矿井通风系统分析

—电子计算机的应用

冶金工业出版社

内 容 提 要

本书叙述了在矿井通风设计和生产管理中用电子计算机进行网路解算、扇风机选择、网路结构分析和风阻调整计算的原理和方法。书中附有DJS—21机$ALGOL_{60}$算法语言程序和例题。其基本原理也适用于工厂通风除尘管网设计计算。

本书可供从事通风设计、管理、科研和大专院校有关专业师生参考。

矿井通风系统分析

——电子计算机的应用

从善本 编著

*

冶 金 工 业 出 版 社 出 版

（北京灯市口74号）

新华书店北京发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

*

850×1168 1/32 印张 6 字数 156 千字

1981年12月第一版 1981年12月第一次印刷

印数 00,001～1,450 册

统一书号：15062·3699 定价 0.81 元

前　言

由于生产和科学技术的发展，电子计算机在科学技术和国民经济的各个部门都得到了广泛的应用，并已深入到人类生活的各个方面。近年来，我国在矿业方面推广应用计算机工作已引起普遍的重视。几年来，我们结合矿山设计和生产工作的需要，开展了应用电子计算机进行矿井通风设计的研究，编制了矿井通风网路解算、扇风机选择和网路结构分析的电子计算机程序。在使用中取得了一些成效。本书对程序中使用的计算方法和原理以及对具体工程问题的计算处理加以总结，并附有设计计算实例。最后还附有两个计算程序及其使用说明。

本书共分五章。为了采矿专业技术人员、通风安全管理人员阅读本书的方便，以及对本书所述的计算方法有较深入的了解，以便今后能够改进程序，并发展新的程序，在第一章中简要介绍了下面各章中所涉及到的有关矩阵和线性代数方程组的知识。其他所涉及的有关数学问题，结合各章对具体问题的讨论加以介绍。

第二章介绍了用Hardy-Cross方法解算矿井通风网路风量分配和对具体问题的计算处理的原理和方法。介绍了图论的基本概念，根据图论中关于连通图、“树图”和回路的理论，介绍了一种在解算矿井通风网路时，由电子计算机自行形成独立闭合回路的方法。

第三章介绍了扇风机数据及其有关信息在电子计算机中的加工储存方式和扇风机最佳选择的方法。

第四章介绍了用电子计算机合理确定网路结构及其分支风道风阻的一种方法。为通风系统方案设计提供数量依据。

第五章介绍了应用图论方法，解算矿井通风网路的节点压力

重复计算法，这个方法直接简便，不需要回路信息，占用机器内存量较少，并且计算速度快。

本书在程序编制、应用、推广过程中，曾得到冀东矿山设计研究院马骥同志、冶金部安全技术研究所葛云生同志、冶金部矿冶研究所阳昌明同志以及长沙矿山设计研究院田其俊同志和采矿技术组许多同志的帮助和合作。本书编写过程中，曾得到冶金部安全技术研究所马秉衡工程师、武钢矿山研究所刘元莘工程师等同志的指导、帮助和鼓励，并提出了宝贵意见，作者表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中一定会有不妥和错漏之处，敬请读者批评指正。

编　者

一九七九年七月于长沙

目 录

第一章 矩阵和线性方程组

在通风网路风量分配解算、风机数据信息的加工、风机选择、网路结构分析及阻力调整计算中，都要用到矩阵和线性代数方程组的一些理论和计算方法，而且矿井通风网路的求解，归结为求解一个大型非线性方程组，各种求解方法都是从不同角度对它施行线性化的过程。本章扼要介绍下面各章所用到的共同数学内容。至于各部分所涉及到的其他数学内容，将在各自的章节中，结合实际问题分别予以介绍。

