高等学校教学参考书

高等工程数学

下册

GAODENG GONGCHENG SHUXUE

中国铁道出版社

内 容 提 要

本书分上、下两册。下册内容包括变分法、矢量与场论、数值计算方法和概率论的基本理论，以及它们的一些应用。

本书适用于工程技术人员、工科大学高年级学生、教师自学，也可作为工科研究生的试用教材。

高等学校教学参考书
高等工程数学
下 册
黄克欧 谌安琦 范子亮 奚载青 编
中国铁道出版社出版
新华书店北京发行所发行
各 地 新 华 书 店 经 售
中国铁道出版社印刷厂印
开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张：28.5 字数：720千
1 9 8 2 年 9 月 第 1 版 1 9 8 2 年 9 月 第 1 次印刷
印数：0001—9,000册 定价：2.95元

目　　录

第七章 数值计算方法

第八章 概率论

第五章　变　分　法

§1　变分法的基本概念

变分法在力学、物理及工程技术中都有广泛的应用。力学中的哈米顿原理就是借助于变分原则来叙述的。某些对实际问题很有用的数学方法，例如有限元法、最优化控制、样条函数的理论等都同变分法有关。

变分法是研究求泛函的极大值或极小值的方法，凡是求泛函的极大值或极小值问题都叫**做变分问题**。

1.1　泛函定义及举例

泛函（Functional）概念同函数（Function）概念有相同处，亦有相异处。

粗浅地说：一元函数$y=f(x)$中的因变数y的值是依赖着自变数x而变的；多元函数$u=f(x_1,\cdots,x_n)$中的因变数u的值是依赖着多个自变数$x_1,\cdots$，x_n的值而变的。可是，一元的泛函$J=J[y(x)]$中的因变数J的值是依赖着函数$y(x)$而变的。与此类似，多元的泛函$J=J[y_1(x)$，$y_2(x)$，$\cdots$，$y_n(x)]$的因变数J的值是依赖着多个函数$y_1(x)$，$\cdots$，$y_n(x)$而变的。

例1　泛函

$$J[y]=\int_0^1 [y^2+y'^2]dx \qquad y'=\frac{dy}{dx}$$

中的$J=J[y(x)]$的值随着所给定的函数$y(x)$而变。

例如，给定$y=y(x)=x^2$时，

则

$$J[x^2]=\int_0^1[(x^2)^2+(2x)^2]dx=\frac{1}{5}+\frac{4}{3}=\frac{23}{15}$$

当　$y=y(x)=x+1$时，

则

$$J[x+1]=\int_0^1[(x+1)^2+1^2]dx=\frac{10}{3}$$

当　$y=y(x)=\sin x$时，

则

$$J[\sin x]=\int_0^1(\sin^2x+\cos^2x)dx=1$$

由此可见，对于不同的函数$y(x)$，对应着泛函J的不同的值。

请读者自己计算，填下列的表：

设

$$J[y(x)]=\int_0^1(y^2+y'^2)dx$$

函 数 $y(x)$	所对应的泛函$J[y(x)]$的值	函 数 $y(x)$	所对应的泛函$J[y(x)]$的值
$y(x)=1-x$	$J[y(x)]=$	$y(x)=\cos x$	$J[y(x)]=$
$y(x)=\frac{1}{3}x^3$	$J[y(x)]=$	$y(x)=\frac{1}{x+1}$	$J[y(x)]=$

上面所举的例子都是依赖于一个函数 $y(x)$ 的泛函，下面将举依赖于两个函数的泛函的例子。

例 2 如果一质点在保守力场中，从定点$P_0(x_0,y_0,z_0)$运动到另一点$P_1(x_1,y_1,z_1)$时，据力学原理，力对质点所做的功W与路径无关，只同路径的两端点$P_0(x_0,y_0,z_0)$与$P_1(x_1,y_1,z_1)$的位置有关，即

