复合材料力学基础

刘锡礼　王秉权

中国建筑工业出版社

本书首先介绍了各向异性体弹性力学基本方程；随后从宏观力学和微观力学角度讨论了单层板的弹性特性和强度特性，从宏观力学角度讨论了层合板的弹性特性、强度特性、湿热效应、耦合效应等方面的经典理论；然后从刚度降级准则和优化准则方面叙述了应用于纤维缠绕结构的网络分析；最后介绍了复合材料力学的各种试验方法，其中重点介绍了单向复合材料的试验和性能。

本书可供从事材料科学工作的有关人员和高等院校有关专业师生参考。

复合材料力学基础

刘锡礼　王秉权

*

中国建筑工业出版社出版(北京西郊百万庄)

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

中国建筑工业出版社印刷厂印刷(北京阜外南礼士路)

*

开本：787×1092毫米 1/16 印张：16 1/2 字数：399千字

1984年2月第一版　1984年2月第一次印刷

印数：1—7,600册　定价：2.20元

统一书号：15040·4572

前　言

近二十年来，复合材料在航空、航天、建筑、造船、汽车、化工等部门的应用日益广泛。复合材料力学随之得到了迅速发展，初步形成了学科体系。越来越多的力学工作者对复合材料力学发生了浓厚的兴趣，专门的研究机构相继建立，一些习惯于分析和设计各向同性体的工程技术人员现在开始同他们不熟悉的非均质各向异性的复合材料打交道，许多高等院校已将复合材料力学列入本科学生和研究生的选修课或必修课。复合材料力学正处于蓬勃发展的阶段，迫切需要有关的参考书籍。为此，作者总结了十多年从事教学和科研工作的经验，在几份讲义和讲稿的基础上编写了本书。

复合材料力学涉及到十分广泛的学科领域。这是因为，固体力学的各分支几乎全部能在复合材料力学得到它们的位置。因此，作者在写这本书时必须有所侧重。显然，将复合材料力学的基础理论和那些比较成熟的、而且比较实用的方法作为本书的重点是适宜的，以便使大多数读者可以用本书介绍的理论和方法解决实际工程问题，也可以将本书作为起点向更深入的领域迈进。许多重要的课题，诸如横向剪切影响、疲劳、冲击、断裂力学、波的传播及物理非线性等，本书未予涉及。

在较短的篇幅中，做到内容简明、叙述有启发性和便于自学，是作者给自己规定的目标。作者力图处理好诸如坐标系和符号系统的一致性、名词术语及其定义的科学性、省略细节而又能保持推导过程的完整性、层次安排的连贯性等技术细节。为了节省篇幅，还省略了关于历史的叙述。

阅读本书所需的预备知识是材料力学和弹性力学基础，以及矩阵和张量的概念。

为使读者顺利阅读本书，谨提供下述建议：不要一开始就陷入本书省略了的推导细节，应着重弄清大的脉络；对各物理量基本概念和定义的理解是重要的，但不要把时间花费在记忆种类繁多的复杂公式上；各类参数的转轴关系应当作为学习的重点，它们是建立各向异性概念的关键；不要忽视符号的记忆和各种标记的微小差别，它们都有特定的含义，混淆它们会导致概念上的差错。读者在阅读本书时可以发现，复合材料与均质各向同性材料的不同仅在于物理关系方面，这是读者应当把握的一条主线。

作者非常感谢为发展我国复合材料力学做出开拓性工作的朱颐龄教授，承蒙他在公余之暇详细审阅了本书的全部手稿并提出了许多宝贵意见。正在攻读硕士学位的研究生肖军同志主动为本书编纂了全部习题和担当了全部描图工作，他的很多中肯建议已经反映在本书中，作者谨向他表示由衷的谢意。

