数学分析题集

邝荣雨 杨新华 林 莉 编著

教育科学出版社

数学分析题集

邝荣雨　杨新华　林　莉　编著

教育科学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析题集/邝荣雨等编著.-北京:教育科学出版社,1997.7
ISBN 7-5041-1652-1

Ⅰ.数… Ⅱ.邝… Ⅲ.数学分析-习题 Ⅳ.017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 21874 号

责任编辑　郑桂泉
责任印制　尹朋好
责任校对　赵建杰

教育科学出版社出版、发行
(北京・北太平庄・北三环中路 46 号)
邮编 100088　　电话 (010)62013803
各地新华书店经销
中国农业出版社印刷厂印装
开本:850 毫米×1168 毫米　1/32　印张:16.25　字数:460 千
1997 年 7 月第 1 版　1997 年 7 月第 1 次印刷
印数:00 001—5 000 册　　定价:18.00 元

序

这是一本很有特色的数学分析习题集，除了一般习题集中常见的练习题(计算题，证明题)外，还增添了一部分不同难度的新题，并将一些难度较大的题目分解改编为较易的系列题，特别是作者新编了 300 多道新颖的思考题和近 470 道客观型题(填空题，选择题与改错题)。这些题目不落俗套，对启发学生思维，正确理解概念，正确运用理论和加强解题方法的训练很有好处；对于教师和学生都是很好的教学参考资料。

目前，这类题集尚属少见。本书对数学分析课程的教学必有帮助，宜置于案头，时时参阅。

王梓坤

1996.3.28

本书记号与约定

N— 自然数集；Z— 整数集；Q— 有理数集；$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$— 实数集；$\mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}=[-\infty,+\infty]$— 广义实数集.

$U(a;\delta)$— 点 $a\in\mathbf{R}$ 的 δ — 邻域；$\overset{\circ}{U}(a;\delta)$— 点 $a\in\mathbf{R}$ 的 δ — 空心邻域.

$C(D)$— 集 D 上一切连续函数之集；$C^k(D)$— 集 D 上一切有连续的 k 阶导数（或偏导数）的函数之集；$C^\infty(D)$— 集 D 上一切有任意阶导数（或偏导数）的函数之集.

$\mathscr{R}[a,b]$— 有界闭区间 $[a,b]$ 上一切黎曼可积函数之集.

在函数或导函数的自变量变化范围已给定，且不致引起混淆时，我们常省去自变量及其变化域，而写成 $f=0,f>0,f'>0$ 等等. 我们用"$f\neq g$"表示 f 恒不等于 g；用"$f\not\equiv g$"表示 f 不恒等于 g. 函数 f 单调增（严格增）与单调减（严格减），有时简记作 $f\nearrow(f\nearrow(\text{严}))$；$f\searrow(f\searrow(\text{严}))$.

所谓数列 $\{x_n\}$ 的聚点 a，是指点 a 的任一邻域 $U(a)$ 内总含有异于 a 的数列的项，我们约定，不同的足码对应着不同的项.

本书称下凸（上凸）函数为凸（凹）函数；称曲线 $y=f(x)$ 上拐点的横坐标为函数 f 的拐点；称曲线 $y=f(x)$ 的渐近线为函数 f 的渐近线.

本书以集合 $\Omega=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ 表示 $[a,b]$ 的一个分法；用 $\|\Omega\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\}$ 表示分法 Ω 的模；$\omega_i(\Omega)=M_i(\Omega)-m_i(\Omega)$ 表示 f 在 $I_i=[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅；$\bar{S}(\Omega)$

与 $\underline{S}(\Omega)$ 分别表示 f 在$[a,b]$ 上关于 Ω 的达布上和与下和；$\bar{J}=\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}(x)$ 与$\underline{J}=\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$ 分别表示 f 在$[a,b]$ 上的黎曼上积分与下积分.

本书用式子 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{h})+\boldsymbol{o}(\boldsymbol{h})\ (\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0})$ 表示向量值函数 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^n\supset\boldsymbol{D}\to\mathbf{R}^m$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in D^0$ 可微，其中线性变换 $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}_0}$ 称为 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的导数(Frechet 导数)，记作 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$.

本书用式子(如果存在的话)

$$f_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}_0)=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}_0)=\lim_{t\to0}\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t}$$

定义实值函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$ 沿方向 $\boldsymbol{v}$ 的方向导数($\mathbf{R}^n$ 中任一单位向量 $\boldsymbol{v}=(\cos\theta_1,\cdots,\cos\theta_n)\in\mathbf{R}^n$ 叫做方向).

