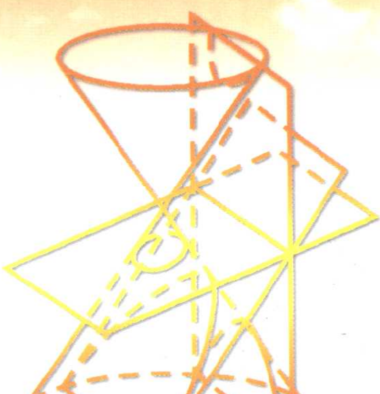
高中数学

龙门专题

圆锥曲线方程

傅荣强 主编



（修

龍門書局

圆锥曲线方程

（修订版）

龙门专题

主编 傅荣强

本册主编 常青 孙艳 张洪芬 李顺福

龍門書局

（修订版）

圆锥曲线方程

傅荣强　主编

责任编辑　王　敏　乌　云

龍門書局　出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社总发行　各地书店经销

*

2002 年 1 月修　订　版　开本：890×1240　A5

2002 年 3 月第六次印刷　印张：7 1/2

印数：100 001－130 000　字数：286 000

ISBN 7-80160-139-4/G·175

定　价：8.50 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

参考书几乎是每一位学生在学习过程中必不可少的。如何发挥一本参考书的长效作用,使学生阅读后,能更透彻、迅速地明晰重点、难点,在掌握基本的解题思路和方法的基础上,举一反三、触类旁通,这是教参编者和读者共同关心的问题。这套《龙门专题》,就是龙门书局本着以上原则组织编写的。它包括数学、物理、化学、生物四个学科共计55种,其中初中数学12种,高中数学12种,初中物理5种,高中物理7种,初中化学4种,高中化学10种,高中生物5种。

本套书在栏目设置上,主要体现了循序渐进的特点。每本书内容分为两篇——“基础篇”和“综合应用篇”(高中为“3+X”综合应用篇)。“基础篇”中的每节又分为“知识点精析与应用”、“视野拓展”两个栏目。其中“**知识点精析与应用**”着眼于把基础知识讲透、讲细,帮助学生捋清知识脉络,牢固掌握知识点,为将成绩提高到一个新的层次奠定扎实的基础。“**视野拓展**”则是在牢固掌握基础知识的前提下,为使学生成绩“更上一层楼”而准备的。需要强调的是,这部分虽然名为“拓展”,但仍然立足于教材本身,主要针对教材中因受篇幅所限言之不详,但却是高(中)考必考内容的知识点(这类知识点,虽然不一定都很难,但却一直是学生在考试中最易丢分的内容),另外还包括了一些不易掌握、失分率较高的内容。纵观近年来高(中)考形势,综合题与应用题越来越多,试行“3+X”高考模式以后,这一趋势更加明显。“综合应用篇”正是为顺应这种形势而设,旨在提高学生的综合能力与应用能力,使学生面对纷繁多样的试题,能够随机应变,胸有成竹。

古人云:授人以鱼,只供一饭之需;授人以渔,则一生受用无穷。这也是我们编写这套书的宗旨。作为龙门书局最新推出的《龙门专题》,有以下几个特点:

1. 以“专”为先　本套书共计55种,你尽可以根据自己的需要从

中选择最实用、最可获益的几种。因为每一种都是对某一个专题由浅入深、由表及里的诠释,读过一本后,可以说对这个专题的知识就能够完全把握了。

2. 讲解细致完备　由于本套书是就某一专题进行集中、全面的剖析,对知识点的讲解自然更细致。一些问题及例题、习题后的特殊点评标识,能使学生对本专题的知识掌握起来难度更小,更易于理解和记忆。