$$W=W(P_0,P_1)=W(x_0,y_0,z_0;\ x_1,y_1,z_1)$$

因为（x_0，y_0，z_0）是定点，所以，功W是（x_1，y_1，z_1）的函数。

与上述不同，如果质点是在**非保守力场**中运动，据力学原理，则功W同运动路线方程

$$y=y(x),\quad z=z(x)$$

有关，即

$$W=W[y(x),\ z(x)]$$

也就是，在这情况下，功W是路线方程$y=y(x)$，$z=z(x)$（两个函数)的泛函。

由前例可见：

i ）函数$y=f(x)$：自变数x对应着函数值y（即变数x对应着因变数y）。

ii ）泛函$J=J[y(x)]$：自变元$y(x)$对应着泛函$J[y(x)]$的值（即函数 $y(x)$对应着因变数J）。

下面，叙述泛函的定义。

定义 如果因变数J与某一函数类$\{y(x)\}$中的函数存在着依赖关系：该函数类$\{y(x)\}$中每一个函数$y(x)$都对应着J的一个确定的值，则称J是这个函数类$\{y(x)\}$的泛函。函数类$\{y(x)\}$称为此泛函的定义域。

例如 泛函

$$J=J[y(x)]=\int_0^1(y^2+y'^2)dx$$

J对于自变元$y(x)$的依赖关系由上面的积分式给出。然而我们必须规定自变元$y(x)$所属的函数类（即$y(x)$不可以任意取），否则$J[y(x)]$可能没有确定值。例如，取$y(x)=\frac{1}{x}$，则从上式积分得$J=\infty$，即$J\left[\frac{1}{x}\right]=\infty$。也就是说，对应于$y(x)=\frac{1}{x}$的$J$没有确定的值。又如，取$y(x)=\frac{1}{x-1}$也是这样。这些函数$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{x-1}$，$\frac{1}{x^2}$都不在此泛函的定义域中。

一般说，如果泛函是由下列积分构成的：

$$J[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(m)})dx \tag{1.1}$$

而被积函数F中含有$y(x)$，$y'(x)$，…，$y^{(m)}(x)$。为了保证$J[y(x)]$有确定值，习惯上规定泛函（1.1）式的$y(x)$是属于$C_m[a,b]$类，即自变元$y(x)$必须是在闭区间$[a,b]$上的m次连续可导的函数。

定义 在闭区间$[x_0,\ x_1]$上，有一阶，二阶，……，一直到n阶连续的导函数的函数全体叫做在区间$[x_0,\ x_1]$上n阶连续的函数类，将用记号$C_n[x_0,\ x_1]$或C_n表示它。

例 3 设$\{y(x)\}$是$C_0[a,b]$的函数类，即这函数类中任一个函数$y(x)$都在闭区间$a\leqslant x\leqslant b$上连续，令M是$y(x)$在该区间的最大值，即

$$M=\max_{a\leqslant x\leqslant b} y(x)$$

则，M是$y(x)$的泛函，其定义域就是函数类$C_0[a,b]$。

1.2 变分问题举例

所谓变分问题，就是求泛函的极小值（或极大值）问题。

定义 设有泛函

$$J=J[y(x)]$$

如果$\overline{y}(x)$是这泛函的定义域中一个函数，而且满足某些边界条件，那么：

i）如果对于定义域中的满足相同边界条件的所有的$y(x)$都有

$$J[\overline{y}(x)]\leqslant J[y(x)]$$

则称$J[\overline{y}(x)]$是这泛函的（绝对）**极小值**，而$y=\overline{y}(x)$称为极小线。

ii）同样地，如果有

$$J[\overline{y}(x)]\geqslant J[y(x)]$$

则称$J[\overline{y}(x)]$是这泛函的（绝对）**极大值**，而$y=\overline{y}(x)$称为极大线。

下面，将举具体的例子来阐明变分问题。

例 4（最速下降线） 如图1.1所示，在OXY平面上要找一条曲线弧$\overset{\frown}{OP_1}$，具有这样的性质：当一个质点受重力作用沿着这曲线段从O点（坐标原点）滑到另一定点$P_1(x_1, y_1)$时，所需的时间T最小，这样的曲线叫**最速下降线**。