这里主要为采矿工程技术人员阅读本书的方便而编写的。侧重于介绍基本概念，计算规则和计算方法未予严格证明，并且在讨论计算方法时，不涉及其计算程序设计的具体方法。

第一节 矩 阵

一、矩阵的概念

一组元素按行、列次序排成的矩形阵列，称为矩阵。若矩阵的元素排列为m行和n列，称为$m\times n$阶矩阵，其中元素可以是实数、复数或函数。一个$m\times n$阶矩阵，通常表示为如下形式：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵的缩写形式，可以用一个大写字母或在方括号中的一个广义元素，即A或$[a_{ij}]$表示之。

$$A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

在第 i 行和第 j 列的元素，以带有下标的a_{ij}表示。第一个下标表示行的位置，第二个下标是列的位置。

矩阵是由相当普遍的事物中抽象出来的概念。例如：由十条分支风路组成的通风网路，每个分支风路 i 有四个参数——长度L_i，断面S_i，周边长P_i，风阻系数α_i，它们这些基本参数可以使用一个矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} L_1 & L_2 & \cdots\cdots & L_{10} \\ S_1 & S_2 & \cdots\cdots & S_{10} \\ P_1 & P_2 & \cdots\cdots & P_{10} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots\cdots & \alpha_{10} \end{bmatrix}$$

又如一个线性方程组

$$\begin{cases} 5x-15y+8z=18 \\ 3x\qquad\quad +6z=105 \\ \qquad\quad 7y+6z=77 \end{cases}$$

其系数矩阵可表示为

$$\begin{bmatrix} 5 & -15 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

矩阵和行列式的原理紧密相联，但它们是根本不同的两个概念。行列式可以求值，它总是一个数，其行数和列数必须相等。而矩阵不是一个数（除1×1阶外），其行数和列数也不一定相等。

行数 m 和列数 n 相等的矩阵称为方阵。方阵 A 的行列式记作$|A|$。如果$|A|=0$则称 A 为奇异矩阵，如果$|A|\neq0$则称 A 为非奇异矩阵。

二、几种特殊的矩阵

行矩阵——由一个单独的行组成的矩阵称为行矩阵，常用

〔 〕表示。如

$$[A]=[a_1\ a_2\cdots\cdots a_n],\quad 1\times n\text{阶};$$

列矩阵——由一个单列组成的矩阵。常用花括号{ }表示。如

$$\{A\}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},\qquad n\times 1\text{阶};$$

零矩阵——所有元素都是零的矩阵。记作 0；

对角矩阵——它的一般形式和记号是：

$$D=\mathrm{diag}\{d_i\}=\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

对角矩阵是方阵时，其行列式的值

$$|D|=\prod_{i=1}^{n} d_i$$

单位矩阵——对角线元素都是 1 的对角矩阵，称为单位矩阵（或么矩阵）常用 I 来表示：

$$I=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

三角形矩阵——对角线以下的所有元素都是零的方阵称为上三角矩阵，它的一般形式是：

$$U=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots\cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots\cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

若对角线上元素都是1则称之为单位上三角矩阵。若对角线上元素都是零，则称之为严格上三角矩阵。

同样，对于对角线以上的所有元素都是零的方阵则称之为下三角矩阵。对角线上元素都是1的称为单位下三角矩阵，都是零则称为严格下三角矩阵。

由行列式的定义可知，三角形矩阵行列式的值，等于对角线各元素的乘积

$$|U|=\prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

对称矩阵——在方阵A中，元素a_{ii}所在位置构成的一个对角线，对角线两边对称位置上的元素一一对应相等的方阵，称为对称矩阵。如：

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

就是一个对称矩阵。对称矩阵A的元素满足关系式

$$a_{ij}=a_{ji} \quad (i,j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

三、矩阵的运算

我们知道，数有加减乘等运算，矩阵也有类似的运算。但应该注意，数与矩阵有本质的区别，矩阵有不同于数的特殊运算规律。

所谓运算，其实质就是对等式进行恒等变换。两个矩阵相等必须两个矩阵所有元素都一一对应相等。

1．矩阵的加与减　矩阵的加减运算，仅能在同阶矩阵间进

行。两个矩阵之和与差，由两个矩阵的对应元素相加或相减而得到。

例如：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \end{bmatrix}$$

加减法运算可以推广到任意多个矩阵，其运算满足交换律和结合律，即

$A \pm B = \pm B + A$；交换律。

$A \pm B \pm C = A \pm (B \pm C)$；结合律。

2. 数与矩阵相乘　数 λ 与矩阵A相乘等于该数乘以矩阵A中的每一个元素。即

$$\lambda A = A\lambda = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots\cdots \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots\cdots \lambda a_{2m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots\cdots \lambda a_{nm} \end{bmatrix}$$

