

高等学校教材

随机振动

● 徐昭鑫

高等教育出版社

高等学校教材

随 机 振 动

徐昭鑫

高等教育出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了随机振动的主要问题,适当地注意了理论基础和应用技术,对一些重要的概念和结论都给出了必要的阐释和推导。第一、二和四章分别扼要地回顾和阐述了傅氏变换、随机变量和振动传递特性方面对于随机振动来说是必备的概念和公式。第三、五和六章介绍了平稳随机振动的基础问题。第七至十一章是关于应用及频域处理和时域模拟等随机振动的一些基本内容。第十二至第十四章则介绍了非平稳、非线性、变参数系统随机振动的一些基础知识。

本书可用作研究生随机振动课程的教材,也可供有关专业的教师、工程技术人员和大学生作为参考书。

高等学校教材

随 机 振 动

徐昭鑫

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

国防工业出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 11.5 字数 270 000

1990 年 5 月第 1 版 1990 年 5 月第 1 次印刷

印数 0001—1090

ISBN7-04-002821-2/TB·155

定价 2.75 元

序

随机振动是振动理论中的一个重要部分，从五十年代起就逐渐在航空、地震、建筑、海洋水工、机械、运输、声学等理论和工程方面得到应用。目前，几乎在所有的工程领域内，随机振动的传递和响应都是必须予以考虑的了。因此，在一些较新的振动理论书籍中大都扼要介绍了随机振动的基本概念。不少学校也为研究生和大学生开设了这门课程。我们在 1981 年开始为研究生和力学专业大学生开设随机振动课程以后，感到需要有一本较适用的教材以利教学，因此在 1982 年末编写了讲义，用于力学和工科研究生课程。当然此讲义只可能包括一些主要的内容，但比一般的教材和讲义的内容为多，例如介绍了梁、非平稳和非线性随机振动等问题。本书根据这讲义作了修订，对一些加深和加宽的内容作了较多的删节，但保留并增强了基本部分，增添了若干较新的内容，例如倒频谱等。

本书力求在系统上较有条理，注意了对于掌握随机振动来说是必备的基础和一般的应用技术。相信这些内容对于应用和进一步的研究是会有帮助的。书中对一些重要的概念尽量予以阐释清楚。对一些重要的公式和定理则作出了推导。对于一些引用资料尽可能地作了校验改正。

本书第一、二和四章分别对傅氏变换、随机变量和线性系统的传递特性作了简要的回顾和补充，但仅着重于对随机振动的学习来讲是必要的概念和公式。当然也适当地顾及了问题本身的系统性。

第三章介绍了随机振动过程的时域相关分析和平稳过程的频

AA11/05

域谱分析。第五章阐明了线性系统的随机响应问题。第六章介绍了随机导数和积分的基本概念,并阐述了在实际问题中较常遇到的窄带过程的基本特点。

第七章是一些应用方面的课题,包括了人对振动的承受限度问题,机件的破坏问题,倒频谱识别以及道路空间谱的转换问题。第八章简单地介绍了功率谱的测量。第九、十章则说明了功率谱函数数字处理的基本方法。第十一章是随机振动时域模拟问题的简单介绍。

第十二至第十四章扼要介绍了几个专题:非平稳随机振动,非线性系统和变参数系统。这些专题的某些内容在目前还不能说已经十分成熟和完善,但它们在工程上的应用已时有所见,特别是非平稳和非线性随机振动问题。所以对力学工作者和工程技术人员来说,这些都已是必须有所了解的问题。

本书可供一个学期三或四学分的课程所用。虽然主要是为目前的硕士研究生所编,但也可供教师、工程技术人员和大学生作为参考书籍。哈尔滨工业大学谈开孚教授对本书作了详细的审阅并提出了宝贵意见,作者谨表示深切的谢意。

编 者

西南交通大学 一九八七年十月

绪 论

机械振动是力学理论和工程实践中的一个重要领域。它和力学的其它分支一样是随着工程实践的要求和力学、数学理论的发展而取得进展的。虽然随机振动的发展历史相对地比较短,约在五十年代逐步建立起系统,但至今已大体上有了一个体系,已经成为机械振动中的一个重要的分支了。它在各种工程问题中都得到了应用,例如飞行器、结构物、车辆、机器、流体、地震和声学等方面。但相对地讲,它是一门较新的学科,因此在理论上和应用方面仍还有不少问题有待于解决。