限于作者的学识水平和工作经验，本书中的谬误之处必然很多，恳请专家和读者批评指正。

刘锡礼

王秉权

一九八三年五月于哈尔滨

符 号 表

$[A]$, A_{ij}	面内刚度矩阵及其元
A, E, C	系数
$[a]$, a_{ij}	面内柔度矩阵及其元
$[a^*]$, a^*_{ij}	面内柔度矩阵及其元
a, b	长度、系数
$[B]$, B_{ij}	耦合刚度矩阵及其元
$[b]$, b_{ij}	矩阵$-[A]^{-1}[B]$及其元
$[b^*]$, b^*_{ij}	耦合柔度矩阵及其元
C	吸水浓度、体积变形率
$[C]$, C_{ij}	三维刚度矩阵及其元
$[c]$, c_{ij}	矩阵$[B][A]^{-1}$及其元
D	位移向量
$[D]$, D_{ij}	弯曲刚度矩阵及其元
$[d]$, d_{ij}	矩阵$[D]-[B][A]^{-1}[B]$及其元
$[d^*]$, d^*_{ij}	弯曲柔度矩阵及其元
E	弹性模量
e	极限应变
F	面积、主向量、基本强度、主刚度比
G	剪切模量
H	哈密尔顿作用量
h	厚度
I	总势能
J	惯性矩、刚度不变量
K	强度参数、体积模数、刚度参数
k	强度参数、系数、序号
L	微分算子
L, T, n	单层板纵向、横向、法向坐标
L, r, θ	柱坐标
l	长度
l, m, n	方向余弦
$[l]$, $\{l\}$	方向余弦矩阵，方向余弦列阵
M	主矩、内力矩、正交铺设比、质量
$\{M\}$	内力矩列阵
m	交叉系数、序号、质量含量
m, n	半波数
N	层数、面内内力、轴向力
$\{N\}$	面内内力列阵
n	层数
P	应力分量、轴向力
p	均布压力
Q	横力
$[Q]$, Q_{ij}	二维刚度矩阵及其元
q	分布荷载
R	半径、曲率半径
r	半径
S	行列式值
$[S]$, S_{ij}	柔度矩阵及其元
s	弧长
T	温度、动能
$[T]$	坐标转换矩阵
t	厚度
U	应变位能、不变量刚度
u, v, w	位移分量
V	体积、体积含量、几何因子
W	外力功
X, Y, Z	体积力分量
X_n, Y_n, Z_n	表面力分量
x, y, z	直角坐标
α	角、热膨胀系数
β	角、湿膨胀系数
γ	剪应变
Δ	距离、行列式值
ε	线应变
$[\varepsilon]$	应变张量
$\{\varepsilon\}$	应变列阵
η	内力比
Θ	函数
θ	角
$\varkappa$	曲率、扭率改变量
$\{\varkappa\}$	弯曲应变列阵
λ	厚度比、乘子
ν	泊松比
ξ	Z整化值
ρ	单位面积质量、r整化值、密度
σ	正应力
$[\sigma]$	应力张量
$\{\sigma\}$	应力列阵
τ	剪应力
Φ	相对湿度
φ	角、应力函数
ψ	角
Ω	面积、函数
ω	自振圆频率
χ	函数

目　录

前言
符号表
绪论 …… 1
第一章　各向异性体弹性力学基本方程 …… 4
§1-1　应力 …… 4
一、应力分量和应力张量 …… 4
二、平衡微分方程 …… 5
三、斜面应力 …… 6
四、应力转轴公式 …… 6
§1-2　应变 …… 7
一、位移和位移分量 …… 7
二、应变分量和应变张量 …… 9
三、斜向应变 …… 10
四、应变转轴公式 …… 11
§1-3　应力和应变的关系 …… 12
一、广义虎克定律 …… 12
二、应变位能 …… 13
三、均质弹性体的弹性特性 …… 14
四、弹性对称 …… 16
（一）一个弹性对称面 …… 16
（二）三个弹性对称面——正交异性 …… 17
（三）各向同性面——横观各向同性 …… 18
（四）完全对称——各向同性 …… 20
五、弹性系数的转轴公式 …… 21
六、正交异性体的弹性系数 …… 22
（一）刚度系数和柔度系数的关系 …… 22
（二）刚度系数、柔度系数与工程常数的关系 …… 22
（三）弹性模量与泊松比的关系 …… 23
（四）工程常数的取值范围 …… 23
习题 …… 24
第二章　单层板的弹性特性和强度理论 …… 25
§2-1　单层板的弹性特性 …… 25
一、单层板弹性主方向的弹性特性 …… 25
二、单层板非弹性主方向的弹性特性 …… 27
三、单层板弹性系数的方向性 …… 31

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

（一）弹性模量E_x的极值 ……31
（二）剪切模量G_{xy}的极大值 ……32
四、交叉效应与交叉系数……32
（一）交叉系数m_x、m_y的物理意义……32
（二）非主方向的拉伸特性……33
（三）非主方向的剪切特性……33
§2-2 单层板的强度理论 ……34
一、单层板宏观强度的概念……34
二、单层板的二维强度理论……36
（一）最大应力理论……36
（二）最大应变理论……36
（三）蔡-希尔（Tsai-Hill）准则 ……37
（四）霍夫曼（Hoffman）准则 ……38
（五）蔡-吴（Tsai-Wu）张量理论 ……39
三、单层板强度的方向性……43
（一）用最大应力理论决定F_α ……44
（二）用最大应变理论决定F_α ……44
（三）用蔡-希尔准则决定F_α ……44
习题 ……45
第三章 单层板弹性常数和基本强度的预测……48
§3-1 确定弹性常数的材料力学方法 ……49
一、薄片模型法……49
（一）薄片模型……49
（二）串联模型的弹性常数……49
（三）并联模型的弹性常数……51
（四）植村-山脇的经验公式 ……53
二、矩形模型法……54
（一）模型……54
（二）弹性常数的预测……54
（三）关于方法的讨论……58
§3-2 确定弹性常数的弹性力学方法 ……58
一、限界法……58
（一）E_L的下限 ……58
（二）E_L的上限 ……59
二、惠特尼-瑞莱（Whitney-Riley）独立模型法 ……60
（一）模型……60
（二）弹性常数的预测……61
（三）关于方法的讨论……68
三、蔡的公式……69
§3-3 确定强度的材料力学方法 ……71
一、纵向拉伸强度的预测……71
二、纵向压缩强度的预测……72