初看起来，似乎沿着直线段OP_1下降时间最节省。实际上不是这样，因为本问题不仅要考虑路程的长短，而且还要考虑速度$v=v(x, y)$的快慢。虽然沿着直线段路程最短，然而运动的速度v增加得不够快。显然，从O点运动到P_1点所需时间T是路程$y=y(x)$的泛函，即

$$T=J[y(x)] \tag{1.2}$$

所以，本问题就是求泛函（1.2）的极小值。

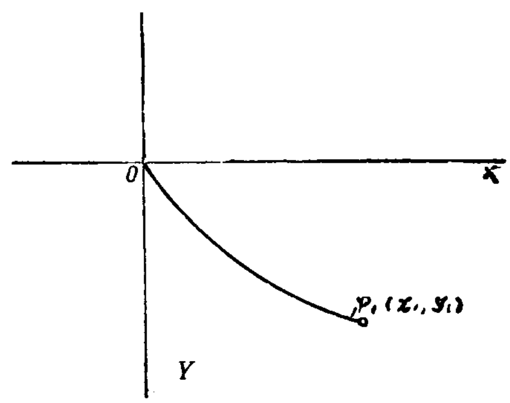

图 1.1

下面，将求出T对$y(x)$的依赖关系式。

从力学得知，$\frac{m}{2}v^2=mgy$，故得

$$v=\sqrt{2gy}$$

又因 $\frac{ds}{dt}=v$，故得

$$dt=\frac{ds}{v}=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

把上式积分，得

$$T=\int_0^T dt=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

即

$$T=T[y(x)]=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}dx \tag{1.3}$$

上面的积分式就是泛函T对于路线$y(x)$的依赖关系式。因为按照规定路线$y=y(x)$，必须通过两个定点$O(0,0)$，$P_1(x_1,y_1)$，所以$y=y(x)$必须满足两个边界条件

$$y|_{x=0}=0,\quad y|_{x=x_1}=y_1 \tag{1.4}$$

这样，求最速下降线问题就化为求泛函（1.3）在边界条件（1.4）下的最小值问题。

本题的求解方法见§2，例5。

例5（测地线问题）　如图1.2所示，设$\varphi(x,y,z)=0$是给定的一个曲面，而$A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$是曲面的两个定点。在该曲面上通过这两个点A、B的所有曲线

$$y=y(x),\quad z=z(x)$$

中，试求弧长最短的一条。

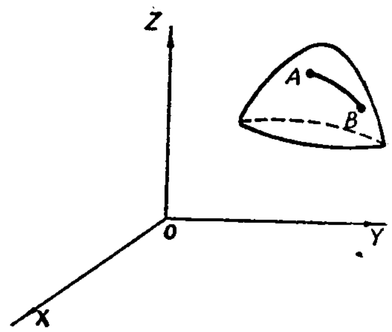

图 1.2

据题意，立数学式如下：

因为曲线$y=y(x)$，$z=z(x)$通过$A(x_1,y_1,z_1)$与$B(x_2,y_2,z_2)$，所以它们应满足边界条件

$$y(x_1)=y_1,\quad z(x_1)=z_1,\quad y(x_2)=y_2,\quad z(x_2)=z_2 \tag{1.5}$$

因为曲线$y(x)$，$z(x)$是曲面$\varphi(x,y,z)=0$上的曲线，所以它们应满足约束条件

$$\varphi[x,y(x),z(x)]=0 \tag{1.6}$$

该曲线的弧长，据微积分公式是

$$s[y,z]=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx \tag{1.7}$$

即$s[y,z]$是依赖于两个函数$y(x)$，$z(x)$的泛函。

由上式可见，本问题是在边界条件（1.5）以及约束条件（1.6）下，求（1.7）式的泛函$s[y(x),z(x)]$的极小值（解答见§5，例1）。

例6（等周问题）　求长度为一定的封闭曲线，使它所包围的面积为极大。

设封闭曲线的参数表示式是

$$x=x(t),\quad y=y(t)\qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_1)$$

因为曲线是封闭的，故有自然条件

$$x(t_0)=x(t_1),\quad y(t_0)=y(t_1) \tag{1.8}$$

因为长度是定长，故有约束条件

$$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt=\text{常数}\,l_0 \tag{1.9}$$

据线积分的面积S公式，有

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(xdy-ydx)\\&=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[x(t)y'(t)-y(t)x'(t)]dt\end{aligned} \tag{1.10}$$

也就是，本问题是在自然条件（1.8）以及约束条件（1.9）下，求（1.10）式泛函$S[x(t), y(t)]$的极大值（解答见§5）。

在前面三个例题中，有些条件叫边界条件，有些条件叫约束条件，这两种条件究竟有什么区别呢？

前三例题中泛函J所依赖的函数（自变元）的几何形象是曲线。施加在曲线的两个端点上的条件叫边界条件。对曲线附加的其它条件都叫约束条件。

例题4中的$y=y(x)$只须满足边界条件（1.4）。可是，例题5中的空间曲线$y=y(x)$，$z=z(x)$除了必须满足边界条件（1.5）外，还须满足约束条件（1.6）。例题6也有约束条件（1.9）。