振动问题可以有各种不同的分类方法,例如:有限自由度系统与连续体的振动;瞬态与稳态振动;周期与非周期性振动;自由振动与受迫振动;线性与非线性振动等等。各自依照其特点、应用场合和处理方法而定。

随机振动与其它振动问题在概念、观点以及处理方法上是有所不同的。因此在分类上也可以把随机振动作为一类而把非随机的振动问题作为另一类而称之为确定性的或定则的振动。

这样的提法当然不是讲随机振动是不能确定的,因为研究工作本身就是要去确定某种规律。这只是说,在定则的振动问题中是把随机因素作了理想化处理而略去。因而在定则振动问题中原则上可以,而且应该去确定振动的细节。这里所说的细节是指在振动的时间历程中对应于任一瞬时振动物体的位置和速度等(时间域内),或者振动的全部频率分量——频率和振幅、相位等(频率域内)。而在随机振动中则由于一些未被掌握的因素的影响,只能

去确定所研究系统的振动的一些统计特性。因此，随机振动以定则振动理论以及概率和统计的观点和方法为基础，而属于随机过程之列。

对于一定的振动体系(惯性特征 m ，刚度特征 k ，阻尼特征 c ，都是一定的常量或一定的函数)，当它受到一定的激励(输入)时，就有一定的响应(输出)。它们之间由一定的微分方程(组)相联系。无论什么样的物理现实系统，只要它的参数是一定的，对于一定的激励，就有一定的响应。不论激励是简谐的、周期的、还是非周期的，是简单的、还是复杂的，只要它们的时间历程或频率分量是在细节上确定了的，那么响应的细节在原则上也是确定的。这样的问题是定则的。

对于随机振动，问题的性质和提法有所不同。例如，对于车辆的运行，即使以同样的车辆，在同一路段上以基本上相同的方式行驶。在每一次运行中对车上测点所作的测量，所得到的时间历程曲线在细节上总是不会完全相同的。这是因为驾驶的细节，发动机的运转，轮与路的接触，气流的作用等等对于每一次运行不会是绝对相同的。根据概率论的基本观点，对于一次运行，虽然在事先对很多细节因为没有掌握其规律，从而不能预断。对于已经发生了的激励和响应，已经成为事实，当然是一定了的。仅对于尚未发生的运行，其细节才是无法确定的。

须指明的是，对于尚未发生的振动过程，虽然由于不能略去的随机因素的参与而不能预料其细节，但是对于一定的系统、激励和环境，如果有一定的统计规律，且是能被掌握的，就可以从概率和统计的观点出发来加以研究。也就是说，在随机振动问题中研究的是振动的统计规律和其统计特征量，而不是以确定每一次振动的细节为其任务的。具体地讲，随机振动问题就是对一个物理系统，不论它是线性的，还是非线性的，也不论其参数是常数，还是一

定的函数,或者是随机的,由激励过程随机集合(总体)的统计特征量去推断响应随机过程集合的统计特征量。当然,与定则振动问题一样,也可以是其逆问题,即由响应去推断激励,或由激励及响应去识别振动系统的模型及参数。

还须指明,随机振动虽然常常是很复杂的,但振动的随机性并不是与振动形式的复杂性相联系的。例如,设有一个单自由度的线性振子,其运动微分方程是

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = A\sin(\omega t + \phi) \quad (0.1)$$

其中 m, c, k, A, ω 都是不变的, ϕ 虽然对一次振动来讲是一定的,但是对不同的振动过程,它一般地是不同的。对某一次振动,事先并不知道 ϕ 的确切数值,只知道对大量的振动过程来讲,它的数值落在一定范围内的次数,也即只知道它的频数或概率分布。对于一次振动,因 ϕ 是一定的,方程是很容易解出的,其解为:

$$y(t) = \frac{A/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2}} \sin(\omega t + \phi - \theta),$$

$$\tan\theta = \frac{2\xi\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (0.2)$$