3. 省时增效　由于"专题"内容集中,每一本书字数相对较少,学生可以有针对性地选择,以实现在较短时间里对某一整块知识学透、练透的愿望。

4. 局限性小　与教材"同步"与"不同步"相结合。"同步"是指教材中涉及的知识点本套书都涉及,并分别自成一册;"不同步"是指本套书不一定完全按教材的章节顺序编排,而是把一个知识块作为一个体系来加以归纳。如归纳高中立体几何中的知识为四个方面、六个问题,即"点、线、面、体"和"平行、垂直、成角、距离、面积、体积"。让学生真正掌握各个知识点间的相互联系,从而自然地连点成线,从"专题"中体味" 万变不离其宗"的含义,以减小其随教材变动的局限性。

5. 主次分明　每种书的前面都列出了本部分内容近几年在高考中所占分数的比例,使学生能够根据自己的情况,权衡轻重,提高效率。

本套书的另一特点是充分体现"减负"的精神。"减负"的根本目的在于培养新一代有知识又有能力的复合型人才,它是实施素质教育的重要环节。就各科教学而言,只有提高教学质量,提高效率,才能真正达到减轻学生负担的目的。而本套书中每本书重点突出,讲、练到位,对于提高学生对某一专题学习的相对效率,大有裨益。这也是本书刻意追求的重点。

鉴于本书立意的新颖,编写难度很大,又受作者水平所限,书中难免有疏漏之处,敬请不吝指正。

编　者

2001年11月1日

编委会（高中数学）

（修订版）

目　录

第一篇 基础篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科，简说研究“数”与“形”的学科．圆锥曲线方程属“用代数的方法研究几何问题——解析几何”的后继部分．

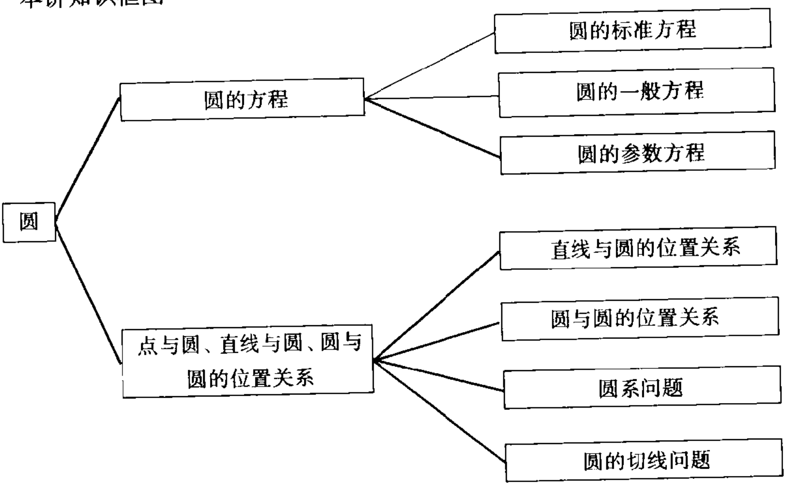
圆锥曲线又称为二次曲线，它们的得名，源于两个有公共顶点、且一个正立一个倒立的圆锥被平面从四个不同的角度所截．在圆锥曲线的研究中，圆的个性和共性都比较突出，人们的坐标观点，绝大部分是在这个阶段的学习中形成的；而椭圆、双曲线、抛物线除了延续圆在圆锥曲线中的共性外，它们各自还都有个性的一面，即它们本身的定义、方程、图形和性质．个性也好，共性也罢，对圆锥曲线的研究仍离不开两个主要问题——根据已知条件，求出曲线的方程；通过方程，讨论曲线的性质．

本书知识框图

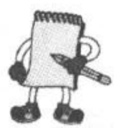
- 圆锥曲线
  - 圆
    - 圆的方程
    - 点与圆、直线与圆、圆与圆的位置关系
  - 椭圆
    - 椭圆的定义、方程、性质
    - 直线与椭圆的位置关系
  - 双曲线
    - 双曲线的定义、方程、性质
    - 直线与双曲线的位置关系
  - 抛物线
    - 抛物线的定义、方程、性质
    - 直线与抛物线的位置关系
    - 坐标轴的平移与对称变换
    - 圆锥曲线的参数方程与极坐标方程
  - 圆锥曲线的应用
    - 圆锥曲线的理论应用
    - 圆锥曲线的实际应用

第一讲 圆

本讲知识框图



1.1 圆的方程



重点难点归纳

重点 ①掌握圆的定义.②掌握圆的标准方程、一般方程、参数方程.