本书偏导数记号为$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{xy}=f''_{12}$ 等等.

本书球坐标系采用 $x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,z=r\cos\varphi$，其中 $0<r<+\infty,0<\varphi<\pi,0<\theta<2\pi$.

目　　录

答案与提示

— I —　填空题与选择题

— 1 —　分析基础

（函数、极限、连续、实数）

填空题（Ⅰ.1.1～Ⅰ.1.61）

Ⅰ.1.1　设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,3]$，则 $f(x^2)$ 的定义域为________.

Ⅰ.1.2　设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,2]$，则 $f(\cos x)$ 的定义域为________.

Ⅰ.1.3　设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,4]$，则 $f(x+1)+f(x-1)$ 的定义域为________.

Ⅰ.1.4　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ x-1, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $f^{-1}(x)$ 的定义域为________.

Ⅰ.1.5　设 $f(x)=(|x|+x)(1-x)$，则

(1) 满足 $f(x)=0$ 的 x 值为____________.

(2) 满足 $f(x)<0$ 的 x 值为____________.

Ⅰ.1.6　设 $f(x+1)=x^2+3x+5$，则 $f(x)=$____________；$f(x-1)=$____________.

Ⅰ.1.7　设 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$，则 $f(x)=$________.

Ⅰ.1.8　(1) 当 $x=\frac{1}{k}$ 时 $(k\in\mathbf{Z},k\neq 0)$，$[\frac{1}{x}]=$________；

(2) 当$\dfrac{1}{k+1} < x < \dfrac{1}{k}$时($k \in \mathbf{Z}, k \neq 0, -1$),

$[\dfrac{1}{x}] =$ ________;

(3) 当$x > 1$时,$[\dfrac{1}{x}] =$ ________;

(4) 当$x < -1$时,$[\dfrac{1}{x}] =$ ________.

Ⅰ.1.9 设$f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1, \\ x, & x \geqslant 1, \end{cases}$

则$f(x) + g(x) =$ ________;$f(x) - g(x) =$ ________.

Ⅰ.1.10 设$f(x) = x - |x-2|$, $g(x) = \begin{cases} x+2, & x \leqslant 2, \\ x^2, & x > 2, \end{cases}$

则$f(x) + g(x) =$ ________;$f(x) - g(x) =$ ________.

Ⅰ.1.11 设$f(x) = ax + b$,当$a =$ ________,b为任意数时,$f(f(x)) = x$.

Ⅰ.1.12 设$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \leqslant 2, \\ 2, & |x| > 2, \end{cases}$

则$f(g(x)) =$ ________.

Ⅰ.1.13 设$f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$,则$f^{-1}(x) =$ ________.

Ⅰ.1.14 设$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1, \\ 3 - x, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$

则$f^{-1}(x) =$ ________.

Ⅰ.1.15 设$f(x)$满足等式$f^2(\ln x) - 2xf(\ln x) + x^2 \ln x = 0$,($0 < x \leqslant e$),且$f(0) = 0$,则$f(x) =$ ________.

Ⅰ.1.16 $f(x) = e^x$可表为一个偶函数$g(x) =$ ________与一个奇函数$h(x) =$ ________之和.

Ⅰ.1.17 任何$f(x)$可表为一个偶函数$g(x) =$ ________与一个奇函数$h(x) =$ ________之和.

Ⅰ.1.18 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \neq A$的肯定语句是________.

Ⅰ.1.19 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \neq +\infty$的肯定语句是________.

I.1.20　若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，当$0<|x-a|<\delta$时，有$f(x)>0$，则$A$ ______.

I.1.21　设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$，则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$存在的条件是______.

I.1.22　$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=$ ______；$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=$ ______；

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=$ ______；$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=$ ______.

I.1.23　设$x_{2n-1}=\dfrac{2^n-1}{2^n}$，$x_{2n}=\dfrac{2^n+1}{2^n}$　$(n\in\mathbf{N})$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$ ______；

(2) 要使$|x_n-1|<10^{-4}$，只要$n\geqslant$ ______.

I.1.24　设$\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-f(0))=0$，

则$\lim\limits_{x\to 0}|f(x)-f(-x)|=$ ______.

I.1.25　(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{1+x^2}-x)=$ ______；

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{1+x^2}+x)=$ ______.