其中 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ 。

在这里,虽然响应 $y(t)$ 的形式很简单,但是由于 ϕ 是随机变量,所以 $y(t)$ 是具有定则形式和随机相位的随机振动过程。对于振动的一次响应,振幅和频率都可以事先知道,但相位的确切数值却不能事先肯定。这是因为, ϕ 是随机的,不能事先确定其数值。所能知道的只是对于大量的响应来讲,响应的相位,或者对于某一时刻响应的位移和速度等的数值落在一定范围内的概率,即其概率分布。

这是随机振动问题的一般特点和处理方法:解决随机振动过程集合(激励或响应)的统计特性和统计特征量,而不是去确定每

一次振动历程的每一个细节。

由于随机振动在理论上和在测量方面都是在频(率)域中处理为便,所以对于傅氏变换(或拉氏变换、 Z 变换等),由于它沟通了时(间)域和频域中的振动表现,所以对它的有关概念应该十分清楚,对它的运算应该足够熟练。

本书对内容的安排大体上分为四个方面:傅氏变换和随机变量是对随机振动学习的一些准备工作。随机振动的统计特征,振动系统的传递特性和平稳随机激励与响应的关系是基础和核心。一些基本知识的介绍,包括功率谱的测量,数据处理和数字分析,平稳随机振动的模拟的一些最基本内容。最后是几个专门问题,包括非平稳、非线性以及变参数系统的随机振动。

本书以随机振动的基本问题为主。对于较新的发展,例如时域模态识别、时间序列的差分方程模型及参数谱、非线性模型的函数级数法、实时分析的卡尔曼滤波等,均未涉及。这些方面的内容只能由另外的课程解决。有关这方面的问题以及本书已经涉及的某些问题,例如随机过程,数据处理,试验或数字模拟,非线性随机振动等问题的全面论述,均请参阅有关文献及专著。

目 录

| | |
|-----------------------------|-----|
| 绪论 | 1 |
| 第一章 关于傅里叶变换的一些概念 | 1 |
| § 1.1 傅氏级数 | 1 |
| § 1.2 傅氏积分变换 | 6 |
| § 1.3 褶积积分和褶积定理 | 14 |
| § 1.4 狄拉克 δ 函数 | 18 |
| 第二章 随机变量及其统计特征 | 29 |
| § 2.1 关于随机变量 | 29 |
| § 2.2 随机变量的统计特征及其质量比拟 | 33 |
| § 2.3 随机变量函数的概率分布 | 35 |
| § 2.4 联合概率分布 | 37 |
| 第三章 随机振动过程及其统计特征 | 51 |
| § 3.1 随机振动过程 | 51 |
| § 3.2 随机振动过程的时域特征, 自相关函数 | 52 |
| § 3.3 平稳随机振动的频域特征, 功率谱函数 | 64 |
| § 3.4 两个随机振动过程的互相关函数和互功率谱函数 | 71 |
| 第四章 线性非时变系统的传递特性 | 78 |
| § 4.1 频率响应, 传递函数 | 78 |
| § 4.2 冲击响应, 单位脉冲响应函数 | 86 |
| § 4.3 突加载荷响应, 单位阶跃响应函数 | 91 |
| 第五章 线性非时变系统对随机激励的响应 | 95 |
| § 5.1 单自由度线性系统对随机激励的响应 | 95 |
| § 5.2 系统有两输入或两输出时的随机响应 | 105 |
| § 5.3 系统有多输入及多输出时的随机响应 | 112 |
| § 5.4 多输入情况下的凝聚函数问题 | 113 |
| § 5.5 等直梁的随机响应 | 123 |