（一）罗森（Rosen）的方法 ……72
（二）林毅的方法……75
习题 ……77
第四章 层合板的弹性特性 ……79
§4-1 一般层合板的弹性特性 ……79
一、变形分析……80
二、层合板内力的一般表达式……81
三、一般层合板的弹性特性……83
§4-2 单层板的刚度 ……87
一、各向同性单层板……88
二、横观各向同性单层板……88
三、参考轴与主轴一致的正交异性单层板……89
四、参考轴与主轴不一致的正交异性单层板……89
§4-3 对称层合板的刚度 ……90
一、各向同性层组成的对称层合板……91
二、对称正交铺设层合板……91
三、规则对称角铺设层合板……93
§4-4 反对称层合板 ……94
§4-5 规则非对称正交铺设层合板……96
§4-6 平行移轴定理 ……98
习题……102
第五章 无矩层合板……103
§5-1 面内刚度的计算……104
§5-2 面内各向同性层合板 ……106
§5-3 无矩层合板的强度……109
一、层合板各层应力应变分析 ……110
二、强度分析 ……111
§5-4 均衡型层合板 ……122
一、均衡应变概念 ……122
二、均衡型一般性公式 ……123
三、均衡型层合板的力学性质 ……125
四、同材质均衡型层合板 ……129
（一）单角（$\pm\alpha$）铺设层合板 ……129
（二）双角（$\pm\alpha$、$\pm\beta$）铺设层合板 ……130
五、混杂均衡型层合板 ……131
（一）单角铺设加各向同性层的层合板 ……131
（二）双角铺设加各向同性层的层合板 ……132
（三）混杂层合板的特殊情况 ……135
习题……136
第六章 湿热效应……138
§6-1 单层板的热弹性与湿弹性 ……138

一、单层板的热膨胀系数和湿膨胀系数 ……138
（一）热膨胀系数 ……138
（二）湿膨胀系数 ……139
二、单层板的热弹性 ……140
§6-2 单层板热膨胀系数、湿膨胀系数的预测 ……142
一、热膨胀系数的预测 ……142
（一）纵向热膨胀系数α_L ……142
（二）横向热膨胀系数α_T ……143
二、湿膨胀系数的预测 ……144
（一）纵向湿膨胀系数β_L ……144
（二）横向湿膨胀系数β_T ……144
§6-3 层合板的热弹性 ……145
§6-4 残余应力和强度分析 ……148
§6-5 层合板的热膨胀系数和零热膨胀系数设计 ……157
习题 ……160
第七章 耦合效应对层合板刚度性能的影响 ……161
§7-1 一般层合平板的基本方程 ……161
一、弯曲方程 ……161
二、屈曲方程 ……164
三、振动方程 ……166
§7-2 正交异性单层平板 ……167
一、参考轴与主轴一致的情形 ……167
（一）弯曲问题 ……167
（二）屈曲问题 ……168
（三）振动问题 ……170
二、参考轴与主轴不一致的情形 ……172
（一）弯曲问题 ……172
（二）屈曲问题 ……173
（三）振动问题 ……174
§7-3 对称层合平板 ……175
一、对称正交铺设层合平板 ……175
二、规则对称角铺设层合平板 ……175
§7-4 规则反对称层合平板 ……176
一、弯曲问题 ……176
二、屈曲问题 ……178
三、振动问题 ……180
§7-5 规则非对称正交铺设层合平板 ……181
一、弯曲问题 ……181
二、屈曲问题 ……184
三、振动问题 ……185
§7-6 关于耦合效应的讨论 ……186
一、耦合效应的机理 ……186