难点 领悟研究讨论圆的思维模式,使解析几何中的一些解题方法在头脑中扎根.

本节需掌握的知识点 掌握圆的标准方程、一般方程、参数方程,并能根据方程写出圆心和半径.

知识点精析与应用

【知识点精析】

1.圆的标准方程

(1)圆的定义

平面内与定点距离等于定长的点的集合叫做圆.

(2)圆的标准方程

圆的标准方程是$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.其中,(a,b)为圆的圆心的坐标,R为圆的半径.特别地,圆心在原点、半径为r的圆的方程为$x^2+y^2=r^2$.

2.圆的一般方程

方程$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$称为圆的一般方程.

把圆的一般方程配方,得$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}\right)^2$.可见,当$D^2+E^2-4F>0$时,方程表示圆心为$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$、半径为$\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$的圆.于是,方程$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$表示圆的充要条件为$D^2+E^2-4F>0$.

圆的一般方程形式上的特点有二:

(1)x^2,y^2项系数相等且不为0;

(2)无$x\cdot y$这样的二次(交叉)项.

3.圆的参数方程

圆$x^2+y^2=r^2(r>0)$的参数方程为$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$($\theta$为参数),其中$\theta$的几何意义为圆心角.

圆$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2(R>0)$的参数方程为$\begin{cases}x=a+R\cos\theta\\y=b+R\sin\theta\end{cases}$($\theta$为参数).

【解题方法指导】

1.圆的标准方程、一般方程问题

[例1] 写出满足下列条件的圆的方程:

(1)圆心在原点; (2)过原点; (3)圆心在x轴上; (4)圆心在y轴上; (5)圆心在x轴上且过原点; (6)圆心在y轴上且过原点; (7)与x轴相切; (8)与y轴相切; (9)与两坐标轴都相切.

解 为比较特点,将答案列表给出:

	条　件	标 准 方 程	一 般 方 程
(1)	圆心在原点	$x^2+y^2=r^2(r\neq0)$	$x^2+y^2-r^2=0(r\neq0)$
(2)	过原点	$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2(a^2+b^2\neq0)$	$x^2+y^2+Dx+Ey=0$ $(D^2+E^2\neq0)$

续表

	条　件	标 准 方 程	一 般 方 程
(3)	圆心在 x 轴上	$(x-a)^2+y^2=r^2(r\neq 0)$	$x^2+y^2+Dx+F=0$ $(D^2-4F>0)$
(4)	圆心在 y 轴上	$x^2+(y-b)^2=r^2(r\neq 0)$	$x^2+y^2+Ey+F=0$ $(E^2-4F>0)$
(5)	圆心在 x 轴上且过原点	$(x-a)^2+y^2=a^2(a\neq 0)$	$x^2+y^2+Dx=0(D\neq 0)$
(6)	圆心在 y 轴上且过原点	$x^2+(y-b)^2=b^2(b\neq 0)$	$x^2+y^2+Ey=0(E\neq 0)$
(7)	与 x 轴相切	$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ $(b\neq 0)$	$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ $(E\neq 0, D^2-4F=0)$
(8)	与 y 轴相切	$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2(a\neq 0)$	$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ $(D\neq 0, E^2-4F=0)$
(9)	与两坐标轴都相切	$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2(\lvert a\rvert=\lvert b\rvert\neq 0)$	$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ $(\lvert D\rvert=\lvert E\rvert\neq 0, D^2-4F=0)$

点评　注意对比特殊位置的圆两种方程的特点、规律性，并将其应用于求圆的方程.

[例 2]　求过 $A(1,4)$、$B(3,2)$两点，且圆心在直线 $y=0$ 上的圆的标准方程.

解法 1　(待定系数法)

设圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，则

$\because$ 圆的圆心在 $y=0$ 上，$\therefore b=0$，

$\therefore$ 圆的方程为 $(x-a)^2+y^2=r^2$.