| | |
|-------------------------------|-----|
| 第六章 二阶矩过程和窄带振动过程 | 133 |
| § 6.1 二阶矩过程的连续性, 导数和积分..... | 133 |
| § 6.2 窄带随机振动的一些特点..... | 137 |
| § 6.3 阈交及零交问题..... | 140 |
| § 6.4 峰出现的平均频率..... | 144 |
| § 6.5 峰值的概率分布..... | 146 |
| § 6.6 最大峰值的概率分布..... | 149 |
| § 6.7 随机振动过程的包线过程..... | 151 |
| 第七章 随机振动的几个应用问题 | 159 |
| § 7.1 振动数值大小的相对量度..... | 159 |
| § 7.2 人对振动的承受限度..... | 161 |
| § 7.3 机件的随机破坏问题..... | 169 |
| § 7.4 能量-时间曲线..... | 186 |
| § 7.5 倒频谱..... | 194 |
| § 7.6 道路谱, 空间谱和时间谱的转换..... | 207 |
| 第八章 功率谱的模拟分析 | 214 |
| § 8.1 卡埃方分布..... | 214 |
| § 8.2 自功率谱的模拟..... | 215 |
| § 8.3 互功率谱的模拟..... | 223 |
| 第九章 离散傅氏变换 | 226 |
| § 9.1 复傅氏系数的离散近似计算..... | 226 |
| § 9.2 傅氏积分的离散近似计算..... | 234 |
| § 9.3 傅氏积分数值计算的图示说明..... | 238 |
| § 9.4 抽样定理..... | 242 |
| § 9.5 时窗函数..... | 244 |
| § 9.6 基 2 快速傅氏变换..... | 247 |
| § 9.7 频谱的细化放大..... | 254 |
| 第十章 功率谱的数字分析 | 261 |
| § 10.1 离散功率谱..... | 261 |
| § 10.2 实际功率谱..... | 262 |
| 第十一章 伪随机振动过程 | 274 |
| § 11.1 伪随机数..... | 274 |

| | | |
|-------------|------------------------|-----|
| § 11.2 | 用三角级数模拟平稳正态过程 | 277 |
| § 11.3 | 随机双态过程 | 281 |
| 第十二章 | 非平稳随机振动 | 288 |
| § 12.1 | 非平稳过程的功率谱函数 | 288 |
| § 12.2 | 线性非时变系统对非平稳激励的响应 | 291 |
| § 12.3 | 非平稳白噪声过程 | 294 |
| § 12.4 | 慢变非平稳随机振动 | 297 |
| § 12.5 | 平稳性检验 | 299 |
| 第十三章 | 非线性系统的随机振动 | 302 |
| § 13.1 | FPK 法 | 302 |
| § 13.2 | 摄动法 | 323 |
| § 13.3 | 等效线性化法 | 321 |
| 第十四章 | 变参数系统的随机振动问题 | 331 |
| § 14.1 | 受随机输入的变参数系统 | 331 |
| § 14.2 | 随机参数系统的固有值问题 | 335 |
| § 14.3 | 受随机输入的随机参数系统 | 340 |
| 附录 | 用于计算均方响应的几个积分公式 | 348 |
| 参考文献 | | 350 |

第一章 关于傅里叶变换的一些概念

§ 1.1 傅氏级数

最简单的振动形式是简谐振动。简谐函数是一种周期函数，它包含、且只包含一个频率分量。一般的周期函数则除了基频 $\omega_1 = 2\pi/T$ (T 是周期) 外，还包含更高的诸频率分量。傅氏 (傅里叶) 级数表明了周期函数各频率分量的幅值和相位，在振动理论分析中是一种有用的数学工具。

1.1.1 周期性振动与旋转矢量系列

谐振动常用匀速转动矢量端点在轴上的投影来定义或阐释。对于一般的周期性振动，可以把这个概念推广 (图 1-1)。设想一系列首、尾相接的矢量系，各长 A_0, A_1, A_2, \dots ，以角速度 $\omega_0 = 0, \omega_1 = 1 \cdot \frac{2\pi}{T}, \omega_2 = 2 \cdot \frac{2\pi}{T}, \dots$ 绕各自的端点转动， $\phi_0 = 0, \phi_1, \phi_2, \dots$ 是当 $t = 0$ 时各矢量与铅垂线所夹之角^[1]。

