

高等学校教学参考书

高等工程数学

下册

GAODENG

GONGCHENG

SHUXUE

中国铁道出版社

内 容 提 要

本书分上、下两册。下册内容包括变分法、矢量与场论、数值计算方法和概率论的基本理论，以及它们的一些应用。

本书适用于工程技术人员、工科大学高年级学生、教师自学，也可作为工科研究生的试用教材。

高等学校教学参考书

高等工程数学

下 册

黄克欧 湛安琦 范子亮 奚载青 编

中国铁道出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{4}$ 印张：28.5 字数：720千

1982年9月第1版 1982年9月第1次印刷

印数：0001—9,000册 定价：2.95元

目 录

第五章 变分法

- § 1 变分法的基本概念 1
 - 1.1 泛函定义及举例 1
 - 1.2 变分问题举例 3
 - 1.3 泛函的绝对极值、相对极值 5
 - 习 题 1 6
- § 2 最简单的变分问题 7
 - 2.1 欧拉方程的推导 7
 - 2.2 从欧拉方程求变分问题的驻值
线(方法与举例) 10
 - 2.3* 活动端点的变分问题 15
 - 习 题 2 17
- 附录 泛函 $J[y(x)]$ 的极值判别方法 19
 - 习 题 22
- § 3 泛函的变分概念 23
 - 3.1 多元函数的一次微分、
二次微分 23
 - 3.2 泛函的一次变分 δJ 24
 - 3.3 二次变分的定义 29
 - 3.4 泛函的一次、二次变分同改变
量 ΔJ 间的关系 30
 - 3.5 泛函的导数同变分间的关系 32
 - 3.6 函数的微分与泛函的变分的
比较 33
 - 3.7 泛函的极值定理 34
 - 3.8 变分运算规则 36
 - 3.9 例题 37
 - 习 题 3 40
- § 4 其它类型的变分问题 41
 - 4.1 $F[x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}]$ 类型
的变分问题 41
 - 4.2 $F(x, y_1, y_2, \dots, y_n; y'_1,$
 $y'_2, \dots, y'_n)$ 类型的变分问题 43
 - 4.3 依赖于二元函数 $z(x, y)$ 的
泛函 47
 - 4.4 依赖于二元函数 $z(x, y)$ 的泛函的
积分式中含有二阶偏导数的情况 51

- 习 题 4 52
- 附录 Dirich Let 原理 53
- § 5 受有约束的变分问题 56
 - 5.1 受有函数形式的约束的变分
问题 57
 - 5.2 受有积分形式的约束的变分
问题 66
 - 习 题 5 70
- § 6 常微分方程的固有值问题, 它同
变分问题的关系 74
 - 6.1 什么是常微分方程的固有值
问题 74
 - 6.2 固有函数的一些性质 75
 - 6.3 常微分方程的固有值问题同变
分问题间的关系 80
- § 7 哈密尔顿 (Hamilton) 原理
及其应用 82
 - 7.1 哈密尔顿原理叙述 (直角
坐标系) 82
 - 7.2 广义坐标系下的哈密尔顿原理 85
 - 7.3 哈密尔顿原理应用举例 87
 - 7.4 哈密尔顿原理的应用 (续) 89
 - 习 题 7 92

第六章 向量与场论

- § 1 向量代数简介 93
 - 1.1 向量与数量 96
 - 1.2 矢量的加、减法 96
 - 1.3 矢量的坐标表示 97
 - 1.4 矢量的乘法——数积、矢积、
混合积 98
 - 1.5 应用举例 100
 - 习 题 1 102
- § 2 向量分析 103
 - 2.1 向量函数 103
 - 2.2 向量函数的极限 104
 - 2.3 向量函数的连续 105
 - 2.4 向量函数的导数 105

2.5 矢量函数的微分.....108

2.6 求导公式及举例.....108

2.7 矢量函数的积分.....111

2.8 应用——力学问题.....113

 习 题 2.....116

§ 3 场..... 118

 3.1 数量场与矢量场.....118

 3.2 点函数.....118

 3.3 数量场的等值面与矢量场的等量线.....119

 习 题 3.....121

§ 4 数量场的梯度.....121

 4.1 方向导数.....121

 4.2 数量场的梯度.....123

 4.3 梯度的性质.....125

 4.4 应用举例.....126

 习 题 4.....127

§ 5 矢量场的散度.....128

 5.1 矢量场的通量.....128

 5.2 矢量场的散度.....130

 5.3 散度的计算.....132

 5.4 散度的性质及计算举例.....134

 5.5 高斯 (Gauss) 公式及其应用.....135

 习 题 5.....140

§ 6 矢量场的旋度.....141

 6.1 矢量场的环量.....141

 6.2 矢量场的旋度.....144

 6.3 旋度的计算.....146

 6.4 旋度的性质及举例.....148

 6.5 斯托克斯 (Stokes) 公式及格林 (Green) 公式.....150

 习 题 6.....153

§ 7 关于算符 ∇ 及 Δ154

 7.1 算符与公式.....154

 7.2 举例.....157

 习 题 7.....158

§ 8 几种常用的场.....159

 8.1 有势场.....159

 8.2 管形场.....161

 8.3 调和场与调和函数.....163

 习 题 8.....164

§ 9 曲线坐标及曲线坐标下的 ∇u 、 $\nabla \cdot \vec{a}$ 、 $\nabla \times \vec{a}$ 、 Δu165

9.1 曲线坐标.....165

9.2 正交曲线坐标.....167

9.3 正交曲线坐标下的 ∇u169

9.4 正交曲线坐标系下的 $\nabla \cdot \vec{a}$ 与 $\nabla \times \vec{a}$171

9.5 正交曲线坐标系下的 Δu174

9.6 柱面坐标与球面坐标下的 ∇u 、 $\nabla \cdot \vec{a}$ 、 $\nabla \times \vec{a}$ 、 Δu 及其它有关量.....175