待定系数：a, r 等待确定

又 $\because$ 该圆过 $A(1,4)$、$B(3,2)$两点，$\therefore \begin{cases}(1-a)^2+16=r^2,\\(3-a)^2+4=r^2,\end{cases}$

解得 $a=-1, r^2=20$.

$\therefore$ 所求圆的方程为 $(x+1)^2+y^2=20$.

圆的平面几何性质

解法 2　(直接求出圆心和半径)

因为圆过 $A(1,4)$、$B(3,2)$两点，所以圆心 C 在线段 AB 的垂直平分线 l 上.因为 $k_{AB}=\frac{4-2}{1-3}=-1$，所以 l 的斜率为 1. 又线段 AB 的中点为$(2,3)$，所以线段 AB 的垂直平分线 l 的方程为

$y-3=x-2$,　　点斜式　即 $x-y+1=0$.

又知圆心 C 在直线 $y=0$ 上，由 $\begin{cases} x-y+1=0, \\ y=0, \end{cases}$ 得圆心的坐标为 $C(-1,0)$，半径 $r=|AC|=\sqrt{(1+1)^2+4^2}=\sqrt{20}$.

所以，圆的方程为 $(x+1)^2+y^2=20$.

点评　本题考查圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的求法，两种基本方法都很重要，应掌握.

[例3]　一个三角形的三边所在直线的方程分别为 $x+6y-11=0$，$x-y-4=0$，$5x+2y+1=0$，求这个三角形外接圆的方程.

解　由方程组 $\begin{cases} x+6y=11, \\ x-y=4, \end{cases}$ $\begin{cases} x+6y=11, \\ 5x+2y=-1, \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=4 \\ 5x+2y=-1 \end{cases}$ 解得该三角形三个顶点的坐标分别为 $(5,1)$，$(-1,2)$，$(1,-3)$.

设该三角形外接圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，则

把三角形三个顶点的坐标分别代入方程，得

$$\begin{cases} 5^2+1^2+5D+E+F=0, \\ (-1)^2+2^2-D+2E+F=0, \\ 1^2+(-3)^2+D-3E+F=0. \end{cases}$$

如没有特别说明，圆的标准方程、圆的一般方程通用．用哪一个，视具体情况去定．

解得 $D=-\dfrac{25}{7}$，$E=-\dfrac{3}{7}$，$F=-\dfrac{54}{7}$.

$\therefore$ 所求圆的方程是 $x^2+y^2-\dfrac{25}{7}x-\dfrac{3}{7}y-\dfrac{54}{7}=0$.

[例4]　实数 a 取何值时，方程 $a^2x^2+(a+2)y^2+2ax+2a=0$ 表示圆?

解　由 $a^2=a+2$，得 $a=2$，或 $a=-1$

方程表示圆的必要条件，x^2、y^2 项系数相等

(1) 当 $a=2$ 时，方程为

$4x^2+4y^2+4x+4=0$，即 $x^2+y^2+x+1=0$.

此时 $D^2+E^2-4F=1^2+0^2-4\times1<0$，所以 $a=2$ 不合题意.　难点，易错

(2) 当 $a=-1$ 时，方程为

$x^2+y^2-2x-2=0$.

此时 $D^2+E^2-4F=(-2)^2+0^2-4\times(-2)>0$，所以 $a=-1$ 符合题意.

所以当 $a=-1$ 时，原方程表示圆.

点评　本题考查方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆的充要条件 $\begin{cases} A=C\neq0, \\ B=0, \\ D^2+E^2-4AF>0. \end{cases}$ 要注意验证 $D^2+E^2-4AF>0$ 的必要性.

2. 圆的参数方程问题

[例 5] 已知 $x^2+y^2=2$,求 $x+y$ 的最大值和最小值.

解 依题意,令$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数,$0\leqslant\theta<2\pi$),则

圆上点的设法,有一般规律

$x+y=\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta=2\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$.