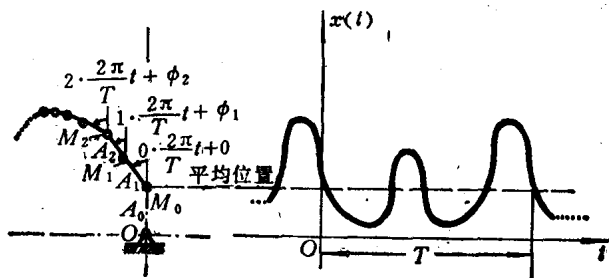


图 1-1

各矢量在铅垂线上投影之和是

$$\begin{aligned}
 x(t) &= A_0 \cos\left(0 \cdot \frac{2\pi}{T}t + 0\right) + A_1 \cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T}t + \phi_1\right) \\
 &\quad + A_2 \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T}t + \phi_2\right) + \dots \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T}t + \phi_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos k \cdot \frac{2\pi}{T}t \right. \\
 &\quad \left. + b_k \sin k \cdot \frac{2\pi}{T}t \right) \\
 &= x(t+T) \tag{1.1}
 \end{aligned}$$

A_0 和 ϕ_k 是顾及 x 和 t 轴的零点, 其它各个 A_k 的选择应可满足给定的周期运动。 $\omega_1 = 2\pi/T$ 是基频, 其它各个谐波频率 $\omega_k = k \cdot \frac{2\pi}{T} = 2\pi/T_k$ 是使 $T_k = T/k$ 即 $k \cdot T_k = T$ 总能满足周期 T 的要求。式(1.1)即是傅氏级数。

1.1.2 复傅氏系数

常采用复数形式的傅氏级数。利用欧拉公式

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \tag{1.2}$$

式中 $i = \sqrt{-1}$, 把(1.2)式代入(1.1)式, 并取 $c_0 = a_0$, $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$,

$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$, 得复傅氏级数:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik \cdot \frac{2\pi}{T}t} \tag{1.3}$$

为确定复傅氏系数, 一般利用正交性, 但也可应用最小均方误差的观点。将傅氏级数作数值计算时, 事实上只能取有限项次, 设为 $(2n+1)$ 项, 则截尾傅氏级数为

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik \cdot \frac{2\pi}{T}t}, \quad n < \infty \tag{1.4}$$

它与原函数 $x(t)$ 之间通常是会有误差的。均方误差为

$$E_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - S_n(t)]^2 dt \quad (1.5)$$

对于其极小值, 有

$$\frac{\partial E_n}{\partial c_j} = 0, \quad j = -n, -n+1, \dots, -2, -1, 0, 1, \dots, n$$

注意到

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{i(k+j) \cdot \frac{2\pi}{T} t} dt = \begin{cases} T, & k+j=0 \\ 0, & k+j \neq 0 \end{cases}$$

应有, 对于 $n \leq \infty$,

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-ik \cdot \frac{2\pi}{T} t} dt, \quad k = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n \quad (1.6)$$

可由巴塞伐耳(Parseval) 公式证明傅氏级数所取项数愈多, 其截尾傅氏级数的误差愈小。傅氏级数的巴塞伐耳公式

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \quad (1.7)$$

的推导如下。

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik \cdot \frac{2\pi}{T} t} \right] \\ &\quad \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ij \cdot \frac{2\pi}{T} t} \right] dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_k c_j \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(k+j) \cdot \frac{2\pi}{T} t} dt = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_k c_j, & k+j=0 \\ 0, & k+j \neq 0 \end{cases} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = c_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \\ &= a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

于是,截尾傅氏级数的均方误差为

$$E_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - S_n(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik \cdot \frac{2\pi}{T} t} - \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik \cdot \frac{2\pi}{T} t} \right]^2 dt = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

$$\therefore E_n - E_{n+1} = \frac{1}{2} (a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2) \geq 0, \text{ 即 } E_n \geq E_{n+1} \geq 0, \text{ 而 } E_{\infty} \rightarrow 0 \blacksquare$$