1.3 泛函的绝对极值、相对极值

一个函数$y=f(x)$的相对极值同它的绝对极值在意义上有区别。如果点$x=x_0$是$y=f(x)$的相对极大点，那末函数值$f(x_0)$是同x_0点的某一个邻域$|x-x_0|<\delta$上的函数值$f(x)$相比较来说的。也就是说

$$f(x_0)\geqslant f(x)，当 |x-x_0|<\delta 时$$

所以，相对极值就是邻域极值。与前者不同，绝对极值是同函数的定义域中所有的x点的函数值$f(x)$相比较而说的。

泛函$J[y(x)]$也有两种极值：绝对极值与相对极值。

定义 一个变分问题一定包含一些附加条件（边界条件或约束条件）。满足变分问题中所提出的附加条件的任意一条曲线，叫做该变分问题的容许曲线。

例如，前面的例题5中，在给定的曲面$\varphi(x,y,z)=0$上的任一条曲线，如果它通过两个定点P_1与P_2，则这条曲线就叫做例5的变分问题的容许曲线。

定义 对应于一条曲线$y=\overline{y}(x)$的泛函的值$J[\overline{y}(x)]$叫做该泛函的绝对极大值，如果

$$J[\overline{y}(x)]\geqslant J[y(x)] \tag{1.11}$$

对所有的容许曲线成立；而$J[\overline{y}(x)]$叫做该泛函的绝对极小值，如果

$$J[\overline{y}(x)]\leqslant J[y(x)] \tag{1.12}$$

对所有的容许曲线$y(x)$成立。
而曲线$y=\overline{y}(x)$叫做该泛函的绝对极大线（或绝对极小线）。

如果我们所说的不是泛函$J[y(x)]$的绝对极值$J[\overline{y}(x)]$，而是相对极值$J[\overline{y}(x)]$，那末同前述不一样，不是同所有的容许曲线$y(x)$所对应的泛函$J[y(x)]$的值比较大小，而只同与$\overline{y}=\overline{y}(x)$邻近的容许曲线$y=y(x)$来比较大小。

定义 设有一条固定的曲线$y=\overline{y}(x)$，如果任一条曲线$y=y(x)$满足不等式

$$|y(x)-\overline{y}(x)|<\delta \qquad (x_0\leqslant x\leqslant x_1)$$

则称曲线$y=y(x)$是在曲线$y=\overline{y}(x)$的零阶的δ邻域内。

当曲线$y(x)$处于$\overline{y}(x)$的零阶δ邻域内，且δ很小时，则两条曲线的纵坐标显然相差很小，然而它们在相同的x点的斜率可能相差不小，如图1.3所示。

我们以后时常需要考虑两个函数$y(x)$与$\overline{y}(x)$，不但它们本身相差很小，而且它们的一阶、二阶、……，一直到k阶的导函数都必须相差很小。为此，引进曲线$\overline{y}(x)$的k阶δ邻域定义：如果对于闭区域$[x_0, x_1]$的所有的x，下面$(k+1)$个不等式成立

$$|y(x)-\overline{y}(x)|<\delta \qquad (\delta>0)$$

$$|y'(x)-\overline{y}'(x)|<\delta \qquad (\delta>0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|y^{(k)}(x)-\overline{y}^{(k)}(x)|<\delta \qquad (\delta>0)$$