 习 题 9.....176

§ 10* 应用问题举例.....177

 10.1 电磁场方面的应用——麦克斯韦方程组.....177

 10.2 流体力学方面的应用——连续性方程.....181

 10.3 热传导方面的应用——热传导方程.....182

 习 题 10.....184

第七章 数值计算方法

§ 1 误差.....185

§ 2 线性方程组.....188

 2.1 引言.....188

 2.2 高斯消去法.....188

 2.3 无回代主元素法 (约当法).....190

 2.4 行列式、逆矩阵.....193

 2.5 消去法的误差.....195

 2.6 简单迭代法 (雅可比迭代法).....198

 2.7 松弛迭代法·赛德尔迭代法.....202

 2.8 对称方程组的平方根法.....204

 2.9 三对角方程组的追赶法.....206

§ 3 一元非线性方程式.....209

 3.1 求实根的区间二分法.....209

 3.2 弦位法.....210

 3.3 牛顿法.....211

 3.4 抛物线法.....212

§ 4 矩阵的特征值、特征向量.....214

 4.1 特征值问题.....214

 4.2 求绝对值最大的特征值及其对应的特征向量的乘幂法及反乘幂法.....215

 4.3 实对称矩阵的雅可比方法.....219

 4.4 求矩阵全部特征值的QR方法..... 223

- § 5 数值逼近238
 - 5.1 拉格朗日插值公式.....238
 - 5.2 牛顿插值公式·差商.....241
 - 5.3 等距插值点的插值公式·差分.....244
 - 5.4 样条函数插值法.....248
 - 5.5 曲线的拟合·最小二乘法.....251
- § 6 数值微分和数值积分255
 - 6.1 数值微分.....255
 - 6.2 数值微分的误差.....259
 - 6.3 牛顿-柯特斯数值积分公式259
 - 6.4 复化求积公式.....262
 - 6.5 样条函数数值积分法.....264
- § 7 常微分方程初值问题265
 - 7.1 折线法与改进折线法.....265
 - 7.2 龙格-库塔法267
 - 7.3 一阶微分方程组初值问题.....269
- § 8 常微分方程边值问题270
 - 8.1 边值问题的一般概念.....270
 - 8.2 差分方法及差分方程的追赶法.....271
 - 8.3 样条函数方法.....274
- § 9 拉普拉斯方程277
 - 9.1 拉普拉斯方程的差分方程.....277
 - 9.2 差分方程解的存在、唯一性.....282
 - 9.3 差分方程的迭代解法.....283
 - 9.4 一般二阶椭圆型方程的差分解法.....286
- § 10 热传导方程287
 - 10.1 热传导方程的显式差分方程.....287
 - 10.2 隐式差分方程及其追赶解法.....289
 - 10.3 差分方程的收敛性及稳定性.....290
 - 10.4 第三边值问题的差分方程.....295
- § 11 波动方程296
 - 11.1 初值问题的差分方程.....296
 - 11.2 混合问题的差分方程.....297
 - 11.3 差分方程的收敛性及稳定性.....300

第八章 概率论

- § 1 事件与概率302
 - 1.1 样本空间.....302
 - 1.2 事件.....303
 - 1.3 事件的运算.....304
 - 1.4 频率.....305
 - 1.5 概率的定义.....307
 - 1.6 古典型的概率计算.....310

- 1.7 条件概率.....315
- 1.8 事件的独立性.....318
 - 习题 1322
- § 2 随机变量327
 - 2.1 随机变量.....327
 - 2.2 分布函数.....330
 - 2.3 离散型随机变量.....331
 - 2.4 连续型随机变量.....334
 - 2.5 随机向量.....336
 - 2.6 随机变量的独立性.....341
 - 习题 2345
- § 3 数字特征350
 - 3.1 数学期望.....350
 - 3.2 方差.....358
 - 3.3 车贝晓夫不等式.....362
 - 3.4 相关系数.....363
 - 3.5 矩.....366
 - 3.6 中数.....368
 - 习题 3370
- § 4 常用离散型概率分布374
 - 4.1 0-1分布374
 - 4.2 均匀分布.....375
 - 4.3 二项分布.....375
 - 4.4 超几何分布.....380
 - 4.5 普阿松分布.....382
 - 4.6 几何分布.....385
 - 4.7 巴斯卡分布.....387
 - 4.8 多项分布.....388
 - 习题 4390
- § 5 常用连续型概率分布392
 - 5.1 均匀分布.....392
 - 5.2 正态分布.....393
 - 5.3 指数分布.....399
 - 5.4 Γ -分布400
 - 5.5 B -分布401
 - 5.6 韦布分布.....401
 - 5.7 拉普拉斯分布.....402
 - 5.8 多元正态分布.....403
 - 习题 5406
- § 6 随机变量的函数409
 - 6.1 随机变量的函数分布.....409
 - 6.2 随机向量的函数的分布.....413
 - 6.3 顺序统计量的分布.....416
 - 6.4 随机向量的变换.....418

6.5 χ^2 -分布	421	7.7 格德伯格定理	440
6.6 t -分布	424	习题 7	441
6.7 F -分布	425	附录一 常用分布表	444
习题 6	427	附录二 二项分布 $\sum_{k=0}^r p_k(n, p)$ 的 数值表	447
§ 7 极限定理	430	附录三 普阿松分布 $\sum_{k=0}^r p_k(\lambda)$ 的数值表	448
7.1 大数定律	430	附录四 正态分布数值表	450
7.2 车贝晓夫大数定律	431		
7.3 贝努里大数定律	434		
7.4 中心极限定理	435		
7.5 林德伯格-勒维定理	435		
7.6 德莫佛-拉普拉斯定理	437		