用巴塞伐耳公式易于证明傅氏级数的唯一性。

巴塞伐耳定理 不同的连续函数不会有同样的傅氏级数。

证 设有 $x_1(t)$ 及 $x_2(t)$, 它们的傅氏系数全同, 则对 $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$, 其傅氏系数全为零。因有 $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = 0$, 即 $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x_1(t) - x_2(t)]^2 dt = 0$ 。故只有当 $x_1(t) = x_2(t)$, 即 $x_1(t) \equiv x_2(t)$ 。 \blacksquare

以后用符号 \longleftrightarrow 表示对应的傅氏变换对。

例 1.1 有周期矩形波如图 1-2(a) 所示, 把它展成傅氏级数。

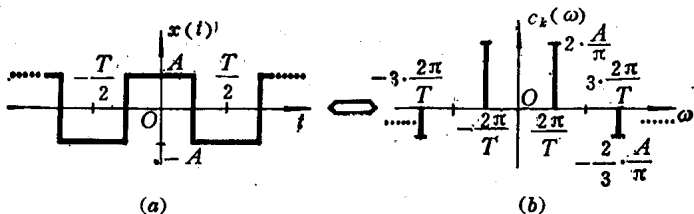


图 1-2

解 问题只在于求得傅氏系数。应用公式(1.6), 有

$$c_k = \begin{cases} \frac{2}{k} \cdot \frac{A}{\pi} (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)} & , \quad k \text{ 为奇数} \\ 0 & , \quad k \text{ 为偶数} \end{cases}$$

示如图 1-2(b), 是 $x(t)$ 的频谱。因 $x(t)$ 是偶函数, 故只是余弦谱, 也是幅度谱, 没有相位谱。 \blacktriangle

例 1.2 求图 1-3(a) 中所示有限宽周期脉冲的傅氏系数。

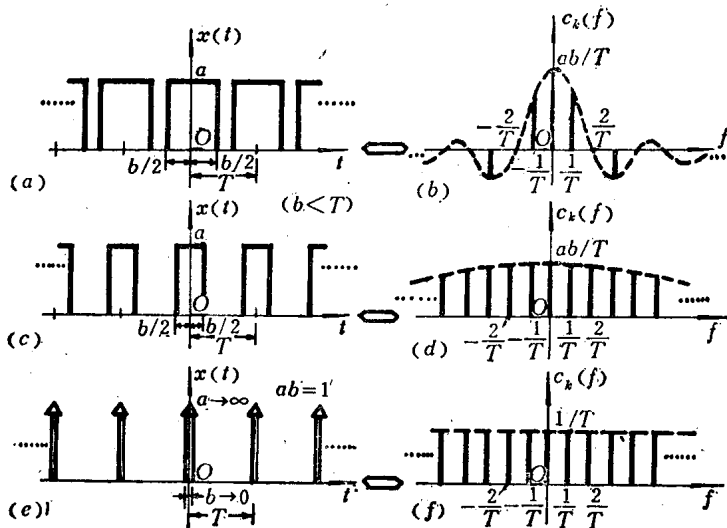


图 1-3

解 应用公式(1.6), 求得 $c_k = \frac{ab}{T} \cdot \frac{\sin\left(k \cdot \frac{b\pi}{T}\right)}{k \cdot \frac{b\pi}{T}}, k = -\infty, \dots,$

$-1, 0, 1, \dots, \infty$, 如图 1-3(b)。

当 b 减小时, c_k 的分布变平坦, 如图 1-3(d) 所示。

当 $b \rightarrow 0, a \rightarrow \infty$, 但保持 $ab \equiv 1$ 时, $c_k \equiv \frac{1}{T}$, 成为常量(图 1-3(f))。如图 1-3(e) 那样的情况, 是一系列狄拉克(Dirac) δ 函数。等值等间隔的狄拉克 δ 函数列称为梳状函数。对应的 c_k 列也可表示为梳状函数。▲

在一般情况下, c_k 是复数。对应的频率 $\omega_k = k \cdot \frac{2\pi}{T}$ 或 $f_k = k \cdot \frac{1}{T}$ 分布在全部正、负频率轴上, 但负频率只是数学概念, 没有物理意义。 c_k 的图形可以用实部-频率及虚部-频率或幅度-频率及相