I.1.26　若$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-ax+3}{x-1}=b$，则$a=$ ______；$b=$ ______.

I.1.27　设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$　$(x\neq 0)$，

则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ ______.

I.1.28　设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^{2n}}$，则$f(x)=$ ______.

I.1.29　设$f(u)=\begin{cases}0, & u\neq 0,\\ 1, & u=0,\end{cases}$　$u=g(x)=0$，$x\in\mathbf{R}$，

则$\lim\limits_{u\to 0}f(u)=$ ______；$\lim\limits_{x\to 0}f(g(x))=$ ______.

I.1.30　$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{k}\right)^+}\left[\dfrac{1}{x}\right]=$ ______；$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{k}\right)^-}\left[\dfrac{1}{x}\right]=$ ______.

(其中$k\in\mathbf{Z}$，$k\neq 0$).

I.1.31 $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{k}\right)^+}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=$ ________;

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{k}\right)^-}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=$ ________(其中 $k\in\mathbf{Z},k\neq 0$).

I.1.32 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[x]}{x}=$ ________; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{[x]}{x}=$ ________.

I.1.33 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{[x]}{x}=$ ________; $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{[x]}{x}=$ ________.

I.1.34 (1) 当 $x\to0$ 时,$o(x)-o(x)=$ ________;

(2) 当 $x\to0$ 时,$n\geqslant m,o(x^n)\pm o(x^m)=$ ________;

(3) 当 $x\to\infty$ 时,$n\geqslant m,o(x^n)\pm o(x^m)=$ ________.

I.1.35 (1) 当 $x\to0$ 时,$\ln(1+x)\sim$ ________;

(2) 当 $x\to0$ 时,$e^x-1\sim$ ________;

(3) 当 $x\to0$ 时,$(1+x)^a-1\sim$ ________.

I.1.36 (1) 当 $x\to0$ 时,$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim$ ________;

(2) 当 $x\to+\infty$ 时,$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim$ ________.

I.1.37 函数 f 在(a,b) 上不连续的肯定语句是____________.

I.1.38 若函数 f 在 x_0 连续,则 $\lim\limits_{\Delta x\to0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x))$
$=$ ________.

I.1.39 设函数 f 在 $x=0$ 连续,$\forall\ x\neq0$,有 $f(x)=(1-2x)^{\frac{1}{x}}$,则 $f(0)=$ ________.

I.1.40 已知 $f(x)=\begin{cases}x+a, & x\leqslant0,\\ \ln(x+e), & x>0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$ 连续,则 $a=$ ________.

I.1.41 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arc\,tg}(1+x^n)$,则 f 的定义域为________,f 的间断点为________.

I.1.42 设 $f(x)=\begin{cases}x^a\sin\frac{1}{x}, & x>0,\\ e^x+\beta, & x\leqslant0,\end{cases}$ 则

(1) 当 α ________;β ________时,f 在$(-\infty,+\infty)$上连续;

(2) 当 $\alpha \leqslant 0$ 时,f 在__________上连续.

I.1.43 设 $f(x)=\operatorname{sgn}x, g(x)=\sin x$,则

(1) $f(g(x))$ 在________上连续;

(2) $g(f(x))$ 在________上连续.

I.1.44 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\dfrac{\pi\sqrt[n]{n}}{2}\right)=$ ________.

I.1.45 设函数 f 在 $x=1$ 连续,且 $f(1)=1$,

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln[1+f(x^{\frac{1}{x}})]=$ ________.

I.1.46 函数 f 在 (a,b) 上不一致连续的肯定语句是__________.

I.1.47 设函数 $f\in C[a,b]$,且 $\forall r\in \mathbf{Q}\cap[a,b]$,有 $f(r)=1$,则 $\forall x\in[a,b]$,$f(x)=$ ________.

I.1.48 设函数 $f\in C[0,2]$,$\forall x\in[0,2]$,$f(x)$ 皆为有理数,且 $f(1)=2$,则 $\forall x\in[0,2]$,$f(x)=$ ________.

I.1.49 设 $E_1=\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$,$E_2=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$,则 $\sup E_1=$ ________; $\inf E_1=$ ________;

$\sup E_2=$ ________; $\inf E_2=$ ________.

I.1.50 设 $x_n=\sqrt[n]{n}$,则 $\{x_n\}$ 的聚点是________;$\sup\{x_n\}=$ ________;$\inf\{x_n\}=$ ________.