第五章 变分法

§ 1 变分法的基本概念

变分法在力学、物理及工程技术中都有广泛的应用。力学中的哈密顿原理就是借助于变分原则来叙述的。某些对实际问题很有用的数学方法，例如有限元法、最优化控制、样条函数的理论等都同变分法有关。

变分法是研究求泛函的极大值或极小值的方法，凡是求泛函的极大值或极小值问题都叫做变分问题。

1.1 泛函定义及举例

泛函 (Functional) 概念同函数 (Function) 概念有相同处，亦有相异处。

粗浅地说：一元函数 $y=f(x)$ 中的因变数 y 的值是依赖着自变数 x 而变的；多元函数 $u=f(x_1, \dots, x_n)$ 中的因变数 u 的值是依赖着多个自变数 x_1, \dots, x_n 的值而变的。可是，一元的泛函 $J=J[y(x)]$ 中的因变数 J 的值是依赖着函数 $y(x)$ 而变的。与此类似，多元的泛函 $J=J[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]$ 的因变数 J 的值是依赖着多个函数 $y_1(x), \dots, y_n(x)$ 而变的。

例 1 泛函

$$J[y] = \int_0^1 [y^2 + y'^2] dx \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

中的 $J=J[y(x)]$ 的值随着所给定的函数 $y(x)$ 而变。

例如，给定 $y=y(x)=x^2$ 时，

则

$$J[x^2] = \int_0^1 [(x^2)^2 + (2x)^2] dx = \frac{1}{5} + \frac{4}{3} = \frac{23}{15}$$

当 $y=y(x)=x+1$ 时，

则

$$J[x+1] = \int_0^1 [(x+1)^2 + 1^2] dx = \frac{10}{3}$$

当 $y=y(x)=\sin x$ 时，

则

$$J[\sin x] = \int_0^1 (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = 1$$

由此可见，对于不同的函数 $y(x)$ ，对应着泛函 J 的不同的值。

请读者自己计算，填下列的表：

设
$$J[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + y'^2) dx$$

函数 $y(x)$	所对应的泛函 $J[y(x)]$ 的值	函数 $y(x)$	所对应的泛函 $J[y(x)]$ 的值
$y(x) = 1 - x$	$J[y(x)] =$	$y(x) = \cos x$	$J[y(x)] =$
$y(x) = \frac{1}{3}x^3$	$J[y(x)] =$	$y(x) = \frac{1}{x+1}$	$J[y(x)] =$

上面所举的例子都是依赖于一个函数 $y(x)$ 的泛函，下面将举依赖于两个函数的泛函的例子。

例 2 如果一质点在保守力场中，从定点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 运动到另一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 时，据力学原理，力对质点所做的功 W 与路径无关，只同路径的两端点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 与 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 的位置有关，即

$$W = W(P_0, P_1) = W(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1)$$

因为 (x_0, y_0, z_0) 是定点，所以，功 W 是 (x_1, y_1, z_1) 的函数。

与上述不同，如果质点是在非保守力场中运动，据力学原理，则功 W 同运动路线方程

$$y = y(x), z = z(x)$$

有关，即

$$W = W[y(x), z(x)]$$

也就是，在这情况下，功 W 是路线方程 $y = y(x), z = z(x)$ (两个函数) 的泛函。

由前例可见：

i) 函数 $y = f(x)$ ：自变数 x 对应着函数值 y (即变数 x 对应着因变数 y)。

ii) 泛函 $J = J[y(x)]$ ：自变元 $y(x)$ 对应着泛函 $J[y(x)]$ 的值 (即函数 $y(x)$ 对应着因变数 J)。

下面，叙述泛函的定义。

定义 如果因变数 J 与某一函数类 $\{y(x)\}$ 中的函数存在着依赖关系，该函数类 $\{y(x)\}$ 中每一个函数 $y(x)$ 都对应着 J 的一个确定的值，则称 J 是这个函数类 $\{y(x)\}$ 的泛函。函数类 $\{y(x)\}$ 称为此泛函的定义域。

例如 泛函

$$J = J[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + y'^2) dx$$

J 对于自变元 $y(x)$ 的依赖关系由上面的积分式给出。然而我们必须规定自变元 $y(x)$ 所属的函数类 (即 $y(x)$ 不可以任意取)，否则 $J[y(x)]$ 可能没有确定值。例如，取 $y(x) = \frac{1}{x}$ ，则

从上式积分得 $J = \infty$ ，即 $J\left[\frac{1}{x}\right] = \infty$ 。也就是说，对应于 $y(x) = \frac{1}{x}$ 的 J 没有确定的值。

又如，取 $y(x) = \frac{1}{x-1}$ 也是这样。这些函数 $\frac{1}{x}, \frac{1}{x-1}, \frac{1}{x^2}$ 都不在此泛函的定义域中。

一般说，如果泛函是由下列积分构成的：

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y', y'', \dots, y^{(m)}) dx \quad (1.1)$$

而被积函数 F 中含有 $y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x)$ 。为了保证 $J[y(x)]$ 有确定值，习惯上规定泛函 (1.1) 式的 $y(x)$ 是属于 $C_m[a, b]$ 类，即自变元 $y(x)$ 必须是在闭区间 $[a, b]$ 上的 m 次连续可导的函数。

定义 在闭区间 $[x_0, x_1]$ 上，有一阶，二阶，……，一直到 n 阶连续的导函数的函数全体叫做在区间 $[x_0, x_1]$ 上 n 阶连续的函数类，将用记号 $C_n[x_0, x_1]$ 或 C_n 表示它。

