高中数学

新增内容

学习指导

附综合练习题及题解

北京市朝阳区教师进修学校 主编

中国农业

高中数学新增内容学习指导

（附综合练习题及题解）

编　者

北京市朝阳区教师进修学校　陈家让

北京市朝阳区教师进修学校　贾中裕

北京市朝阳区教师进修学校　王诚珍

北京市朝阳区教师进修学校　唐大昌

北京市呼家楼中学　周乂之

北京市朝阳中学　邓立言

北京市八十中学　谢贤衍

北京市一〇二中学　臧龙光

北京市和平街二中　王肃仪

中国农业机械出版社

本书是根据中学数学现行教学大纲新增内容部分编写的。全书共六章，分别讲述“线性方程组”、“不等式的性质和证明”、“复数”、“排列、组合和二项式定理（包括数学归纳法）”、“数列和极限”以及“导数、微分及其应用”。各章都包括基础知识、例题、练习题及题解三部分。

为了帮助读者搞好这部分内容的复习，在书末附有综合练习及题解。在综合练习题中，特别着重于新增内容与数学各科之间的联系和综合运用。

本书对教师提高教学质量和学生进行高考复习均有较大的参考价值，此外也可供知识青年自学时使用。

高中数学新增内容学习指导

（附综合练习题及题解）

北京市朝阳区教师进修学校　主编

*

中国农业机械出版社出版

国防科委印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

新华书店经售

*

787×1092　32开　$16\frac{14}{16}$印张　361千字

1982年2月北京第一版·1982年2月北京第一次印刷

印数：000,001—278,000　定价 1.40元

统一书号：7216·20

前　　言

全国统编数学教材，即将在全国各地中学普遍使用，其中增加了一部分新的数学内容，理论深、难度大，过去在中学从未讲过，教师为搞好教学急需新教材的补充参考资料和习题分析；学生为掌握好这部分内容，提高解题能力，迫切需要有一本学习指导书；自学的青年为弥补无人讲授新增数学的内容，也需要有这方面内容的书作参考。基于上述原因，我们编写了高中数学新增内容学习指导(附综合练习及题解)这本书。在编写时，我们以统编教材为依据，教学大纲为基本要求，又根据教育部一九八二年高考数学学科范围的规定而编写的。各章中都包括基础知识、例题、练习题三部分。为了帮助和辅导毕业生的高考复习，在本书的最后部分写进了综合练习。在精选的综合练习的十套题中，着重了代数、平面几何、立体几何、解析几何、三角函数与教材中高等数学部分各科之间的联系与综合运用。为便于学生解题，综合练习题全部给出了解答。

在编写过程中得到了王曰润、徐连恒、汪光顺及其他有经验教师的校对、审阅，在此表示衷心的感谢。由于时间仓促，限于我们的水平，错误和不妥之处在所难免，望读者批评指正。

编　　者

1981年8月

目　　录

第一章　线性方程组

行　列　式

一、基础知识

1．行列式

（1）二阶行列式的展开式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

（2）三阶行列式的展开式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3.$$

对角线法则仅适用于二阶、三阶行列式，不适用于高于三阶的行列式.

（3）按一行(或一列)展开行列式的定理可知行列式等于它的任意一行（或一列）的各元素与其对应代数余子式乘积的和.

例如，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$=a_{11}\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}+a_{12}\times(-1)^{1+2}$$

$$\times\begin{vmatrix}a_{41}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}+a_{13}\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{44}\end{vmatrix}$$

$$+a_{14}\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}\end{vmatrix}.$$

在行列式中，元素 a_{ij} 的代数余子式指的是在行列式中划去 a_{ij} 所在的行和列后所余下的 $(n-1)$ 阶行列式附以符号 $(-1)^{i+j}$.

在这个基础上，可以写出 n 阶行列式的展开式.

2． 行列式的性质

（1） 行列调换的定理

定理 1① 把行列式的各行变为相应各列，其行列式的值不变（简称“行列互换，其值不变”）.

定理 2 把行列式的两行（或两列）对调，所得行列式与原行列式的绝对值相等，符号相反（简称“两行（列）对调，改变符号”）.

（2） 直接判断行列式的值为零的定理

定理 3 如果行列式某一行(或一列)的对应元素相同，那么行列式的值等于零.