I.1.51 设 $\varnothing\neq E\subset\mathbf{R}$,数 α 是 E 的下界但不是 E 的下确界的肯定叙述是__________.

I.1.52 设 E 是非空有上界数集,F 是 E 的所有上界组成的集,记 $\beta=\min F$,,则 $\sup E$ ________ β.

I.1.53 设 $E=\{x\mid x\in(0,1)$ 中的无理数$\}$,则

$\sup E=$ ________;$\inf E=$ ________;E 的聚点是________.

I.1.54 设 $E=\{x\mid x^2<2\}\subset\mathbf{R}$,则

$\sup E=$ ________;$\inf E$ ________;E 的聚是________.

Ⅰ.1.55　设 $x_n=\sqrt[n]{\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|}$，则 $\{x_n\}$ 的最大的聚点是________；最小的聚点是________.

Ⅰ.1.56　设 $x_n=n^{(-1)^n}$，它有一个收敛子列是____________.

Ⅰ.1.57　设 $x_n=\frac{2n}{n+1}\sin\frac{n\pi}{2}$，它有三个收敛子列，分别是____________；____________；____________.

Ⅰ.1.58　设 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$，$x\in\mathbf{R}$，则

$\sup\{f(x)\mid x\in\mathbf{R}\}=$________；$\inf\{f(x)\mid x\in\mathbf{R}\}=$________；$\max\{f(x)\mid x\in\mathbf{R}\}=$________；$\min\{f(x)\mid x\in\mathbf{R}\}=$________.

Ⅰ.1.59　设开区间 $I=\left(0,\frac{1}{2}\right)$，开区间族 $\mathscr{S}=\left\{\left(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n}\right),\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)\middle|n\in\mathbf{N}\right\}$，则 I 的有限子覆盖是____________.

Ⅰ.1.60　设 $x_n=(-1)^{n-1}\left(2+\frac{3}{n}\right)$，则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=$________；$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=$________.

Ⅰ.1.61　设 $x_n=\sqrt{1+2^{(-1)^n n}}$，则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=$________；$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=$________.

选择题（Ⅰ.1.62 ～ Ⅰ.1.120）

Ⅰ.1.62　设 f、g 在 $(-\infty,+\infty)$ 上分别是奇、偶函数，则 $f(g(x))$ 与 $g(f(x))$　（　　）

(A) 都是偶函数；　(B) 都是奇函数；

(C) 一是奇函数，一是偶函数；　(D) 都是非奇非偶函数.

Ⅰ.1.63　设 f、g 在 $(-\infty,+\infty)$ 上都是奇函数，则 $g(f(x))$ 与 $f(g(x))$　（　　）

(A) 都是偶函数；　(B) 都是奇函数；

(C) 一是奇函数,一是偶函数;(D) 都是非奇、非偶函数.

I.1.64 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数,且在 $(0,+\infty)$ 上严格增,则 f 在 $(-\infty,0)$ 上 ( )

(A) 严格减; (B) 严格增;

(C) 既非严格增,也非严格减;

(D) 可能严格增,也可能严格减.

I.1.65 设 f 在 $[-a,a]$ 上是偶函数,则 $f(-x)$ 在 $[-a,a]$ 上是 ( )

(A) 奇函数; (B) 偶函数;

(C) 非奇、非偶函数; (D) 可能是奇函数,也可能是偶函数.

I.1.66 设 f 在 $[a,b]$ 上无界,且 $f(x)\neq 0$,

则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上 ( )

(A) 无界; (B) 有界;

(C) 有上界或有下界;(D) 可能有界,也可能无界.

I.1.67 若 f 存在反函数,则反函数 f^{-1} ( )

(A) 是单调函数; (B) 是严格单调函数;

(C) 不是单调函数; (D) 不一定是单调函数.

I.1.68 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数,且存在反函数 f^{-1},则 f^{-1} ( )

(A) 是奇函数; (B) 是偶函数;

(C) 是非奇、非偶函数;

(D) 可能是奇函数,也可能是偶函数.

I.1.69 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,若函数 f 满足 $f(f(x))=x$,则满足上述条件的 f ( )

(A) 只有一个; (B) 一个都没有;

(C) 有有限个; (D) 有无穷多个.

I.1.70 $y=\sin x$ 在 $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ 上的反函数是 ( )

(A) $x=\arcsin y$; (B) $x=\pi-\arcsin y$;