例3 设 $\{y(x)\}$ 是 $C_0[a, b]$ 的函数类, 即这函数类中任一个函数 $y(x)$ 都在闭区间 $a \leq x \leq b$ 上连续, 令 M 是 $y(x)$ 在该区间的最大值, 即

$$M = \max_{a \leq x \leq b} y(x)$$

则, M 是 $y(x)$ 的泛函, 其定义域就是函数类 $C_0[a, b]$ 。

1.2 变分问题举例

所谓变分问题, 就是求泛函的极小值 (或极大值) 问题。

定义 设有泛函

$$J = J[y(x)]$$

如果 $\bar{y}(x)$ 是这泛函的定义域中一个函数, 而且满足某些边界条件, 那么:

i) 如果对于定义域中的满足相同边界条件的所有的 $y(x)$ 都有

$$J[\bar{y}(x)] \leq J[y(x)]$$

则称 $J[\bar{y}(x)]$ 是这泛函的 (绝对) 极小值, 而 $y = \bar{y}(x)$ 称为极小线。

ii) 同样地, 如果有

$$J[\bar{y}(x)] \geq J[y(x)]$$

则称 $J[\bar{y}(x)]$ 是这泛函的 (绝对) 极大值, 而 $y = \bar{y}(x)$ 称为极大线。

下面, 将举具体的例子来阐明变分问题。

例4 (最速下降线) 如图1.1所示, 在 OXY 平面上要找一条曲线弧 $\widehat{OP_1}$, 具有这样的性质: 当一个质点受重力作用沿着这曲线段从 O 点 (坐标原点) 滑到另一定点 $P_1(x_1, y_1)$ 时, 所需的时间 T 最小, 这样的曲线叫最速下降线。

初看起来, 似乎沿着直线段 OP_1 下降时间最节省。实际上不是这样, 因为本问题不仅要考虑路程的长短, 而且还要考虑速度 $v = v(x, y)$ 的快慢。虽然沿着直线段路程最短, 然而运动的速度 v 增加得不够快。显然, 从 O 点运动到 P_1 点所需时间 T 是路程 $y = y(x)$ 的泛函, 即

$$T = J[y(x)] \quad (1.2)$$

所以, 本问题就是求泛函 (1.2) 的极小值。

下面, 将求出 T 对 $y(x)$ 的依赖关系式。

从力学得知, $\frac{m}{2}v^2 = mgy$, 故得

$$v = \sqrt{2gy}$$

又因 $\frac{ds}{dt} = v$, 故得

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

把上式积分, 得

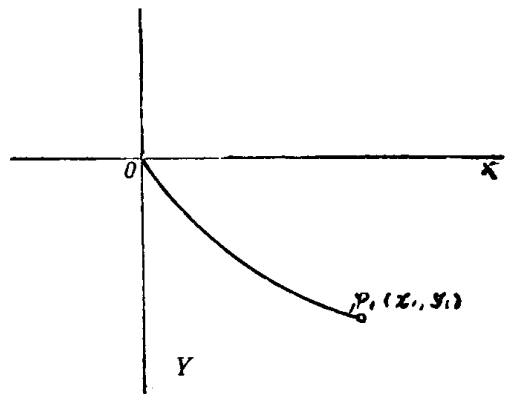


图 1.1

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

即

$$T = T[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx \quad (1.3)$$

上面的积分式就是泛函 T 对于路线 $y(x)$ 的依赖关系式。因为按照规定路线 $y=y(x)$ ，必须通过两个定点 $O(0,0)$ ， $P_1(x_1, y_1)$ ，所以 $y=y(x)$ 必须满足两个边界条件

$$y|_{x=0} = 0, \quad y|_{x=x_1} = y_1 \quad (1.4)$$

这样，求最速下降线问题就化为求泛函(1.3)在边界条件(1.4)下的最小值问题。

本题的求解方法见§2，例5。

例5 (测地线问题) 如图1.2所示，设 $\varphi(x, y, z) = 0$ 是给定的一个曲面，而 $A(x_1, y_1, z_1)$ ， $B(x_2, y_2, z_2)$ 是曲面的两个定点。在该曲面上通过这两个点 A 、 B 的所有曲线

$$y=y(x), \quad z=z(x)$$

中，试求弧长最短的一条。

据题意，立数学式如下：

因为曲线 $y=y(x)$ ， $z=z(x)$ 通过 $A(x_1, y_1, z_1)$ 与 $B(x_2, y_2, z_2)$ ，所以它们应满足边界条件

$$y(x_1) = y_1, \quad z(x_1) = z_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad z(x_2) = z_2 \quad (1.5)$$

因为曲线 $y(x)$ ， $z(x)$ 是曲面 $\varphi(x, y, z) = 0$ 上的曲线，所以它们应满足约束条件

$$\varphi[x, y(x), z(x)] = 0 \quad (1.6)$$

该曲线的弧长，据微积分公式是

$$s[y, z] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2+z'^2} dx \quad (1.7)$$

即 $s[y, z]$ 是依赖于两个函数 $y(x)$ ， $z(x)$ 的泛函。

由上式可见，本问题是在边界条件(1.5)以及约束条件(1.6)下，求(1.7)式的泛函 $s[y(x), z(x)]$ 的极小值(解答见§5，例1)。

例6 (等周问题) 求长度为一定的封闭曲线，使它所包围的面积为极大。

设封闭曲线的参数表示式是

$$x=x(t), \quad y=y(t) \quad (t_0 \leq t \leq t_1)$$

因为曲线是封闭的，故有自然条件

$$x(t_0) = x(t_1), \quad y(t_0) = y(t_1) \quad (1.8)$$

因为长度是定长，故有约束条件

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \text{常数} l_0 \quad (1.9)$$

据线积分的面积 S 公式，有

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x dy - y dx) \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)] dt \end{aligned} \quad (1.10)$$

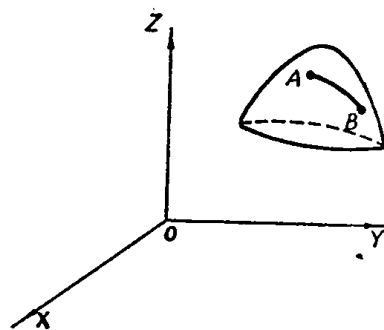


图 1.2

也就是,本问题是在自然条件(1.8)以及约束条件(1.9)下,求(1.10)式泛函 $S[x(t), y(t)]$ 的极大值(解答见§5)。

在前面三个例题中,有些条件叫边界条件,有些条件叫约束条件,这两种条件究竟有什么区别呢?