则称曲线 $y(x)$ 是在曲线 $\overline{y}(x)$ 的 k 阶 δ 邻域内。

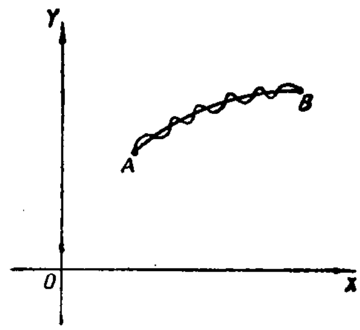

图 1.3

定义 如果不等式

$$J[\overline{y}(x)]\geqslant J[y(x)]$$

对 $\overline{y}(x)$ 的某一个 k 阶邻域内的所有的容许曲线成立，则称 $J[\overline{y}(x)]$ 是 k 阶邻域的相对极大值。

如果不等式

$$J[\overline{y}(x)]\leqslant J[y(x)]$$

对 $\overline{y}(x)$ 的某一个 k 阶邻域内的所有的容许曲线成立，则称 $J[\overline{y}(x)]$ 是 k 阶邻域的相对极小值。

习 题 1

1．说明下列各名词的意义：

（1）泛函 $J[y_1(x),\ y_2(x)]$；

（2）函数类 C_m；

（3）变分问题；

（4）变分问题的边界条件与约束条件；

（5）变分问题的容许曲线；

（6）泛函 $J[y(x)]$ 的绝对极小值、相对极小值。

2．

（1）试述下列泛函的定义域：

i) $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y^2+2xyy')dx$

ii) $J[y(x)]=\int_0^1(2x+y'''^2)dx$

iii) $J[y(x),z(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y'^2+z'^2+y'z')dx$

（2）设泛函 $J[y(x)]$ 在曲线 $y=\overline{y}(x)$ 上取绝对极小值 $J[\overline{y}(x)]$，而在曲线 $y=\overline{y}_0(x)$ 上取零阶邻域

$$|y(x)-\overline{y}_0(x)|<\delta \qquad (x_0\leqslant x\leqslant x_1)$$

的相对极小值 $J[\overline{y}_0(x)]$，而且 $J[y(x)]$ 又在曲线 $y=\overline{y}_1(x)$ 一阶邻域

$$|y(x)-\overline{y}_1(x)|<\delta$$
$$|y'(x)-\overline{y}_1'(x)|<\delta \qquad (x_0\leqslant x\leqslant x_1)$$

上取相对极小值。

讨论对应于 $\overline{y}(x)$、$\overline{y}_0(x)$、$\overline{y}_1(x)$ 的泛函极小值的大小关系。

如果把题中的“极小值”改为“极大值”，结论是怎样？

3．按照下列各题中的题意，立出数学式，说明它们都是变分问题。这些变分问题是求极大值还是求极小值？指出这些变分问题的容许曲线应满足什么条件？它们是否受有约束条

件？

（1）求长度已给定是 l_0 的平面曲线 $\widehat{P_0P_1}$，它同 x 轴所包围的面积最大〔设这平面的两个定点是 $P_0(x_0,0)$，$P_1(x_1,0)$〕。

（2）在通过两定点 $P_0(x_0,0)$，$P_1(x_1,0)$ 的平面曲线中，要找具有下述性质的一条曲线，它同 x 轴所包围的面积等于已知常数 A，而且它的弧长 $\widehat{P_0P_1}$ 最短。

（3）在通过两定点 $P_0(x_0,0)$，$P_1(x_1,0)$ 的所有曲线中，求这样的一条曲线 $\widehat{P_0P_1}$，把它绕 x 轴旋转时所生成的旋转曲面的面积 S 最小。

（4）光学中的 Fermat 原理。据光学，当光线在不均匀的各向同性的介质中传播时，传播速度 v 是随着点 $P(x,y,z)$ 而变，即 $v=v(x,y,z)$。又据 Fermat 原理，当光线从一点 P_0 传到另一点 P_1 时，它沿着最节省时间的路线传播。

把Fermat原理化为变分问题，立出数学式。

（提示：从数学观点看，本问题同最速下降线问题是同一类型的问题）

§2 最简单的变分问题

本节内容提要 证明泛函的容许曲线 $y=\overline{y}(x)$ 是极值线的**必要条件**是：$y=\overline{y}(x)$ 必须满足一个常微分方程（叫欧拉方程）。

我们将从最简单的情况开始来讲述这个问题。将考虑如下形式的泛函

$$J=J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F\Big(x,\ y\ (x),y'(x)\Big)dx \tag{2.1}$$