① 为了方便读者，本节定理、推论的排号与全国统编教材高中数学第三册 1979年 4 月第一版相同.

定理 4 的推论 2　如果行列式某一行（或一列）的所有元素都是零，那么行列式的值等于零.

定理 5　如果行列式某两行（或两列）的对应元素成比例，那么行列式的值等于零.

（3）对行列式进行运算的定理

定理 4　把行列式的某一行（或一列）的所有元素同乘以某一个数 k，等于用数 k 乘以原行列式.

推论 1　行列式的某一行（或一列）有公因子时，可以把公因子提到行列式外面.

定理 6　如果行列式的某一行（或一列）的元素都是二项式，那么这个行列式等于把这些二项式各取一项作为相应行（或列），而其余行（或列）不变的两个行列式的和.

定理 7　把行列式某一行（或一列）的所有元素同乘以一个数 k，加到另一行（或列）的对应元素上，行列式的值不变.

在行列式的化简或求值运算中，应强调每一步运算的依据和目的. 一般步骤如下：

（1）提出行（或列）的公因式，使行列式的元素尽量简单. 把元素中的分数、小数都化为整数.

（2）观察是否存在对应元素成比例的两行（或两列），或者能否将两行（或两列）的对应元素化为成比例的，若能，则化为成比例的.

（3）将某一行（或列）化为只有一个非零的元素，然后按此行（或列）展开.

（4）有时按某行（或列）直接展开运算方便.

3. 解析几何中的几个公式

（1） 过两不同点 $p_1(x_1,y_1)$、$p_2(x_2,y_2)$ 的直线方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

（2） 平面上三点 $p_1(x_1,y_1)$、$p_2(x_2,y_2)$、$p_3(x_3,y_3)$ 共线的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

（3） 不平行的三条不同直线，$a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$，$a_3x+b_3y+c_3=0$，其共点的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

（4） 在$\triangle ABC$中，$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$

若三顶点 A、B、C 的顺序是逆时针 方向如图1-1a，那么

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

若三顶点 A、B、C 的顺序是顺时针方向如图 1-1b，那么

$$S_{\triangle ABC}=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

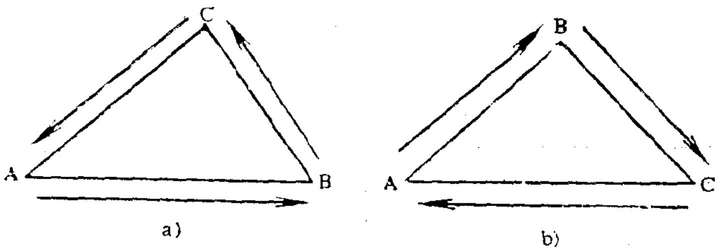

图 1-1

如果不能确定三顶点 A、B、C 的顺序是逆时针还是顺时针时，那么

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\text{的绝对值}.$$

（5）一般二元二次方程 $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ 其中 A、B、C 不同时为零. 可利用下面四个判别式.

$$I_1=A+C;$$

$$I_2=AC-B^2;$$

$$I_3=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

$$K_1=\begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix}.$$

判定这个方程的轨迹. 现列表如下：

椭圆型 $I_2>0$	(1) $I_3\neq0$，I_3 与 I_1 反号，椭圆 (2) $I_3\neq0$，I_3 与 I_1 同号，无轨迹 (3) $I_3=0$，点椭圆
双曲线型 $I_2<0$	(4) $I_3\neq0$，双曲线 (5) $I_3=0$，两相交直线
抛物线型 $I_2=0$	(6) $I_3\neq0$，抛物线 (7) $I_3=0$，$K_1<0$，两平行直线 (8) $I_3=0$，$K_1=0$，两重合直线 (9) $I_3=0$，$K_1>0$，无轨迹

行列式本身可以看作是“代数和”，看作是“数值”，在各类题中都能以行列式形式出现．如求值、因式分解、恒等证明、解方程、解不等式等等．行列式中的元素可以为有理数、无理数、虚数、指数式、对数式、三角函数式、反三角函数式等等．解析几何中的几个重要公式也是以行列式形式给出的．因此，行列式与其它部分知识联系是很广泛的，通过行列式的学习可以起到巩固其它数学知识的效果．本章学习行列式的重要目的在于用行列式解线性方程组．