前三例题中泛函 J 所依赖的函数(自变元)的几何形象是曲线。施加在曲线的两个端点上的条件叫边界条件。对曲线附加的其它条件都叫约束条件。

例题4中的 $y=y(x)$ 只须满足边界条件(1.4)。可是,例题5中的空间曲线 $y=y(x), z=z(x)$ 除了必须满足边界条件(1.5)外,还须满足约束条件(1.6)。例题6也有约束条件(1.9)。

1.3 泛函的绝对极值、相对极值

一个函数 $y=f(x)$ 的相对极值同它的绝对极值在意义上有区别。如果点 $x=x_0$ 是 $y=f(x)$ 的相对极大点,那末函数值 $f(x_0)$ 是同 x_0 点的某一个邻域 $|x-x_0|<\delta$ 上的函数值 $f(x)$ 相比较来说的。也就是说

$$f(x_0) \geq f(x), \text{ 当 } |x-x_0| < \delta \text{ 时}$$

所以,相对极值就是邻域极值。与前者不同,绝对极值是同函数的定义域中所有的 x 点的函数值 $f(x)$ 相比较而说的。

泛函 $J[y(x)]$ 也有两种极值:绝对极值与相对极值。

定义 一个变分问题一定包含一些附加条件(边界条件或约束条件)。满足变分问题中所提出的附加条件的任意一条曲线,叫做该变分问题的容许曲线。

例如,前面的例题5中,在给定的曲面 $\varphi(x, y, z) = 0$ 上的任一条曲线,如果它通过两个定点 P_1 与 P_2 ,则这条曲线就叫做例5的变分问题的容许曲线。

定义 对应于一条曲线 $y = \bar{y}(x)$ 的泛函的值 $J[\bar{y}(x)]$ 叫做该泛函的绝对极大值,如果

$$J[\bar{y}(x)] \geq J[y(x)] \quad (1.11)$$

对所有的容许曲线成立;而 $J[\bar{y}(x)]$ 叫做该泛函的绝对极小值,如果

$$J[\bar{y}(x)] \leq J[y(x)] \quad (1.12)$$

对所有的容许曲线 $y(x)$ 成立。

而曲线 $y = \bar{y}(x)$ 叫做该泛函的绝对极大线(或绝对极小线)。

如果我们所说的不是泛函 $J[y(x)]$ 的绝对极值 $J[\bar{y}(x)]$,而是相对极值 $J[\bar{y}(x)]$,那末同前述不一样,不是同所有的容许曲线 $y(x)$ 所对应的泛函 $J[y(x)]$ 的值比较大小,而只同与 $\bar{y} = \bar{y}(x)$ 邻近的容许曲线 $y=y(x)$ 来比较大小。

定义 设有一条固定的曲线 $y = \bar{y}(x)$,如果任一条曲线 $y=y(x)$ 满足不等式

$$|y(x) - \bar{y}(x)| < \delta \quad (x_0 \leq x \leq x_1)$$

则称曲线 $y=y(x)$ 是在曲线 $y = \bar{y}(x)$ 的零阶的 δ 邻域内。

当曲线 $y(x)$ 处于 $\bar{y}(x)$ 的零阶 δ 邻域内,且 δ 很小时,则两条曲线的纵坐标显然相差很小,然而它们在相同的 x 点的斜率可能相差不小,如图1.3所示。

我们以后时常需要考虑两个函数 $y(x)$ 与 $\bar{y}(x)$,不但它们本身相差很小,而且它们的一阶、二阶、……,一直到 k 阶的导函数都必须相差很小。为此,引进曲线 $\bar{y}(x)$ 的 k 阶 δ 邻域定义:如果对于闭区域 $[x_0, x_1]$ 的所有的 x ,下面 $(k+1)$ 个不等式成立

$$|y(x) - \bar{y}(x)| < \delta \quad (\delta > 0)$$

$$|y'(x) - \bar{y}'(x)| < \delta \quad (\delta > 0)$$

.....

$$|y^{(k)}(x) - \bar{y}^{(k)}(x)| < \delta \quad (\delta > 0)$$

则称曲线 $y(x)$ 是在曲线 $\bar{y}(x)$ 的 k 阶 δ 邻域内。

定义 如果不等式

$$J[\bar{y}(x)] \geq J[y(x)]$$

对 $\bar{y}(x)$ 的某一个 k 阶邻域内的所有的容许曲线成立, 则称 $J[\bar{y}(x)]$ 是 k 阶邻域的相对极大值。

如果不等式

$$J[\bar{y}(x)] \leq J[y(x)]$$

对 $\bar{y}(x)$ 的某一个 k 阶邻域内的所有的容许曲线成立, 则称 $J[\bar{y}(x)]$ 是 k 阶邻域的相对极小值。

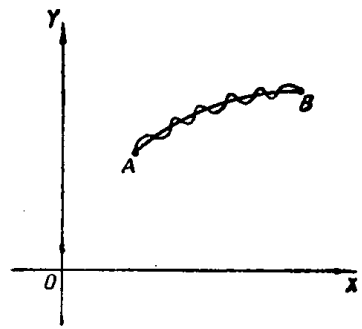


图 1.3

习 题 1

1. 说明下列各名词的意义:

- (1) 泛函 $J[y_1(x), y_2(x)]$;
- (2) 函数类 C_m ;
- (3) 变分问题;
- (4) 变分问题的边界条件与约束条件;
- (5) 变分问题的容许曲线;
- (6) 泛函 $J[y(x)]$ 的绝对极小值、相对极小值。

2.