（一）二层规则反对称层合板 ……186
（二）二层规则非对称正交铺设层合板 ……188
二、耦合效应消除和减小的机理 ……190
三、关于耦合效应的利用 ……191
习题……192
第八章　网络分析 ……193
§8-1　网络分析的基本概念……193
一、网络分析是一种刚度降级准则 ……193
二、网络分析与均衡型的关系 ……195
三、网络分析与缠绕工艺的关系 ……197
§8-2　纤维缠绕压力容器筒身段的网络分析 ……197
一、螺旋缠绕筒身 ……197
（一）均衡缠绕角 ……198
（二）应力应变计算 ……199
（三）纤维厚度计算 ……199
（四）几点讨论 ……199
二、螺旋缠绕加环向缠绕筒身 ……199
（一）均衡厚度比 ……200
（二）应力应变计算 ……200
（三）纤维厚度计算 ……200
三、螺旋缠绕加纵向铺放筒身 ……201
（一）均衡厚度比 ……201
（二）应力应变计算 ……201
（三）纤维厚度计算 ……201
四、纵向铺放加环向缠绕筒身 ……202
（一）均衡厚度比 ……202
（二）应力应变计算 ……203
（三）纤维厚度计算 ……203
§8-3　纤维缠绕压力容器封头段的网络分析 ……203
一、封头段的基本方程 ……203
二、均衡型等应力封头 ……206
（一）等应力条件 ……206
（二）缠绕角方程 ……206
（三）纤维应力 ……207
（四）子午线方程 ……207
（五）纤维厚度 ……208
（六）封头主曲率半径与曲面特征 ……209
三、均衡型平面缠绕封头 ……210
（一）工艺限制条件 ……211
（二）子午线微分方程 ……212
（三）纤维应力微分方程 ……212
（四）纤维厚度微分方程 ……212

§8-4 混杂纤维缠绕压力容器的网络分析……213
一、螺旋缠绕 ……213
二、螺旋缠绕加环向缠绕 ……214
三、螺旋缠绕加纵向铺放 ……215
四、纵向铺放加环向缠绕 ……217
五、均衡型等应变封头 ……218
（一）混杂纤维缠绕封头的基本方程 ……218
（二）等应变条件及解答 ……219
习题……220
第九章 复合材料的力学试验及性能……221
§9-1 纤维与基体 ……221
一、纤维 ……221
二、树脂基体 ……222
§9-2 环形试件的制造与测试 ……223
一、环形试件 ……223
二、环形试件的制造方法 ……224
（一）缠制方法对环形试件性能的影响 ……224
（二）缠绕张力对环形试件性能的影响 ……225
（三）缠绕速度对环形试件性能的影响 ……227
（四）固化前环形试件的存放时间对其性能的影响 ……227
（五）使用纤维的股数（或束数或线密度）对环形试件性能的影响 ……228
（六）纤维的表面处理 ……228
三、对环形试件的试验 ……229
（一）拉伸试验 ……229
（二）压缩试验 ……230
（三）剪切试验 ……231
§9-3 单向薄板试件及试验 ……231
一、拉伸试验 ……231
（一）加固片的粘接及粘接长度 ……231
（二）试件尺寸 ……232
二、压缩试验 ……232
三、面内剪切试验 ……233
（一）用偏轴拉伸法测定面内剪切模量G_{LT}、剪切强度F_{LT}……233
（二）用方平板对角拉伸法测定G_{LT}、F_{LT}……236
（三）用轨道剪切法测定G_{LT}、F_{LT}……237
（四）用薄壁圆筒扭转法测定G_{LT}、F_{LT}……237
（五）其它方法 ……237
四、热膨胀系数的测定 ……238
§9-4 单向复合材料的特点 ……238
一、单向复合材料的典型性能及应力-应变关系的主要特点……238
二、单向复合材料的破坏模式 ……239
（一）沿纤维方向拉伸时的破坏模式 ……239

（二）沿纤维方向压缩时的破坏模式 ……240
（三）垂直纤维方向拉伸时的破坏模式 ……241
（四）垂直于纤维方向压缩时的破坏模式 ……241
（五）L-T方向的剪切破坏模式 ……241
§9-5 单向混杂复合材料的性能特点 ……241
一、混杂效应 ……242
二、碳-玻璃纤维/环氧单向混杂复合材料拉伸性能及破坏模式 ……242
§9-6 多层层合板（壳）弹性系数的测定及破坏特征 ……244
一、理论分析 ……244
（一）$\pm\alpha$角缠绕圆筒壳 ……244
（二）螺旋缠绕层加环向缠绕层圆筒壳 ……245
二、实验值与理论值的比较 ……246
（一）$\pm\alpha$角螺旋缠绕圆筒壳的试验 ……246
（二）螺旋缠绕层加环向缠绕层圆筒壳的试验 ……247
三、螺旋缠绕圆筒壳的破坏特征 ……249
（一）沿x轴的拉伸试验 ……249
（二）沿x轴的压缩试验 ……250
（三）绕x轴的扭转试验 ……250
主要参考书目 ……251