例　$4\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 10 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

3. 矩阵乘法　矩阵乘法有两个重要规则：

1）两个矩阵当且仅当它们是共形时，即当矩阵A的列数等于矩阵B的行数时才能相乘。例如：

$$\underset{m\times p}{A} \times \underset{L\times n}{B} = \underset{m\times n}{C}$$

仅在$P=L$时，才能相乘，其结果矩阵的阶数是$m\times n$。

2）在矩阵乘法中，一般不具有交换律。即一般 $A\times B\neq B\times A$

矩阵A与矩阵B的乘积矩阵C，其元素C_{ij}等于A中第i行的诸元素与B中第j列相对应诸元素的乘积之和。因此，若

$$\underset{m\times L}{A}\ \underset{L\times n}{B}=\underset{m\times n}{C} \qquad \text{共形}$$

则C的元素C_{ij}可按下式求出：

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots\cdots+a_{it}b_{tj}+\cdots\cdots+a_{iL}b_{Lj}$$

$$=\sum_{t=1}^{L}a_{it}b_{tj}$$

例如：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}) \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}) \end{bmatrix}$$

矩阵相乘有下述基本性质：

1）矩阵相乘没有交换律，即一般$AB\neq BA$；

2）矩阵相乘有结合律，即$(AB)C=A(BC)$；

3）矩阵相乘有分配律，即$A(B\pm C)=AB\pm AC$；

4）任何矩阵与单位矩阵相乘仍得原矩阵，如：

$$AI=A,IB=B$$

5）任何矩阵与零矩阵相乘仍得零矩阵；

6）若矩阵A与B为同阶方阵则

$$|AB|=|A||B|$$

7）下三角矩阵与下三角矩阵相乘，仍是下三角矩阵。该结论也完全适用于上三角矩阵。

以上性质都是显然的，读者可作为练习加以证明。

4．矩阵的转置和共轭　将矩阵A的行和列互换，所得的矩阵记为A^T，则称A^T为矩阵A的转置矩阵，即若

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad 则 \quad A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}$$