(1) 试述下列泛函的定义域:

i) $J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + 2xyy') dx$

ii) $J[y(x)] = \int_0^1 (2x + y^m) dx$

iii) $J[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + z'^2 + y'z') dx$

(2) 设泛函 $J[y(x)]$ 在曲线 $y = \bar{y}(x)$ 上取绝对极小值 $J[\bar{y}(x)]$, 而在曲线 $y = \bar{y}_0(x)$ 上取零阶邻域

$$|y(x) - \bar{y}_0(x)| < \delta \quad (x_0 \leq x \leq x_1)$$

的相对极小值 $J[\bar{y}_0(x)]$, 而且 $J[y(x)]$ 又在曲线 $y = \bar{y}_1(x)$ 一阶邻域

$$|y(x) - \bar{y}_1(x)| < \delta$$

$$|y'(x) - \bar{y}'_1(x)| < \delta \quad (x_0 \leq x \leq x_1)$$

上取相对极小值。

讨论对应于 $\bar{y}(x)$ 、 $\bar{y}_0(x)$ 、 $\bar{y}_1(x)$ 的泛函极小值的大小关系。

如果把题中的“极小值”改为“极大值”, 结论是怎样?

3. 按照下列各题中的题意, 立出数学式, 说明它们都是变分问题。这些变分问题是求极大值还是求极小值? 指出这些变分问题的容许曲线应满足什么条件? 它们是否受有约束条

件?

(1) 求长度已给定是 l_0 的平面曲线 $\widehat{P_0P_1}$, 它同 x 轴所包围的面积最大 [设这平面的两个定点是 $P_0(x_0, 0), P_1(x_1, 0)$].

(2) 在通过两定点 $P_0(x_0, 0), P_1(x_1, 0)$ 的平面曲线中, 要找具有下述性质的一条曲线, 它同 x 轴所包围的面积等于已知常数 A , 而且它的弧长 $\widehat{P_0P_1}$ 最短。

(3) 在通过两定点 $P_0(x_0, 0), P_1(x_1, 0)$ 的所有曲线中, 求这样的一条曲线 $\widehat{P_0P_1}$, 把它绕 x 轴旋转时所生成的旋转曲面的面积 S 最小。

(4) 光学中的 Fermat 原理。据光学, 当光线在不均匀的各向同性的介质中传播时, 传播速度 v 是随着点 $P(x, y, z)$ 而变, 即 $v = v(x, y, z)$ 。又据 Fermat 原理, 当光线从一点 P_0 传到另一点 P_1 时, 它沿着最节省时间的路线传播。

把 Fermat 原理化为变分问题, 立出数学式。

(提示: 从数学观点看, 本问题同最速下降线问题是同一类型的问题)

§ 2 最简单的变分问题

本节内容提要 证明泛函的容许曲线 $y = \bar{y}(x)$ 是极值线的必要条件是: $y = \bar{y}(x)$ 必须满足一个常微分方程 (叫欧拉方程)。

我们将从最简单的情况开始来讲述这个问题。将考虑如下形式的泛函

$$J = J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (2.1)$$

的变分问题, 它的容许曲线是 $C_1[x_0, x_1]$ 类中的曲线, 而且满足边界条件

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \quad (2.2)$$

也就是, 所有的容许曲线都应经过两个定点 $P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1)$ 。

假定 (2.1) 中被积函数 $F(x, y, y')$ 对 x, y, y' 具有连续的两阶偏导数 (以后都是这样假设, 不再申明)。

本节中将假设 $y = \bar{y}(x)$ 是泛函 (2.1) 在边界条件 (2.2) 下的极大线或极小线。

2.1 欧拉方程的推导

变分法的基本辅助定理 设 $G(x)$ 是一个在闭区间 $[x_0, x_1]$ 连续的函数, 如果对于 $C_2[x_0, x_1]$ 类的任意一个函数 $\eta(x)$ 都有

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x)\eta(x)dx = 0 \quad (i)$$

则有

$$G(x) \equiv 0 \quad (\text{当 } x_0 \leq x \leq x_1) \quad (ii)$$

证: 用反证法。设有一个 x_2 点 ($x_0 < x_2 < x_1$) 使 $G(x_2) \neq 0$, 又设 $G(x_2) > 0$, 据 $G(x)$ 的连续性, 则必有 x_2 点的一个微小的 δ 邻域 ($x_2 - \delta < x < x_2 + \delta$) 使

$$G(x) > 0 \quad (iii)$$

令 $x_2 - \delta = \bar{x}_0, \quad x_2 + \delta = \bar{x}_1$, 则据上述, 当 x 在邻域

$$\bar{x}_0 < x < \bar{x}_1$$

时, 不等式 (iii) 能成立。

因为 $\eta(x)$ 可以任意选取, 我们选

$$\eta(x) = \begin{cases} (x-\bar{x}_0)^2 \cdot (x-\bar{x}_1)^2 & (\bar{x}_0 < x < \bar{x}_1) \\ 0 & (x \text{ 不在这邻域}) \end{cases} \quad (\text{iv})$$