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

绪　论

复合材料力学是研究复合材料在外界因素（荷载、温度变化、湿度变化等）作用下所发生的力学响应的一门科学，是固体力学的一个新分支。

复合材料是两种或两种以上不同性能的材料组成的多相材料，其组分材料虽然彼此作用成为一个整体，但是在交界面处可以将它们物理地区分出来。或者更概括地说，复合材料是由两个或两个以上独立的物理相所组成的固体材料。复合材料应当具有优于各组分材料的综合性能，有时甚至是组分材料所没有的优良性能。

通常称复合材料中的连续相材料为“基体材料”，称不连续相材料为“增强材料”，有害的杂质不能称为增强材料。

复合材料通常按增强材料的几何特征来分类。譬如分为纤维复合材料、粒子复合材料、薄片复合材料。有时也可以按基体材料来分类。譬如分为塑料基复合材料、橡胶基复合材料、陶瓷基复合材料、金属基复合材料等。目前最常见的是纤维增强的塑料基复合材料。增强纤维有玻璃纤维、碳纤维、硼纤维、Kevlar纤维、碳化硅纤维等；作为塑料基体材料的有聚酯树脂、环氧树脂、酚醛树脂等。

复合材料不仅是材料，而且更确切地说是结构。可以用纤维增强的层合结构为例来说明这个问题。从固体力学角度，不妨将其分为三个“结构层次”：一次结构、二次结构、三次结构。所谓“一次结构”是指由基体和增强材料复合而成的单层材料，其力学性能决定于组分材料的力学性能、相几何（各相材料的形状、分布、含量）和界面区的性能；所谓“二次结构”是指由单层材料层合而成的层合体，其力学性能决定于单层材料的力学性能和铺层几何（各单层的厚度、铺设方向、铺层序列）；“三次结构”是指通常所说的工程结构或产品结构，其力学性能决定于层合体的力学性能和结构几何。

图0-1*a*所示为一纤维缠绕压力容器，是一种典型的纤维增强层合结构，亦即所谓“三

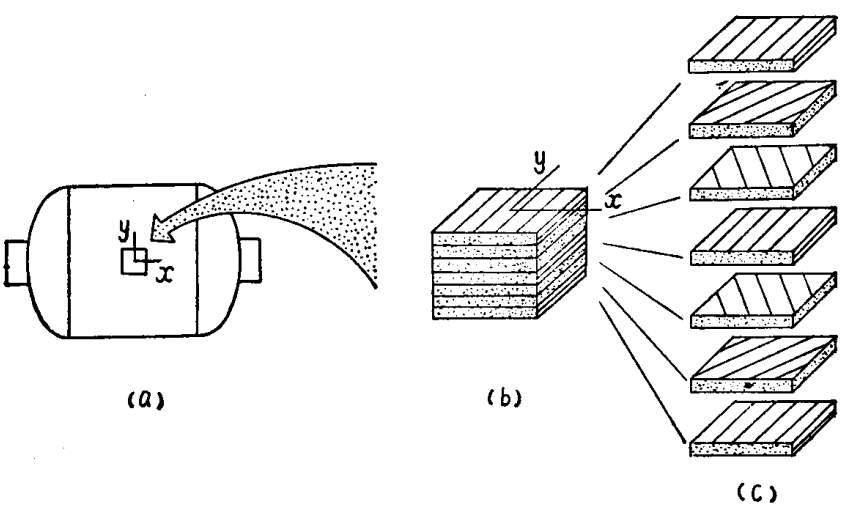

图 0-1

次结构”；图0-1b所示为从容器壁上切取的壳元，亦即所谓“二次结构”；图0-1c所示为将壳元分解成的单层，亦即所谓“一次结构”。这三个层次的结构，其实是在同一个工艺流程中形成的。

作为复合材料力学的专门术语，习惯上称图0-1c所示的单层为“单层板”，而将图0-1b所示的壳元称为“层合板”。层合板表示了结构单元的概念，单层板又是这个结构单元的一层。因此，单层板是层合结构分析的基本单元。

将单层复合材料作为结构来分析，必须承认材料的多相性，以研究各相材料之间的相互作用。这种研究方法称为“微观力学”方法。犹如在显微镜视野中分辨出了材料的微观非均质性，运用非均质力学的手段尽可能准确地描述各相中的真实应力场和应变场，以预测复合材料的宏观力学性能。因此，微观力学又可称为“细观力学”或“显微力学”。微观力学总是在某些假定的基础上建立起分析模型以模拟复合材料，所以微观力学的分析结果必须用宏观试验来验证。微观力学因不能顾及不胜枚举的各种影响因素而总带有一定的局限性。但是，微观力学毕竟是在一次结构这个相对细微的层次上来分析复合材料的，所以它在解释机理，发掘材料本质，特别是在提出改进和正确使用复合材料的方案方面是十分重要的。