的变分问题，它的容许曲线是 $C_1[x_0,x_1]$ 类中的曲线，而且满足边界条件

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1 \tag{2.2}$$

也就是，所有的容许曲线都应经过两个定点 $P_0(x_0,y_0)$，$P_1(x_1,y_1)$。

假定（2.1）中被积函数 $F(x,y,y')$ 对 x，y，y' 具有连续的两阶偏导数（以后都是这样假设，不再申明）。

本节中将假设 $y=\overline{y}(x)$ 是泛函（2.1）在边界条件（2.2）下的极大线或极小线。

2.1 欧拉方程的推导

变分法的基本辅助定理 设 $G(x)$ 是一个在闭区间 $[x_0,\ x_1]$ 连续的函数，如果对于 $C_2[x_0,x_1]$ 类的任意一个函数 $\eta(x)$ 都有

$$\int_{x_0}^{x_1}G(x)\eta(x)dx=0 \tag{i}$$

则有

$$G(x)\equiv 0\quad（当 x_0\leqslant x\leqslant x_1） \tag{ii}$$

证：用反证法。设有一个 x_2 点（$x_0<x_2<x_1$）使 $G(x_2)\neq 0$，又设 $G(x_2)>0$，据 $G(x)$ 的连续性，则必有 x_2 点的一个微小的 δ 邻域（$x_2-\delta<x<x_2+\delta$）使

$$G(x)>0 \tag{iii}$$

令 $x_2-\delta=\overline{x_0}$，$x_2+\delta=\overline{x_1}$，则据上述，当 x 在邻域

$$\overline{x_0}<x<\overline{x_1}$$

时，不等式（iii）能成立。

因为 $\eta(x)$ 可以任意选取，我们选

$$\eta(x)=\begin{cases}(x-\overline{x}_0)^2\cdot(x-\overline{x}_1)^2 & (\overline{x}_0<x<\overline{x}_1)\\ 0 & (x\text{ 不在这邻域})\end{cases} \tag{iv}$$

显然，所选的$\eta(x)$属于C_2类。据定理假设，则有

$$\int_{x_0}^{x_1}G(x)\eta(x)dx=0 \tag{v}$$

又据（iv）式与（iii）式，则有

$$\int_{x_0}^{x_1}G(x)\eta(x)dx$$

$$=\int_{\overline{x}_0}^{\overline{x}_1}G(x)(x-\overline{x}_0)^2(x-\overline{x}_1)^2dx>0$$

这将与（V）矛盾。故$G(x_2)>0$是不可能的。同理可证$G(x)<0$也是不可能的。

故 $G(x)=0$ （定理证毕）

本定理也可以推广到多元函数的G。例如，对于二元函数$G(x,y)$则有如下辅助定理：

如果对于任意一个在平面区域D上连续的函数$\eta(x,y)$都有

$$\iint_D G(x,y)\eta(x,y)dxdy=0 \tag{vi}$$

则

$$G(x,y)\equiv 0 \quad (\text{在}D\text{上})$$

将证定理：在边界条件（2.2）下的泛函（2.1）如果在容许曲线$y=\overline{y}(x)$上取相对极大值或极小值，则$y=\overline{y}(x)$必须满足欧拉方程(2.11a)。

推导过程的主要思想线索是把泛函（2.1）的极值问题化为一个函数的极值问题。为此，将引进容许曲线的以α为参数的α曲线族。

令函数$\eta(x)$是任意的一个函数，在区间〔x_0，x_1〕上具有一阶（或高阶）连续可微性，而且满足边界条件：

$$\eta(x_0)=\eta(x_1)=0 \tag{2.3}$$

现在考虑，以α为参数的曲线族：

$$y=\overline{y}(x)+\alpha\eta(x) \tag{2.4}$$

每一个参数值α对应着曲线族（2.4）中一条曲线，特别是$\alpha=0$对应着极值线$y=\overline{y}(x)$。反过来说，族（2.4）的任意一条曲线也对应着参数α的一个值。总之，参数α与曲线族（2.4）的曲线一一对应。

证明：族（2.4）中的每一条曲线都是我们所考虑的变分问题的容许曲线。

因为我们假定

$$\overline{y}(x)\in C_1[x_0,x_1],\quad \eta(x)\in C_1[x_0,x_1]$$

所以，$y=\overline{y}(x)+\alpha\eta(x)$也属于$C_1[x_0,x_1]$。又因为条件（2.3），所以有

$$y(x_0)=\overline{y}(x_0)+\alpha\eta(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=\overline{y}(x_1)+\alpha\eta(x_1)=y_1$$

