，起着十分重要的作用。为了加强数学分析方面的训练，更好地培养学生的能力，中山大学数学系从 1993 年起为本科生二年级开设了一门选修课程《数学分析选讲》，作为《数学分析》课程的一个组成部分。为了这门课程的需要，我们在总结两年教学实践的基础上，编写了本书，作为这门课程的教材。

本书编写的指导思想是：以数学分析课程的一般数学基础为起点，既帮助学生巩固数学分析课的学习内容，又能使学生有所提高，得到新的收获。为此，我们首先编写了一些背景与思想高于一般数学分析教材的内容。例如，一元与多元连续函数的等价定义及性质，黎曼－斯蒂阶斯积分，级数的广义求和法，外微分与斯托克斯公式等。其次，我们对一般数学分析教材中比较薄弱的内容进行扩充与加深。例如，编写了上极限与下极限，上、下半连续性，绝对连续性，等度连续性，凸集与凸函数等。再次，我们编写了数学分析中解决某些问题的新证明或新方法。例如，数 e 存在性的多种证法，积分学中一类公式的证明，交错级数收敛性的一种判别法等，这些新证明或新方法是我们在教学实践中的一些体会。我们希望本书对学有余力的学生，特别是优秀学生，能在开阔视野、启发思路、拓宽基础方面有所帮助，在分析问题与解决问题的能力方面有所提高。

本书虽然是作为《数学分析选讲》课的教材而编写的，但在

编写时也考虑到更多读者的需要。全书的九个专题，能联系数学分析课程中极限论、级数论、一元微积分与多元微积分的主要内容。各专题的内容又是相对独立的。读者既可以系统地学习本书，也可以按需要选择阅读某些专题。本书适合于综合性大学、理工科大学和师范院校数学系、应用数学系、力学系、计算机系的学生作为学习参考书，也适合于高等院校数学教师作为教学参考书。

本书第一、二、四、六、七、九讲，是由朱匀华副教授执笔的；第三、五、八讲是由周健伟教授执笔的。

本书的编写得到中山大学数学系系主任邓东皋教授的关心、支持与指导，在此特表示衷心的感谢。广东科技出版社的郑丽华，对本书的出版给予热情的支持，并付出辛勤的劳动，在此也表示深切的谢意。

由于我们的水平有限，编写时间比较匆促，本书难免会有不少缺点和错误，恳请同行专家和读者批评与指正。

朱匀华　周健伟
1995 年 8 月于康乐园

目　　录

第一讲　数 e 的存在性、无理性与超越性

数列

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

的极限就是无理数 e，它取到前 15 位小数时为

$$e = 2.718281828459045\cdots\cdots$$

1748 年数学家欧拉（L. Euler）的划时代的代表作《无穷小分析引论》在瑞士洛桑出版，这是世界上第一本有完整系统的分析引论. 在这本著作里，欧拉对无理数 2.71828…作了详尽的论述，并引用了记号 e. 从此以后，在数学书中，就沿用了欧拉的这一记号.

数 e 是自然对数的底，在数学和自然科学中，它是一个重要的常数，有着非常广泛的应用. 在这一讲我们向读者介绍反映数 e 本质的几个性质，首先给出数 e 存在性的多种证法，然后证明数 e 是无理数和超越数.

一、数 e 存在性的多种证法

近年来，国内外都有不少人热心寻求数列 $\{a_n\}$ 有极限存在的各种证明. 关于这个极限存在性的证明，传统上是归结为证明数列 $\{a_n\}$ 单调递增且有上界. 在一般的数学分析和高等数学教科书中，大多采用较冗繁的二项式定理的经典证法，并能证

得数列 $\{a_n\}$ 有上界 3. 此外，出现了一些不同的证法，但某些证法还不够简便，且关于有界性的结果也不够强. 这一节我们介绍几种比较简单的证法，其中关于有界性的证明得到了较强结果. 又在所有证法中，包含一个采用确界原理的新方法.

1.1 运用平均值不等式的证明

这里介绍的证明方法利用熟知的平均值不等式

$$\sqrt[n]{c_1c_2\cdots c_n}\leqslant\frac{1}{n}(c_1+c_2+\cdots+c_n),$$

其中 c_1，c_2，…，c_n 是正数. 因为当正数不全相等时，其几何平均值小于算术平均值，所以对任何自然数 n，都有

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1}<\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1},$$

从而

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=a_{n+1},$$

因此数列 $\{a_n\}$ 严格递增. 又因对任何自然数 n，都有

$$\sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}<\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+2\cdot\frac{1}{2}}{n+2}=\frac{n+2}{n+2}=1,$$

所以 $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2<1^{n+2}=1,$$

从而 $$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4. \tag{1.1}$$

这就表明数列 $\{a_n\}$ 单调递增且有上界. 证毕.