设λ为常数，A、B为矩阵，则转置运算有下列性质：

$$(A^T)^T=A$$

$$(\lambda A)^T=\lambda A^T$$

$$(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$$

$$(AB)^T=B^TA^T$$

若A为对称矩阵，则$A^T=A$；

若矩阵A为方阵，则$|A^T|=|A|$。

这里要特别注意矩阵积的转置性质。假设矩阵A^T的元素为a^T_{ij}，矩阵B^T的元素为b^T_{ij}，$AB=C$，其矩阵C^T的元素为c^T_{ij}。

$$\because \quad a_{jK}=a^T_{Kj},\ \ b_{Ki}=b^T_{iK}$$

$$\therefore \quad c^T_{ij}=c_{ji}=\sum_K a_{jK}b_{Ki}=\sum_K b^T_{iK}a^T_{Kj}$$

这就表明

$$(AB)^T=C^T=B^TA^T$$

如果矩阵A的元素是复数，那末，对其每个元素取共轭，所得到的矩阵记作$\overline{A}$，则矩阵$\overline{A}$就称之为矩阵A的共轭矩阵。

四、矩阵求逆

在矩阵运算中，没有直接的矩阵除法，其矩阵除法运算，由矩阵求逆来完成。例如：

若 $$AB=C$$

则 $$B=A^{-1}C$$

此处矩阵A^{-1}就称为矩阵A的逆矩阵。

一个矩阵的逆矩阵，由下述关系式来定义：

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I$$

其中I为单位矩阵。

根据此定义，便可得出表达上述逆矩阵的形式。假设

$$AB=C$$

这个等式两边各乘以A^{-1}，则得

$$A^{-1}AB=A^{-1}C$$

$$IB=B=A^{-1}C$$

矩阵求逆时，必须满足两个条件：

1）矩阵要是个方阵。

2）矩阵是一个非奇异矩阵，即由矩阵元素所组成的行列式值不为零。

1．行列式　假设有一个线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_{11} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_{21} \end{cases}$$

用消去法可以求得：

$$x_1=\frac{b_{11}a_{22}-b_{21}a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_{21}-a_{21}b_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}$$

此处 $$a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$$

上式如果用行列式可写成：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} \\ a_{21} & b_{21} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

其中 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

为二阶行列式。对于n阶行列式的一般形式可写作：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2．子式、代数余子式和行列式的拉普拉斯展开法　对于低阶行列式，如二阶行列式可用对角线法则进行展开。但是，要把一个高阶行列式进行展开就不那么容易了。这里我们介绍一种把高阶行列式化为低阶行列式展开的拉普拉斯展开法。

先介绍两个概念：

n阶行列式元素a_{ij}的子式——就是把原有行列式去掉第 i 行和第 j 列以后剩余的n-1阶行列式。例如行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ 中元素a_{33}的子式就是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}，a_{22}\text{的子式是} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

n阶行列式元素a_{ij}的代数余子式——就是在其子式前加+、一号的行列式。即如果a_{ij}的子式为M_{ij}，则它的代数余子式为

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

行列式的值等于它的任意行（或任意列）各元素与其对应的代数余子式乘积之和。这就是通常所说的行列式的拉普拉斯展开法。例如，对于行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

或 $$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

前者称为按行展开，后者称为按列展开。

3. 行列式的基本性质

1）若行列式中某一行（列）中的所有元素均为零，则此行列式值等于零；

2）若行列式中某行（列）中的诸元素，除有一个不为零外，其余都为零时，则行列式的值等于此元素与其相应的代数余子式之积；

3）行列式的值与它的转置行列式的值相等；

4）任意两行（列）互换时，则行列式的值改变符号；

5）若行列式任意两行（列）的对应元素相等或成比例；则行列式的值等于零；

6）行列式的某一行或列各元素可用两项和来表示。则该行列式可用两个同阶的行列式之和来表达。例如行列式

$$|D| = \begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 & \cdots\cdots & a_{1n}+b_n \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$|D| = |D_1| + |D_2|$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots\cdots & b_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

7）把行列式的某一行（列）的元素乘以同一个数后，加到另一行（列）的对应元素上，则该行列式的值不变。

4. 矩阵求逆　在进行矿井通风网路阻力结构分析和处理风机数据时，都会遇到矩阵求逆问题。一个非奇异矩阵A求逆的方法有多种，现在把一个古典的求逆矩阵的计算步骤叙述如下：

（1）用矩阵A的每个元素相应的代数余子式代替A的每一个元素；

（2）把一个由代数余子式形成的新矩阵进行转置，得到一个附加矩阵，记作adjA；

（3）用$|A|$除以附加矩阵adjA的每一个元素。即

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots\cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots\cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots\cdots & A_{nn} \end{vmatrix}^{T}=\frac{1}{|A|}\mathrm{adj}A$$

其中A_{ij}是矩阵A的元素a_{ij}的代数余子式。

上式不难验证

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots\cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots\cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots\cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}=I$$

因为对于主对角线上元素

$$I_{ii}=a_{i1}\frac{A_{i1}}{|A|}+a_{i2}\frac{A_{i2}}{|A|}+\cdots+a_{in}\frac{A_{in}}{|A|}$$

$$=\frac{1}{|A|}(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in})$$