既然α的一个实值对应着容许曲线族（2.4）中的一条曲线，而族（2.4）中一条曲线又对应着泛函（2.1）的一个数值$J[\overline{y}(x)+\alpha\eta(x)]$。这样一来，在曲线族（2.4）上的泛函（2.1）$J[\overline{y}(x)+\alpha\eta(x)]$可间接地看作是自变数$\alpha$的函数$I(\alpha)$，即

$$I(\alpha)=J[\overline{y}(x)+\alpha\eta(x)] \tag{2.5}$$

因为当 $\alpha=0$ 时对应着极值线$\overline{y}(x)$，所以$\alpha=0$是函数$I(\alpha)$的极值。据微分学定理，有

$$I'(0)=0 \tag{2.6}$$

求$I'(\alpha)$。从（2.5）、（2.1）得

$$I(\alpha)=J[\overline{y}(x)+\alpha\eta(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\ \overline{y}+\alpha\eta,\ \overline{y}'+\alpha\eta')dx$$

用积分号下微分法，求对α的导数，则得

$$I'(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}F(x,\ \overline{y}+\alpha\eta,\ \overline{y}'+\alpha\eta')dx \tag{2.7}$$

因

$$F=F(x,y,y')$$

而

$$y=\overline{y}(x)+\alpha\eta(x),\quad y'=\overline{y}'(x)+\alpha\eta'(x)$$

所以用复合函数求导数规则来计算，得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\alpha}F(x,\overline{y}+\alpha\eta,\ \overline{y}'+\alpha\eta')\\&=F_y(x,\overline{y}+\alpha\eta,\ \overline{y}'+\alpha\eta')\eta(x)+F_{y'}(x,\overline{y}+\alpha\eta,\ \overline{y}'+\alpha\eta')\eta'(x)\\&=F_y\eta(x)+F_{y'}\eta'(x)\end{aligned}$$

把上式代入（2.7）则得

$$I'(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}[F_y\cdot\eta(x)+F_{y'}\cdot\eta'(x)]dx \tag{2.7a}$$

用分部积分法于上式第二项的积分，而且注意条件（2.3），得

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1}F_{y'}\cdot\eta'(x)dx&=F_{y'}\cdot\eta(x)\Big|_{x=x_0}^{x=x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\frac{dF_{y'}}{dx}dx\\&=-\int_{x_0}^{x_1}\frac{dF_{y'}}{dx}\eta(x)dx\end{aligned}$$

把上式代入式（2.7a）得

$$I'(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}\Big[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\Big]\eta(x)dx \tag{2.8}$$

上式中的

$$F_y=F_y(x,\ \overline{y}+\alpha\eta,\ \overline{y}'+\alpha\eta') \tag{2.8a}$$

$$\frac{d}{dx}F_{y'}=\frac{d}{dx}F_{y'}(x,\ \overline{y}+\alpha\eta,\ \overline{y}'+\alpha\eta')$$

所以，在（2.8a）中，令 $\alpha=0$，则从（2.8）式得

$$I'(0)=\int_{x_0}^{x_1}\Big[F_y(x,\ \overline{y},\ \overline{y'})-\frac{d}{dx}F_{y'}(x,\ \overline{y},\ \overline{y'})\Big]\eta(x)dx \tag{2.9}$$

因为$I(0)$是函数$I(\alpha)$的极值，所以上式的$I'(0)$应该等于0。这样推得

$$I'(0)=\int_{x_0}^{x_1}\Big[F_y(x,\ \overline{y},\ \overline{y'})-\frac{d}{dx}F_{y'}(x,\overline{y},\ \overline{y}')\Big]\eta(x)dx=0 \tag{2.10}$$

当然，积分等于0，被积函数不一定恒等于0。但是，由于$\eta(x)$是任意取的函数〔除了边界条件（2.3）的限制外〕，根据前面所述的辅助定理，推得

$$F_y[x,\overline{y}(x),\overline{y}'(x)]-\frac{d}{dx}F_{y'}[x,\overline{y}(x),\overline{y}'(x)]\equiv 0 \tag{2.11}$$

也就是，极值线$y=\overline{y}(x)$必须满足关系式（2.11）。

定义 常微分方程

$$F_y(x,y,y')-\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y')=0 \tag{2.11 a}$$

叫做泛函（2.1）的欧拉方程。

由前面的推导，得

定理 1 容许曲线$y=\overline{y}(x)$是变分问题（2.1）、（2.2）的极值线的必要条件是：$y=\overline{y}(x)$是欧拉方程（2.11 a）的解。