由上面证明数列 $\{a_n\}$ 有界的思想，能导出较强的结果.

任意取定一个正整数 k，则对任何自然数 n，都有

$$\sqrt[n+k+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}}$$

$$<\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+(k+1)\cdot\frac{k}{k+1}}{n+k+1}=1,$$

从而 $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}<1,$$

所以 $$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}. \qquad (1.2)$$

这就表明，对任何一个取定的正整数 k，数 $\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}$都是数列 $\{a_n\}$ 的上界. 例如，

取 $k=1$，则有

$$a_n<\left(\frac{2}{1}\right)^{2}=4;$$

取 $k=2$，则有

$$a_n<\left(\frac{3}{2}\right)^{3}=3.375;$$

取 $k=5$，则有

$$a_n<\left(\frac{6}{5}\right)^{6}=2.985984.$$

因此（1.1）只是一般结果（1.2）的特殊情况，利用一般结果，有助于估计数 e 的范围.

1.2 使用伯努利不等式的证法

这里介绍的证明方法利用伯努利（Bernoulli）不等式

$$(1+x)^{n}>1+nx, \qquad (1.3)$$

其中 $x>-1$，$x\neq 0$，且 n 为大于 1 的自然数.

令 $x=-\frac{1}{n^2}$，则（1.3）写成

$$(1-\frac{1}{n^2})^n>1-\frac{1}{n},$$

即
$$(1+\frac{1}{n})^n(1-\frac{1}{n})^n>1-\frac{1}{n},$$

从而当 $n>1$ 时，有

$$(1+\frac{1}{n})^n>(1-\frac{1}{n})^{1-n}=(\frac{n}{n-1})^{n-1},$$

即有

$$a_n=(1+\frac{1}{n})^n>(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}=a_{n-1}.$$

因此数列 $\{a_n\}$ 严格递增.

又令 $x=-\frac{1}{2n}$，则由（1.3）有

$$(\frac{2n-1}{2n})^n=(1-\frac{1}{2n})^n>1-\frac{n}{2n}=\frac{1}{2},$$

从而

$$(1+\frac{1}{2n})^n<(1+\frac{1}{2n-1})^n=(\frac{2n}{2n-1})^n<2.$$

由于数列 $\{a_n\}$ 严格递增，所以 $a_n<a_{2n}$，从而

$$(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{2n})^{2n}<4.$$

上式是在 $n>1$ 时导出的，但当 $n=1$ 时也成立．这就表明数列 $\{a_n\}$ 单调递增且有上界．证毕.

任意取定一个正整数 k，若在（1.3）中，令

$$x=-\frac{1}{(k+1)n},$$

则同样可以证得（1.2）的结果.

1.3 巧用不等式基本性质的证明

这里介绍的证明方法巧妙地利用不等式的基本性质．因为当

正整数 $m<2n$ 时，有

$$1+\frac{1}{n^2+m}>1+\frac{1}{n^2+2n},$$

即有
$$\frac{n^2+m+1}{n^2+m}>\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}, \tag{1.4}$$

所以在上式中分别令 $m=n$，$n+1$，…，$2n-1$，可得 n 个不等式，把它们左右两边分别相乘，并利用不等式的基本性质，可得

$$\frac{n^2+n+1}{n^2+n}\cdot\frac{n^2+n+2}{n^2+n+1}\cdot\frac{n^2+n+3}{n^2+n+2}\cdot\cdots\cdot\frac{n^2+2n}{n^2+2n-1}$$
$$>\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^n=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

即有
$$\frac{n+2}{n+1}>\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

从而

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

因此数列 $\{a_n\}$ 严格递增. 又因为当正整数 $m<2n$ 时，有

$$1+\frac{1}{2n}<1+\frac{1}{m}=\frac{m+1}{m},$$

所以在上式中分别令 $m=n$，$n+1$，…，$2n-1$，可得 n 个不等式，把它们两边相乘，可得

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n<\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}=2.$$

由于数列 $\{a_n\}$ 严格递增，所以对任意自然数 n，有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}<4.$$

这就表明数列 $\{a_n\}$ 单调递增且有上界. 证毕.

任意取定一个正整数 k，若注意到当 $m<(k+1)n$ 时有不等式

$$1+\frac{1}{(k+1)\ n}<1+\frac{1}{m}=\frac{m+1}{m},$$

则由这个不等式出发，同样可以证得（1.2）的结果.

1.4 利用一个简单不等式的证法

这个证法引自《美国数学月刊》（Amer. Math. Monthly 1974, Vol. 81, No. 9, 1011-1012），但关于有界性的证明，原文只证得 $a_n<4$，现能证得（1.2）的结果.