显然, 所选的 $\eta(x)$ 属于 C_2 类。据定理假设, 则有

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x)\eta(x)dx = 0 \quad (\text{v})$$

又据 (iv) 式与 (iii) 式, 则有

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} G(x)\eta(x)dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} G(x)(x-\bar{x}_0)^2(x-\bar{x}_1)^2 dx > 0 \end{aligned}$$

这将与 (V) 矛盾。故 $G(x_2) > 0$ 是不可能的。同理可证 $G(x) < 0$ 也是不可能的。

故 $G(x) = 0$ (定理证毕)

本定理也可以推广到多元函数的 G 。例如, 对于二元函数 $G(x, y)$ 则有如下辅助定理:

如果对于任意一个在平面区域 D 上连续的函数 $\eta(x, y)$ 都有

$$\iint_D G(x, y)\eta(x, y)dxdy = 0 \quad (\text{vi})$$

则

$$G(x, y) \equiv 0 \quad (\text{在 } D \text{ 上})$$

将证定理: 在边界条件 (2.2) 下的泛函 (2.1) 如果在容许曲线 $y = \bar{y}(x)$ 上取相对极大值或极小值, 则 $y = \bar{y}(x)$ 必须满足欧拉方程 (2.11 a)。

推导过程的主要思想线索是把泛函 (2.1) 的极值问题化为一个函数的极值问题。为此, 将引进容许曲线的以 α 为参数的 α 曲线族。

令函数 $\eta(x)$ 是任意的一个函数, 在区间 $[x_0, x_1]$ 上具有一阶 (或高阶) 连续可微性, 而且满足边界条件:

$$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0 \quad (2.3)$$

现在考虑, 以 α 为参数的曲线族:

$$y = \bar{y}(x) + \alpha\eta(x) \quad (2.4)$$

每一个参数值 α 对应着曲线族 (2.4) 中一条曲线, 特别是 $\alpha = 0$ 对应着极值线 $y = \bar{y}(x)$ 。反过来说, 族 (2.4) 的任意一条曲线也对应着参数 α 的一个值。总之, 参数 α 与曲线族 (2.4) 的曲线一一对应。

证明: 族 (2.4) 中的每一条曲线都是我们所考虑的变分问题的容许曲线。

因为我们假定

$$\bar{y}(x) \in C_1[x_0, x_1], \quad \eta(x) \in C_1[x_0, x_1]$$

所以, $y = \bar{y}(x) + \alpha\eta(x)$ 也属于 $C_1[x_0, x_1]$ 。又因为条件 (2.3), 所以有

$$y(x_0) = \bar{y}(x_0) + \alpha\eta(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = \bar{y}(x_1) + \alpha\eta(x_1) = y_1$$

既然 α 的一个实值对应着容许曲线族 (2.4) 中的一条曲线, 而族 (2.4) 中一条曲线又对应着泛函 (2.1) 的一个数值 $J[\bar{y}(x) + \alpha\eta(x)]$ 。这样一来, 在曲线族 (2.4) 上的泛函

(2.1) $J[\bar{y}(x) + \alpha\eta(x)]$ 可间接地看作是自变数 α 的函数 $I(\alpha)$, 即

$$I(\alpha) = J[\bar{y}(x) + \alpha\eta(x)] \quad (2.5)$$

因为当 $\alpha = 0$ 时对应着极值线 $\bar{y}(x)$, 所以 $\alpha = 0$ 是函数 $I(\alpha)$ 的极值。据微分学定理, 有

$$I'(0) = 0 \quad (2.6)$$

求 $I'(\alpha)$ 。从 (2.5)、(2.1) 得

$$I(\alpha) = J[\bar{y}(x) + \alpha\eta(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \bar{y} + \alpha\eta, \bar{y}' + \alpha\eta') dx$$

用积分号下微分法, 求对 α 的导数, 则得

$$I'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} F(x, \bar{y} + \alpha\eta, \bar{y}' + \alpha\eta') dx \quad (2.7)$$

因

$$F = F(x, y, y')$$

而

$$y = \bar{y}(x) + \alpha\eta(x), \quad y' = \bar{y}'(x) + \alpha\eta'(x)$$

所以用复合函数求导数规则来计算, 得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} F(x, \bar{y} + \alpha\eta, \bar{y}' + \alpha\eta') \\ &= F_y(x, \bar{y} + \alpha\eta, \bar{y}' + \alpha\eta')\eta(x) + F_{y'}(x, \bar{y} + \alpha\eta, \bar{y}' + \alpha\eta')\eta'(x) \\ &= F_y\eta(x) + F_{y'}\eta'(x) \end{aligned}$$

把上式代入 (2.7) 则得

$$I'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y \cdot \eta(x) + F_{y'} \cdot \eta'(x)] dx \quad (2.7a)$$

用分部积分法于上式第二项的积分, 而且注意条件 (2.3), 得

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \cdot \eta'(x) dx &= F_{y'} \cdot \eta(x) \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \frac{dF_{y'}}{dx} dx \\ &= - \int_{x_0}^{x_1} \frac{dF_{y'}}{dx} \eta(x) dx \end{aligned}$$

把上式代入式 (2.7a) 得

$$I'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] \eta(x) dx \quad (2.8)$$

上式中的

$$F_y = F_y(x, \bar{y} + \alpha\eta, \bar{y}' + \alpha\eta') \quad (2.8a)$$

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = \frac{d}{dx} F_{y'}(x, \bar{y} + \alpha\eta, \bar{y}' + \alpha\eta')$$

所以, 在 (2.8a) 中, 令 $\alpha = 0$, 则从 (2.8) 式得

$$I'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y(x, \bar{y}, \bar{y}') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}') \right] \eta(x) dx \quad (2.9)$$