定义 既满足欧拉方程（2.11a）又满足边界条件（2.2）的曲线叫驻值线。

应指出：定理 1 仅给出极值线的必要条件。满足必要条件的曲线叫驻值线，它未必就是极值线。这种情况，正如函数$y=f(x)$的驻点x_0未必一定是极值点一样。

2.2 从欧拉方程求变分问题的驻值线（方法与举例）

现在考虑欧拉方程

$$F_y(x,y,y')-\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y')=0$$

计算上式中的全导数，得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}F_{y'}[x,y(x),y'(x)]&=F_{xy'}\frac{dx}{dx}+F_{yy'}\frac{dy}{dx}+F_{y'y'}\frac{dy'}{dx}\\&=F_{xy'}+F_{yy'}y'+F_{y'y'}y''\end{aligned}$$

即

$$\frac{d}{dx}F_{y'}=F_{xy'}+F_{yy'}y'+F_{y'y'}y''$$

〔上式的$F_{y'}$，$F_{xy'}$，$F_{yy'}$，$F_{y'y'}$中的变元是x，y，y'；例如$F_{xy'}=F_{xy'}(x,y,y')$，……〕

把上式代入（2.11 a），则得的欧拉方程的另一形式：

$$F_y-(F_{xy'}+F_{yy'}y'+F_{y'y'}y'')=0 \tag{2.11 b}$$

从上式可看出，当$F_{y'y'}\neq 0$时，欧拉方程是二阶常微分方程。

例 1 求泛函

$$J[y(x)]=\int_1^2(y'+x^2y'^2)\,dx$$

的欧拉方程及方程的通解。

解：积分中被积函数$F=y'+x^2y'^2$，计算得

$$F_y=0,\quad F_{y'}=1+2x^2y'$$

据（2.11 a）式，欧拉方程是：

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0\quad -\frac{d}{dx}(1+2x^2y')=0$$

即

$$-\frac{d}{dx}(1+2x^2y')=-(4xy'+2x^2y'')=0$$

从上式约去$2x$后，得

$$xy''+2y'=0$$

它是二阶常微分方程。积分此方程

$$\int\frac{y''}{y'}dx+\int\frac{2}{x}dx=0$$

$$\ln y'+\ln x^2=\ln C_1$$

得

$$y'=\frac{C_1}{x^2}$$

再积分，得此常微分方程的通解

$$y=C_2-\frac{C_1}{x}$$

用边界条件（2.2）（两个式）可以确定该通解中的任意常数C_1，C_2。这样，就求得变分问题的驻值线。

一般说来，欧拉方程（2.11a）〔即(2.12)〕是二阶常微分方程，求它的通解通常很困难。但有五种特殊情况，在这些情况下容易求欧拉方程的解。下面，只讲述三种特殊情况，而把其它两种列入习题中，让读者自己考虑。首先应指出，泛函（2.11a）的积分式

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F[x,y(x),\ y'(x)]dx$$

中，被积函数$F(x,y,y')$通常是依赖于x,y,y'三个变元的。

特殊情况：1）F中不显含y'，即$F=F(x,y)$；

2）F中不显含y，即$F=F(x,y')$；

3）F中不显含x，即$F=F(y,y')$。

第三种情况时常出现，特别重要，请读者注意。

先讲情况1。在这种情况下，$F_{y'}\equiv 0$，所以欧拉方程（2.11a）变成

$$F_y(x,y)=0$$

上式不是微分方程。虽然我们可以从上式解出$y=y(x)$来，然而它未必满足边界条件。可见，在本情况下，变分问题通常无解答，如下例所示。

例2　求泛函

$$J[y]=\int_0^2\left(x^2y-\frac{y^2}{2}\right)dx$$

在边界条件$y(0)=0$，$y(2)=3$的驻值线。

解：$F=x^2y-\dfrac{y^2}{2}$（其中y'不出现），$F_{y'}=0$。在这种情况下，欧拉方程(2.11a)简化成为

$$F_y=x^2-y=0$$

从上式算得$y=x^2$。然而，它不满足边界条件。所以，在本情况下没有驻值线。

再说情况2。因为F不依赖于y，故$F_y\equiv 0$。所以，欧拉方程（2.11a）此时是

$$0-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$

即

$$\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y')=0$$