$\therefore x+y$ 的最大值为 2,最小值为 -2.

点评 圆的参数方程通常用于点的三角换元.如,点 $P(x,y)$满足$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ 时,可令$\begin{cases} x=x_0+R\cos\theta \\ y=y_0+R\sin\theta \end{cases}$($\theta$ 为参数).

【基础训练题】

一、选择题

1. 圆 $x^2+y^2-2x+2y=0$ 的周长为 ( )

A. $\sqrt{2}\pi$　　B. 2π　　C. $2\sqrt{2}\pi$　　D. 4π

2. "x^2 与 y^2 的系数相同,且不等于零,并且没有 xy 项"是二元二次方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆的 ( )

A. 必要条件　　B. 充分条件

C. 充分且必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. $y=|x|$的图形和圆 $x^2+y^2=4$ 可围成两个面积不等的封闭图形,其中较小的一个的面积是 ( )

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. π　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{3\pi}{2}$

4. $x^2+y^2-x+y+R=0$ 表示一个圆,则 R 适合的条件是 ( )

A. $R\leqslant2$　　B. $R<2$　　C. $R<\frac{1}{2}$　　D. $R\leqslant\frac{1}{2}$

二、填空题

5. 若圆 $P:x^2+y^2-2x-4y-1=0$ 和圆 P' 关于直线 $x-y+3=0$ 对称,则 P' 的方程是________.

6. 已知正三角形的两个顶点是 $O(0,0)$和 $A(6,0)$,则它的外接圆的方程是________.

7. 过原点且和 x 轴、y 轴分别交于$(m,0)$、$(0,n)$两点的圆的方程是________.

8. 方程 $x^2+y^2-Dx-Ey+F=0(D^2+E^2-4F=0)$的图形是________.

三、解答题

9. 已知方程 $x^2+y^2-2(t+3)x+2(1-4t^2)y+16t^4+9=0$.

(1)t 为何值时,方程表示圆?

(2)t 为何值时,方程表示的圆半径最大?并求出半径最大时圆的方程.

10.已知圆 $x^2+y^2-4x\cos\theta-4y\sin\theta+3=0$ 的圆心为 M,求:

(1)点 M 的坐标;

(2)$\theta\in\mathbf{R}$ 时,求点 M 的轨迹.

【答案与提示】

1.C(原方程化为 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$,$\therefore$ 半径 $r=\sqrt{2}$,周长为 $2\pi r=2\sqrt{2}\pi$.)　2.A($Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆的充要条件为 $\begin{cases}A=C\neq0,\\B=0,\\D^2+E^2-4AF>0.\end{cases}$)　3.B(画图可得 $S_{扇}=\dfrac{1}{4}\pi R^2=\dfrac{1}{4}\pi\times2^2=\pi$.)　4.C(由 $D^2+E^2-4F=1+1-4R>0$,得 $R<\dfrac{1}{2}$.)　5.已知圆的圆心为 $P(1,2)$,半径为$\sqrt{6}$,点 $P(1,2)$关于 $x-y+3=0$ 的对称点的坐标为 $P'(-1,4)$,所以圆 P'的方程为$(x+1)^2+(y-4)^2=6$,即 $x^2+y^2+2x-8y+11=0$.　6.$\because$正三角形另外一个顶点为$(3,\pm3\sqrt{3})$,$\therefore$圆的圆心为$(3,\pm\sqrt{3})$,半径 $R=2\sqrt{3}$,所求圆的方程为$(x-3)^2+(y\pm\sqrt{3})^2=12$.　7.圆心$\left(\dfrac{m}{2},\dfrac{n}{2}\right)$,半径 $R=\sqrt{\left(\dfrac{m}{2}\right)^2+\left(\dfrac{n}{2}\right)^2}$,$\therefore$圆的方程为$\left(x-\dfrac{m}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{n}{2}\right)^2=\left(\dfrac{m}{2}\right)^2+\left(\dfrac{n}{2}\right)^2$,即 $x^2+y^2=mx+ny$.