因为 $I(0)$ 是函数 $I(\alpha)$ 的极值, 所以上式的 $I'(0)$ 应该等于 0。这样推得

$$I'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y(x, \bar{y}, \bar{y}') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}') \right] \eta(x) dx = 0 \quad (2.10)$$

当然, 积分等于 0, 被积函数不一定恒等于 0。但是, 由于 $\eta(x)$ 是任意取的函数 [除了边界条件 (2.3) 的限制外], 根据前面所述的辅助定理, 推得

$$F_v[x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)] - \frac{d}{dx} F_{v'}[x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)] \equiv 0 \quad (2.11)$$

也就是，极值线 $y = \bar{y}(x)$ 必须满足关系式 (2.11)。

定义 常微分方程

$$F_v(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{v'}(x, y, y') = 0 \quad (2.11a)$$

叫做泛函 (2.1) 的欧拉方程。

由前面的推导，得

定理 1 容许曲线 $y = \bar{y}(x)$ 是变分问题 (2.1)、(2.2) 的极值线的必要条件是： $y = \bar{y}(x)$ 是欧拉方程 (2.11a) 的解。

定义 既满足欧拉方程 (2.11a) 又满足边界条件 (2.2) 的曲线叫驻值线。

应指出：定理 1 仅给出极值线的必要条件。满足必要条件的曲线叫驻值线，它未必就是极值线。这种情况，正如函数 $y = f(x)$ 的驻点 x_0 未必一定是极值点一样。

2.2 从欧拉方程求变分问题的驻值线 (方法与举例)

现在考虑欧拉方程

$$F_v(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{v'}(x, y, y') = 0$$

计算上式中的全导数，得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F_{v'}[x, y(x), y'(x)] &= F_{xv'} \frac{dx}{dx} + F_{yv'} \frac{dy}{dx} + F_{v'v'} \frac{dy'}{dx} \\ &= F_{xv'} + F_{yv'} y' + F_{v'v'} y'' \end{aligned}$$

即

$$\frac{d}{dx} F_{v'} = F_{xv'} + F_{yv'} y' + F_{v'v'} y''$$

[上式的 $F_{v'}$, $F_{xv'}$, $F_{yv'}$, $F_{v'v'}$ 中的变元是 x, y, y' ；例如 $F_{xv'} = F_{xv'}(x, y, y')$, ……]

把上式代入 (2.11a)，则得的欧拉方程的另一形式：

$$F_v - (F_{xv'} + F_{yv'} y' + F_{v'v'} y'') = 0 \quad (2.11b)$$

从上式可看出，当 $F_{v'v'} \neq 0$ 时，欧拉方程是二阶常微分方程。

例 1 求泛函

$$J[y(x)] = \int_1^2 (y' + x^2 y'^2) dx$$

的欧拉方程及方程的通解。

解：积分中被积函数 $F = y' + x^2 y'^2$ ，计算得

$$F_v = 0, \quad F_{v'} = 1 + 2x^2 y'$$

据 (2.11a) 式，欧拉方程是：

$$F_v - \frac{d}{dx} F_{v'} = 0 - \frac{d}{dx} (1 + 2x^2 y') = 0$$

即

$$-\frac{d}{dx} (1 + 2x^2 y') = -(4xy' + 2x^2 y'') = 0$$

从上式约去 $2x$ 后, 得

$$xy'' + 2y' = 0$$

它是二阶常微分方程。积分此方程

$$\int \frac{y''}{y'} dx + \int \frac{2}{x} dx = 0$$

$$\ln y' + \ln x^2 = \ln C_1$$

得

$$y' = \frac{C_1}{x^2}$$

再积分, 得此常微分方程的通解

$$y = C_2 - \frac{C_1}{x}$$

用边界条件 (2.2) (两个式) 可以确定该通解中的任意常数 C_1, C_2 。这样, 就求得变分问题的驻值线。

一般说来, 欧拉方程 (2.11 a) [即 (2.12)] 是二阶常微分方程, 求它的通解通常很困难。但有五种特殊情况, 在这些情况下容易求欧拉方程的解。下面, 只讲述三种特殊情况, 而把其它两种列入习题中, 让读者自己考虑。首先应指出, 泛函 (2.11 a) 的积分式

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x), y'(x)] dx$$

中, 被积函数 $F(x, y, y')$ 通常是依赖于 x, y, y' 三个变元的。

特殊情况: 1) F 中不显含 y' , 即 $F = F(x, y)$;

2) F 中不显含 y , 即 $F = F(x, y')$;

3) F 中不显含 x , 即 $F = F(y, y')$ 。

第三种情况时常出现, 特别重要, 请读者注意。

先讲情况 1。在这种情况下, $F_{y'} \equiv 0$, 所以欧拉方程 (2.11 a) 变成

$$F_y(x, y) = 0$$

上式不是微分方程。虽然我们可以从上式解出 $y = y(x)$ 来, 然而它未必满足边界条件。可见, 在本情况下, 变分问题通常无解答, 如下例所示。

例 2 求泛函

$$J[y] = \int_0^2 \left(x^2 y - \frac{y^2}{2} \right) dx$$

在边界条件 $y(0) = 0, y(2) = 3$ 的驻值线。

解: $F = x^2 y - \frac{y^2}{2}$ (其中 y' 不出现), $F_{y'} = 0$ 。在这种情况下, 欧拉方程 (2.11 a) 简化成为

$$F_y = x^2 - y = 0$$

从上式算得 $y = x^2$ 。然而, 它不满足边界条件。所以, 在本情况下没有驻值线。

再说情况 2。因为 F 不依赖于 y , 故 $F_y \equiv 0$ 。所以, 欧拉方程 (2.11 a) 此时是

$$0 - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

即

$$-\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y') = 0$$