这个证法利用不等式

$$\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}<(n+1)b^n, \tag{1.5}$$

其中 $0\leqslant a<b$，n 为自然数，这个不等式的推导如下：

$$\begin{aligned}\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}&=b^n+b^{n-1}a+\cdots+ba^{n-1}+a^n\\&<b^n+b^{n-1}b+\cdots+bb^{n-1}+b^n=(n+1)\ b^n.\end{aligned}$$

把不等式（1.5）改写为

$$b^n[(n+1)a-nb]<a^{n+1}, \tag{1.6}$$

并且令

$$a=1+\frac{1}{n+1}\quad 和\quad b=1+\frac{1}{n},$$

又注意到这时

$$(n+1)\ a-nb=(n+2)-(n+1)=1,$$

则有

$$a_n=(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}=a_{n+1}.$$

因此数列 $\{a_n\}$ 严格递增，又在（1.6）中令

$$a=1 \quad 和 \quad b=1+\frac{1}{2n},$$

并注意到这时

$$(n+1)\ a-nb=\ (n+1)\ -\ (n+\frac{1}{2})\ =\frac{1}{2},$$

则有

$$(1+\frac{1}{2n})^n\cdot\frac{1}{2}<1.$$

由于数列 $\{a_n\}$ 严格递增，所以对任何自然数 n，有

$$(1+\frac{1}{n})^n<\ (1+\frac{1}{2n})^{2n}<4.$$

这表明 $\{a_n\}$ 是单调递增有上界的数列．证毕．

任意取定一个正整数 k，若在（1.6）中令

$$a=1 \quad 和 \quad b=1+\frac{1}{(k+1)\ n},$$

便能证得（1.2）的结果．

1.5 利用间接方法的证明

以上一至四的 4 种方法都是直接证明数列 $\{a_n\}$ 单调递增且有上界的．可以采用间接的方法证明 $\{a_n\}$ 收敛．我们另外考虑数列

$$b_n=\ (1+\frac{1}{n})^{n+1} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

很明显，这个数列有下界：

$$(1+\frac{1}{n})^{n+1}=1+\frac{n+1}{n}+\cdots+\ (\frac{1}{n})^{n+1}>2,$$

所以，只要证明了数列 $\{b_n\}$ 单调递减，则知 $\{b_n\}$ 收敛，从而由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1 \quad 和 \quad a_n=\frac{n}{n+1}b_n$$

便知道数列 $\{a_n\}$ 也收敛.

证明数列 $\{b_n\}$ 单调递减，可以分别采取与上述一至四的类似方法：

1. 利用平均值不等式

因为对任何自然数 n，有

$$\sqrt[n+2]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1}<\frac{(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}+1}{n+2}=\frac{n+1}{n+2},$$

所以
$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}<\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2},$$

从而
$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}>\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2},$$

即有

$$b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}=b_{n+1}.$$

故数列 $\{b_n\}$ 严格递减. 证毕.

2. 利用伯努利不等式

在伯努利不等式（1.3）中，令 $x=\frac{1}{n^2}$，则当 $n>1$ 时，有

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n>1+\frac{n}{n^2}=1+\frac{1}{n},$$

于是
$$\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)^n>1+\frac{1}{n}$$

从而
$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

即有

$$b_{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=b_n.$$

这就表明数列 $\{b_n\}$ 严格递减. 证毕.

3. 利用不等式的基本性质

与不等式（1.4）对应，当 $m>2n$ 时有

$$\frac{n^2+m+1}{n^2+m}<\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

在上式中分别令 $m=2n+1, 2n+2, \cdots, 3n+1$，可得 $n+1$ 个不等式，把它们两边相乘可得

$$\frac{n^2+2n+2}{n^2+2n+1}\cdot\frac{n^2+2n+3}{n^2+2n+2}\cdot\cdots\cdot\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1}$$

$$<\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{n+1}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1},$$

即有
$$\frac{n^2+3n+2}{n^2+2n+1}<\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1},$$

或
$$\frac{n+2}{n+1}<\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

从而

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

这就证明了数列 $\{b_n\}$ 严格递减．证毕．

4．利用一个简单不等式

与建立不等式（1.5）类似，可得

$$\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}>(n+1)a^n,$$

其中 $0\leqslant a<b$，n 为自然数．把这个不等式改写为

$$a^n[(n+1)b-na]<b^{n+1} \tag{1.7}$$

并且令

$$a=1+\frac{1}{n} \quad 和 \quad b=1+\frac{1}{n-1},$$

又注意到这时

$$(n+1)b-na=n+1+\frac{n+1}{n-1}-(n+1)=\frac{n+1}{n-1},$$