在研究单层复合材料时，也可以假定材料是均匀的，而将各相材料的影响仅仅作为复合材料的平均表观性能来考虑，这种研究方法称为“宏观力学”方法。在宏观力学中，应力、应变均定义在宏观尺度上，亦即定义在比各相特征尺寸大得多的尺度上。这样定义的应力和应变称为宏观应力和宏观应变，它们既不是基体相的应力和应变，也不是增强相的应力和应变，而是在宏观尺度上的某种平均值。相应地，材料的各类参数也定义在宏观尺度上，这样定义的材料参数称为“表观参数”。在宏观力学中，各类材料参数只能靠宏观试验来获得。

宏观力学方法较之微观力学方法显然粗糙得多。但是，由于宏观力学始终以试验结果作为根据，所以它的实用性和可靠性反而比微观力学强得多。因此，不能说宏观力学更好，或者说微观力学更好。事实上，它们是互相补充的。

将层合复合材料作为结构来分析，必须承认材料在板厚度方向的非均质性，亦即承认层合板是由若干单层板所构成这一事实。由此发展起来的理论称为“层合理论”。该理论以单层复合材料的宏观性能作为依据，以非均质力学的手段来研究层合复合材料的性能。它属于宏观力学范围。

复合材料力学主要地是在单层板和层合板这两个结构层次上展开的；工程结构的分析属于复合材料结构力学的范围。

与上述三个“结构层次”的概念相对应，不妨将设计也分为三个层次：单层材料设计、铺层设计、结构设计。单层材料设计包括正确选择增强材料、基体材料及其配比，该层次决定单层板的性能；铺层设计包括对铺层材料的铺层方案做出合理安排，该层次决定层合板的性能；结构设计则最后确定产品结构的形状和尺寸。这三个设计层次互为前提、互相影响、互相依赖。因此，复合材料及其结构的设计打破了材料研究和结构研究的传统界限。设计人员必须把材料性能和结构性能一起考虑，换言之，材料设计和结构设计必须同时进行，并将它们统一在同一个设计方案中。

从分析的角度而言，复合材料与惯用的均质各向同性材料的差别主要是它的各向异性

和非均质性。这种差别是属于物理方面的。我们知道，各向同性材料，独立的弹性常数只有两个：弹性模量E、泊松比ν（或剪切模量G）。对于各向异性材料，独立的弹性常数增加了。譬如图0-1c所示的单层板，在面内有两个材料主方向：纤维方向（纵向L）和垂直纤维方向（横向T），在$L-T$坐标系中，单层板独立的弹性常数有四个：纵向弹性模量E_L、横向弹性模量E_T、纵横向泊松比ν_{LT}（或横纵向泊松比ν_{TL}）、纵横向剪切模量G_{LT}，表现出明显的正交异性特点。在材料的非主方向坐标系中，正应力会引起剪应变，剪应力会引起线应变，这种现象称为交叉效应。这是各向同性材料所没有的。对于各向同性材料，强度与方向无关。但是对于各向异性材料，强度随方向不同而异。上述单层板在其面内就有五个基本强度：纵向拉伸强度F_{L_t}、纵向压缩强度F_{L_c}、横向拉伸强度F_{T_t}横向压缩强度F_{T_c}、纵横向剪切强度F_{LT}。其它物理-力学性能也是各向异性的，譬如热性能，单层板的纵向热膨胀系数α_L和横向热膨胀系数α_T也是不同的。总之，单层板的各类参数都是方向的函数。在复合材料力学中，各类参数的坐标转换关系经常会遇到，因此熟悉它们并能熟练运用它们是十分重要的。

层合板厚度方向的非均质性会造成层合结构的一个特有现象：耦合效应。所谓耦合效应，是在小变形情况下，面内内力会引起出平面变形，内力矩也会引起面内变形。为了避免或者利用耦合效应，构成了复合材料力学中的另一重要课题。