8.由于 $D^2+E^2-4F=0$,且原方程配方后为 $\left(x-\dfrac{D}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{E}{2}\right)^2=\dfrac{D^2+E^2-4F}{4}=0$,$\therefore$原方程的图形是点$\left(\dfrac{D}{2},\dfrac{E}{2}\right)$.　9.(1)由方程表示圆的充要条件,得$[-2(t+3)]^2+[2(1-4t^2)]^2-4(16t^4+9)>0$,即$7t^2-6t-1<0$,解得$-\dfrac{1}{7}<t<1$.$\therefore$当$-\dfrac{1}{7}<t<1$时,方程表示圆.(2)当$-\dfrac{1}{7}<t<1$时,方程表示圆,其半径为$\dfrac{1}{2}\sqrt{[-2(t+3)]^2+[2(1-4t^2)]^2-4(16t^4+9)}=\dfrac{1}{2}\sqrt{-4(7t^2-6t-1)}=\sqrt{-7t^2+6t+1}=\sqrt{-7\left(t-\dfrac{3}{7}\right)^2+\dfrac{16}{7}}$,$\therefore$当 $t=\dfrac{3}{7}$时,半径有最大值$\sqrt{\dfrac{16}{7}}=\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$,这时,圆心的坐标为$(t+3,4t^2-1)$,即$\left(\dfrac{24}{7},-\dfrac{13}{49}\right)$,所以半径最大时圆的方程是$\left(x-\dfrac{24}{7}\right)^2+\left(y+\dfrac{13}{49}\right)^2=\dfrac{16}{7}$.

10.(1)将已知圆方程配方,得$(x-2\cos\theta)^2+(y-2\sin\theta)^2=1$,$\therefore$圆心 M 的坐标

为$(2\cos\theta,2\sin\theta)$.(2)当$\theta\in\mathbf{R}$时,点$M$为动点.$\because(2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2=4$,$\therefore$点$M$的轨迹方程是$x^2+y^2=4$,它是以原点为圆心,半径为2的圆.

视野拓展

【释疑解难】

1. $x^2+y^2=1$与$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$相像的根源在哪儿?

当$r=1$时,圆的标准方程$x^2+y^2=r^2(r>0)$为$x^2+y^2=1$,它与同角三角函数的平方关系之一$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$十分相像.两者的相像根源在哪儿呢?对我们的学习又有什么启示呢?

(1)溯源:如图1-1,设角α的终边与圆$x^2+y^2=1$和$x^2+y^2=r^2(r>0)$分别交于$P_1(x_1,y_1)$、$P(x,y)$两点,则根据任意角的三角函数的定义,得

$$\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{y_1}{1},\\ \cos\alpha=\dfrac{x_1}{1}.\end{cases}① \quad \begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{x}{r},\\ \sin\alpha=\dfrac{y}{r}.\end{cases}②$$

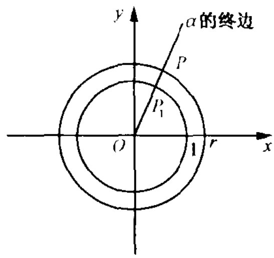


图1-1

由①,得$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=x_1{}^2+y_1{}^2=|OP_1|^2=1$,即$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

由②,得$x^2+y^2=r^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=r^2$,即$x^2+y^2=r^2$.特别地,当$r=1$时,$x^2+y^2=r^2$为$x^2+y^2=1$.这时,$P_1$点与$P$点重合.由此可知,当$P_1$点与$P$点重合时,$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$源于用$\alpha$表示$P_1$点的坐标$(\cos\alpha,\sin\alpha)$,$x^2+y^2=1$源于用$x$、$y$表示$P_1$点的坐标$(x,y)$.