二、例题

例1． 求证下列恒等式成立

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 \end{vmatrix}.$$

证明：

$$右式=\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_1\alpha_2 \\ a_2\alpha_1 & a_2\alpha_2 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1 & b_2\beta_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1\beta_1 & a_1\alpha_2 \\ b_2\beta_1 & a_2\alpha_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1\beta_1 & b_1\beta_2 \\ b_2\beta_1 & b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$=0+\alpha_1\beta_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}+\alpha_2\beta_1\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}+0$$

$$=\alpha_1\beta_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}-\alpha_2\beta_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}=\text{左式}.$$

∴ 求证成立.

例2. （1） 求证下面的行列式的值能被 13 整除:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 15 & -20 & 18 \\ 8 & 9 & 9 \end{vmatrix}.$$

证明:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 15 & -20 & 18 \\ 8 & 9 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2+7+4 & 7 & 4 \\ 15-20+18 & -20 & 18 \\ 8+9+9 & 9 & 9 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 13 & 7 & 4 \\ 13 & -20 & 18 \\ 26 & 9 & 9 \end{vmatrix}=13\begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & -20 & 18 \\ 2 & 9 & 9 \end{vmatrix}$$

∵ $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & -20 & 18 \\ 2 & 9 & 9 \end{vmatrix}$ 的值为整数,

$$\because \quad \therefore \begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 15 & -20 & 18 \\ 18 & 9 & 9 \end{vmatrix} \text{能被 13 整除.}$$

（2） 已知 209，231，187 能被 11 整除.

求证：

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 178 \\ 3 & 8 & 201 \\ 9 & 3 & 160 \end{vmatrix} \text{能被 11 整除.}$$

证明：

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 178 \\ 3 & 8 & 201 \\ 9 & 3 & 160 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 2\times5+3\times7+178 \\ 3 & 8 & 2\times3+3\times8+201 \\ 9 & 3 & 2\times9+3\times3+160 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 7 & 209 \\ 3 & 8 & 231 \\ 9 & 3 & 187 \end{vmatrix}.$$

$\because$ 209，231，187 能被11整除，

$\therefore$ 第三列提出公因数 11 后，仍为整数元素的行列式.

$$\therefore \begin{vmatrix} 5 & 7 & 209 \\ 3 & 8 & 231 \\ 9 & 3 & 187 \end{vmatrix} \text{能被 11 整除.}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 5 & 7 & 178 \\ 3 & 8 & 201 \\ 9 & 3 & 160 \end{vmatrix} \text{能被 11 整除.}$$

说明：1）首先考虑把第三列怎样运算才能出现已知数.

$$209-178=31=2\times5+3\times7,$$

$$231-201=30=2\times3+3\times8,$$

$$189-160=27=2\times9+3\times3.$$

∴ 第三列＋2×第一列＋3×第二列＝已知数.

2）以整数为元素的行列式的值是整数.

例3. （1） 若一个五阶行列式有不少于21个元素为零,证明这个行列式的值为零.若四阶行列式仅有12个元素为零，能否肯定它的值为零？

证明：

因为一个五阶行列式有不少于21个元素为零，所以，最多可设4个元素不为零. 无论如何排列，在五行中总有一行元素均为零. 所以原五阶行列式的值为零.

若四阶行列式中仅12个元素为零，则有四个元素不为零. 总可以排出一个每行每列有一个元素不为零的四阶行列式例如

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=abcd(a,b,c,d\text{均不为零}).$$

所以若四阶行列式仅有12个元素为零，则不能肯定这个行列式的值为零.

（2） 写出行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}\text{不等于零的全部三阶代数余子式.}$$

解：

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&2&3\\0&0&3\end{vmatrix}\neq 0$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&3\\0&0&3\end{vmatrix}\neq 0;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{vmatrix}\neq 0;$$

$$A_{43}=(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{vmatrix}\neq 0;$$

$$A_{44}=(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{vmatrix}\neq 0.$$

（3） 写出行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$$

中所有带负号包含 a_{11}，a_{23} 的项.

解：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$$