因此，复合材料力学以其研究对象的非均质性和各向异性为主要特征而成为固体力学的一个新分支。

4572.207

第一章　各向异性体弹性力学基本方程

§ 1-1 应　　力

一、应力分量和应力张量

设物体内某任意点A的坐标为（x，y，z）（图1-1）。为了显示该点处的应力，可以用三对无限邻近的坐标平面（x，$x+dx$），（y，$y+dy$），（z，$z+dz$）从物体中假想地切割出一个正六面体微元$ABCDE$（图1-2）。微元体六个侧面上单位面积的内力（周围介质对微元体的作用），称为作用在相应侧面上的应力向量。每个侧面上的应力向量都可以分解为坐标方向的三个分量。其中一个应力分量垂直于作用面，称为正应力分量，用σ表示；另外两个应力分量在作用面内，称为剪应力分量，用τ表示。体微元各面上的应力分量的符号及取用的正方向如图1-2所示。譬如，σ_x表示作用在x面（与坐标轴x垂直的BE面和CD面）上的正应力；τ_{xy}、τ_{xz}分别表示作用在x面内y方向和z方向的剪应力。应力分量的正负号规则是：正面上的应力分量与坐标方向一致时为正；负面上的应力分量与坐标方向相反时为正。所谓正面系指外法线与坐标方向一致的面（图1-2中的BE面、CE面、DE面），负面系指外法线与坐标方向相反的面（CD面、BD面、BC面）。显然，正应力以拉为正，以压为负。

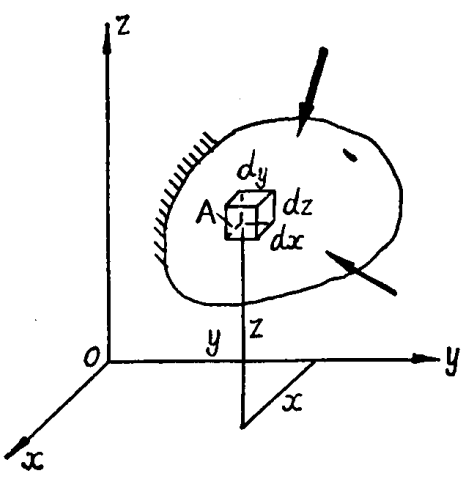

图 1-1

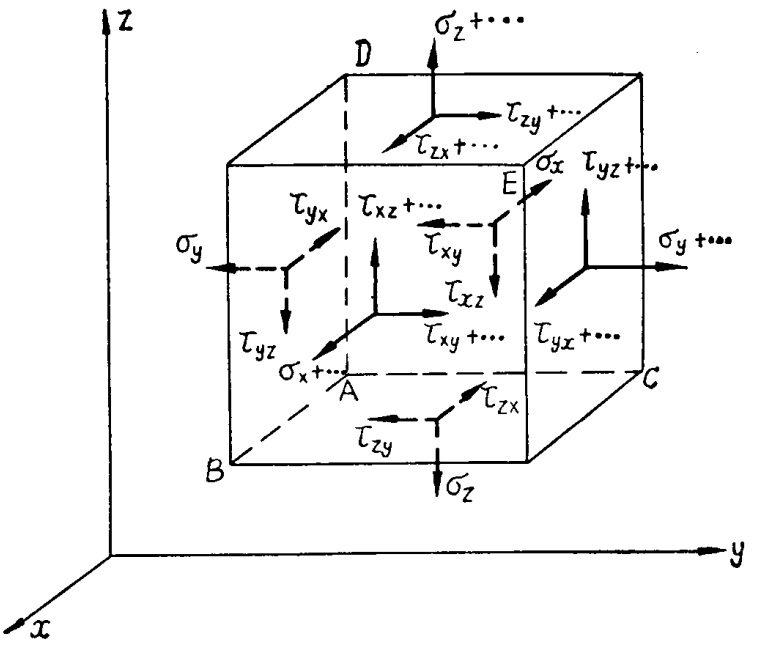

图 1-2

将九个应力分量用矩阵形式写成

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{bmatrix} \tag{1-1}$$

称[σ]为应力张量。

二、平衡微分方程

物体内各点的应力，一般说来是不相同的，可以用坐标的连续函数来表示：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\sigma_x(x,y,z)\\ \sigma_y&=\sigma_y(x,y,z)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \tau_{xy}&=\tau_{xy}(x,y,z)\end{aligned}\right\}$$

因此，作用在体微元两对面上的应力分量有微小的差量。譬如，CD面的正应力为σ_x，BE面的正应力应当是$\sigma_x+(\partial\sigma_x/\partial x)dx$，余类推。因为体微元是无限小的，所以其各面上的应力可以认为是均匀分布。此外，体微元还受到体积力（分布在物体质量上的力，如重力，惯性力等）的作用，其分量记为X、Y、Z。也可以认为体积力在体微元内为均匀分布。

若物体在外界因素作用下处于平衡状态，则体微元在应力和体积力作用下也应当处于平衡状态。于是体微元应当满足六个静力平衡条件：

$$\Sigma F_x=0 \qquad \Sigma F_y=0 \qquad \Sigma F_z=0$$
$$\Sigma M_x=0 \qquad \Sigma M_y=0 \qquad \Sigma M_z=0$$