(2)启示:圆$x^2+y^2=r^2(r>0)$的参数方程是$\begin{cases}x=r\cos\alpha,\\ y=r\sin\alpha.\end{cases}$它启示我们圆$x^2+y^2=r^2(r>0)$上的任意一点均可表成$(r\cos\alpha,r\sin\alpha)$的形式.于是,对圆$x^2+y^2=r^2(r>0)$的研究,可以从解析几何范畴跨跃到三角函数领域,借助三角函数完整的公式体系,实现最终目的,这其中体现出来的数学思想是等价转化思想.

【典型例题导析】

[例6] 设点$P(x,y)$是圆$x^2+y^2=1$上任一点,求$u=\dfrac{y-2}{x+1}$的取值范围.

分析1 利用圆上任一点的参数坐标代替x,y,转化为三角问题解决.

解 设$\theta\in[0,2\pi)$,圆$x^2+y^2=1$上任一点为$P(\cos\theta,\sin\theta)$,则

$x=\cos\theta,y=\sin\theta$.

$\therefore u=\dfrac{\sin\theta-2}{\cos\theta+1}$,$u\cos\theta+u=\sin\theta-2$,$\therefore u\cos\theta-\sin\theta=-(u+2)$.

$\therefore \sin(\theta-\varphi)=\dfrac{u+2}{\sqrt{u^2+1}}(\tan\varphi=u)$,

又$\because |\sin(\theta-\varphi)|\leqslant 1$, 三角函数的有界性 $\therefore \dfrac{|u+2|}{\sqrt{u^2+1}}\leqslant 1, u\leqslant -\dfrac{3}{4}$.

$\therefore u\in(-\infty,-\dfrac{3}{4}]$.

[例 7] 已知对于圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 上任一点 $P(x,y)$,不等式 $x+y+m\geqslant 0$ 恒成立,求实数 m 的取值范围.

分析 设圆上任一点为 $P(\cos\theta,1+\sin\theta)$(因为这时 P 点坐标满足方程$x^2+(y-1)^2=1$),把解析几何问题转化为三角问题来解.

解 设圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 上任一点为 $P(\cos\theta,1+\sin\theta)$,$\theta\in[0,2\pi)$,则

$x=\cos\theta, y=1+\sin\theta$. 相当于三角换元

$\because x+y+m\geqslant 0$ 恒成立,

$\therefore \cos\theta+1+\sin\theta+m\geqslant 0$ 恒成立,即 $m\geqslant -(1+\sin\theta+\cos\theta)$恒成立.

$\therefore$只需 m 不小于$-(1+\sin\theta+\cos\theta)$的最大值.

$\because u=-(\sin\theta+\cos\theta)-1=-\sqrt{2}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})-1$,

$\therefore u_{\max}=\sqrt{2}-1$,

$\therefore m\geqslant\sqrt{2}-1$, $\therefore m\in[\sqrt{2}-1,+\infty)$.

点评 解答中,运用了圆上点的参数设法.一般地,可把圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上的点设为$(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)(\theta\in[0,2\pi))$.采用这种设法一方面可以减少参数的个数,另一方面可以灵活地运用三角公式.从代数观点看,这种做法的实质就是三角代换.

2.小常识——两类参数本质上的差别

解析几何中,参数方程和含有参数的方程几乎随处可见,可是它们却有着本质上的差别.追根溯源,差别的源头是“参数”.

看一个例子:设 $t\in[0,2\pi)$,指出参数方程$\begin{cases}x=2\pi\cos t\\ y=2\pi\sin t\end{cases}$①和含有参数的方程 $x^2+y^2=t^2$②的图形各是什么?

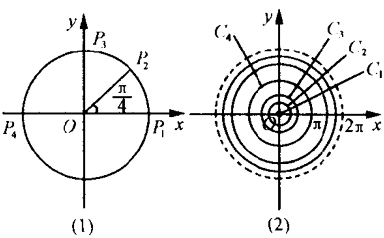


图 1-2

如图 1-2(1),方程$\begin{cases}x=2\pi\cos t,\\ y=2\pi\sin t,\end{cases}$ $t\in[0,2\pi)$表示以原点为圆心、以 2π 为半径的圆.

如图 1-2(2),方程 $x^2+y^2=t^2$