首先建立x方向主向量为零的条件$\Sigma F_x=0$。从图1-2得

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\,dx\right)dydz-\sigma_x\,dydz+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\,dy\right)dxdz-\tau_{yx}dxdz$$
$$+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\,dz\right)dxdy-\tau_{zx}dxdy+Xdxdydz=0$$

约简并遍除以$dxdydz$，得下列方程的第一式。同理，由$\Sigma F_y=0$和$\Sigma F_z=0$得第二式和第三式。即

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+Y=0\\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0\end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

此即平衡微分方程。再建立x方向主矩为零的条件$\Sigma M_x=0$。对过体微元中心的x轴取矩，得

$$\left(\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\,dy\right)dxdz\,\frac{dy}{2}+\tau_{yz}dxdz\,\frac{dy}{2}$$
$$-\left(\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\,dz\right)dxdy\,\frac{dz}{2}-\tau_{zy}dxdy\cdot\frac{dz}{2}=0$$

略去高阶微量，合并相同的项并遍除以$dxdydz$，得下列第一等式。同理由$\Sigma M_y=0$和$\Sigma M_z=0$得第二等式和第三等式。即

$$\left.\begin{aligned}\tau_{yz}&=\tau_{zy}\\ \tau_{zx}&=\tau_{xz}\\ \tau_{xy}&=\tau_{yx}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}3)$$

此即剪应力互等定理。

从式（1-3）知，应力张量[σ]中只有六个独立的应力分量。因此，应力张量为对称张量。

三、斜面应力

为了讨论过A点任意斜面的应力，在A点附近取一个四面体微元$ABCD$（图1-3）。斜面BCD的外法线为N。令N的方向余弦为

$$\left.\begin{aligned}\cos(N,x)&=l\\ \cos(N,y)&=m\\ \cos(N,z)&=n\end{aligned}\right\}$$

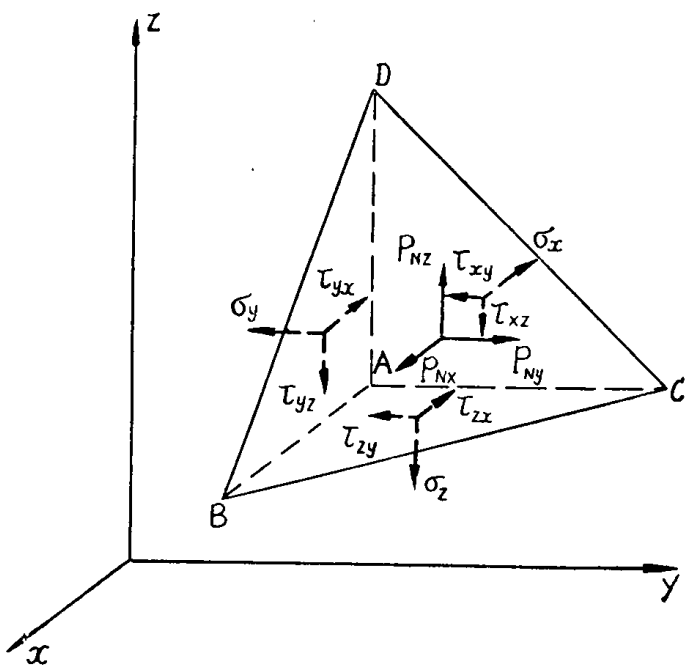

图 1-3

则有

$$(dF)_x=l(dF)\qquad(dF)_y=m(dF)$$
$$(dF)_z=n(dF)$$

其中，(dF)、$(dF)_x$、$(dF)_y$、$(dF)_z$依次为ΔBCD、ΔACD、ΔABD、ΔABC的面积。记四面体微元的体积为dV，斜面BCD上应力向量在坐标方向的分量为P_{Nx}、P_{Ny}、P_{Nz}，则由四面体微元的$\Sigma F_x=0$的条件得

$$P_{Nx}(dF)-\sigma_x(dF)_x-\tau_{yx}(dF)_y-\tau_{zx}(dF)_z+XdV=0$$

遍除以（dF），根据面积关系和$dV/dF\to 0$。得下列方程的第一式。同理，由$\Sigma F_y=0$和$\Sigma F_z=0$得第二式和第三式。即

$$\left.\begin{aligned}P_{Nx}&=\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n\\ P_{Ny}&=\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n\\ P_{Nz}&=\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}4)$$

写成矩阵形式，为

$$\begin{Bmatrix}P_{Nx}\\ P_{Ny}\\ P_{Nz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}l\\ m\\ n\end{Bmatrix}\qquad(1\text{-}5)$$

若应力张量为已知，则任一斜面上的应力均可求出。因此，应力张量完全决定了一点的应力状态。

四、应力转轴公式

取新坐标系为（x'，y'，z'），如图1-4所示。新坐标系与原坐标系的方向余弦列于

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com