叶 军／编著

初中数学奥林匹克实用教程

第三册

★基础与提高并重

★同步与超前结合

★乐趣无限　魅力四射

★名师手笔　托起希望之星

湖南师范大学出版社

高中理科实验班

中国一流大学高才生的摇篮

肖　白

学　籍：长郡中学省级高中理科实验班（高一）

专业爱好：数学与电脑；校外奥数导师：叶军副教授；

未来志向：进清华，留学美国麻省理工；联系电话：5165880

陈子娟

学　籍：长沙市一中初三实验班，并以优异成绩考取长沙一中高中理科实验班；

专业爱好：数学与生物；绰号：东方不败；校外奥数导师：叶军副教授；

未来志向：进清华或北大，留学美国哈佛；联系电话：4462369

图为第6届中国数学奥林匹克湖南省代表队在北京天安门广场的合影，

右四为省领队叶军，右二为第34届IMO金牌获得者湖南师大附中学生刘扬。

ISBN 7-81081-201-7

ISBN7-81081-201-7/G · 138

定价：27.00元

策划组稿／李映辉

责任编辑／廖小刚

版式设计／王　珏

装帧设计／王　珏

叶 军／编著

初中数学☆奥林匹克实用教程

第三册

基础与提高并重
同步与超前结合
乐趣无限 魅力四射
名师手笔 托起希望之星

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

初中数学奥林匹克实用教程．第3册/叶军编著．—长沙：湖南师范大学出版社，2002.7

ISBN 7—81081—201—7/G·138

Ⅰ．初…　Ⅱ．叶…　Ⅲ．数学课—初中—教学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第048148号

初中数学奥林匹克实用教程

第三册

叶　军　编著

策划组稿：李映辉
责任编辑：廖小刚
责任校对：蓝　风

湖南师范大学出版社出版发行
（长沙市岳麓山）
湖南省新华书店经销　　长沙市银都教育印刷厂印刷
730×988　16开　25.75印张　530千字
2002年7月第1版　2002年7月第1次印刷
印数：1—15000册
ISBN7—81081—201—7/G·138
定价：27.00元

前 言

在新世纪里,体现因材施教的教育特色,培养不同层次的学科人才,是基础教育正在积极探索的一个重要课题.从全国范围来看,教育部委托北京大学、清华大学、北京师范大学、华东师范大学等高校的附中举办了面向全国的高中理科实验班,其办班的主要目的是为国家培养高水平的中学生学科竞赛人才,以适应国际大赛的需要;从本省来看,湖南省教育厅委托湖南师范大学附中、长沙市一中、长沙市雅礼中学、长沙市长郡中学举办了面向全省的高中理科实验班.自有理科实验班以来,每年均经过了严格的招生考试,考试科目分四科:数学、语文、外语、理化,四科总分450分,其中语文、外语、理化各占100分,惟独数学占150分,并且招生录取原则中规定:数学单科成绩不得低于65分.由此可见数学单科的地位与作用,能否考上高中理科实验班,数学是关键.此举一直受到广大中学教师、学生及家长的广泛关注.

随着我国高等教育的迅猛发展,读大学将不再是一件难事.现在的中学生基本上都是独生子女,家长对子女的期望值已发生了质的变化.以往是大学选择学生,而现在已经出现了学生选择大学(不服从分配)的现象.随着各地理科实验班办学质量不断提高,学生追求名牌大学的愿望将会不断增强,但由于清华、北大等一流大学每年在各省的招生名额都非常少,几乎都被理科实验班的学生提前取走,因此,要在全国高考中竞争考上清华、北大是比较困难的.这样一来,不少学生家长为了实现儿女的清华、北大梦,从初中一年级开始就着手准备了.

在这样一种趋势下,为了保证高中理科实验班有高质量的生源,各地的名牌中学在初中就纷纷办起了各种层次的实验班.这样一来,能进入初中实验班学习就成了学生追求的目标之一.

据我们了解,除了学校办的初中实验班外,在社会上,由社会团体以及学生家长自发创办的面向那些学有余力的学生开设的提高班也有不少.这些民办的提高班,往往是由各中学的初中实验班的学生组成.这些学生在校外学到的知识和技能是对校

内所学知识的重要补充，其中不少学生通过一至两年的学习，就能在全国初中数学联赛以及高中理科实验班的考试中脱颖而出.

据我们了解，目前全国的高、初中数学教科书已进行了大面积的改编，而现在各校初中实验班所用的教材都比较陈旧，适应不了新世纪中学教育改革的需要.现在绝大多数实验班和提高班的师生都希望有一套系统的能适应未来至少5年教育发展的学习用书.

综上所述，根据新编全国高、初中数学教科书的要求，湖南师范大学出版社组织编写了这套《初中数学奥林匹克实用教程》丛书.

该套丛书共分四册，第一至三册中每讲分A、B两子讲.第四册是为报考高中理科实验班的学生编写的复习迎考教材.在编写过程中注意突出以下两点：

(1)**基础与提高并重**　采用同一讲分A、B两子讲的编写方法，A讲强调基础，帮助学生从竞赛的角度进一步深化对初中课本数学内容的认识，掌握课本以外的奥数内容；B讲强调提高，帮助学生掌握初中奥数中的一些要求较高的内容和技巧.

(2)**同步与超前结合**　A讲内容与初中教科书内容基本同步，但在数学思维方法的渗透和数学能力与技巧的培养方面又有一定的超前性，以便帮助那些出类拔萃的学生更快地提高；B讲内容则不受教材知识顺序的限制，在突出重点的基础上加强知识和方法的纵横联系，帮助学生从整体上把握初中奥数的内容，提高数学素养和综合解题的能力.

值此《初中数学奥林匹克实用教程》出版之机，我谨向热情支持和关心本书出版的湖南师范大学出版社的有关编辑致以崇高的谢意；我还要感谢为数学竞赛作出贡献的所有专家学者和中学数学教师，本书的许多材料来源于他们的智慧和创造；最后还要感谢曹灵芝女士，她为本书的出版做了大量的具体工作.

由于水平所限，书中若有不妥和差错，敬请专家和读者批评指正，并且我热情地期待更多的优秀数学奥林匹克教材问世.

叶　军

2002年夏于湖南师范大学

作者简介

叶军，男，湖南益阳市人，1963年4月生，现为湖南师范大学数学系副教授，中国数学奥林匹克高级教练。已发表论文百余篇，出版著作9部，其中专著《数学奥林匹克教程》是全国各省市高中理科实验班必读的三本奥数书之一，被同行们誉为“白皮书”。叶军是湖南师范大学附中第34届IMO金牌获得者、第32届IMO银牌获得者的主要教练之一。1992年曾率领湖南省队参加第6届中国数学奥林匹克，该队以团体总分第一夺得“陈省身金杯”。

叶军同志从事数学奥林匹克的教学和研究工作近20年（中学6年，大学14年），在大学主讲师范类本科生必修课程“竞赛数学”，几乎每年被省内外名牌中学邀请为理科实验班讲学。他独特的教学风格赢得了广大师生的赞誉，并初步形成了贯穿中学到大学别具一格的数学奥林匹克教学体系。如今有一批青少年学子正在他的指导下脱颖而出。

内容简介

本套丛书共四册，是专门为学有余力的初中学生编写的数学奥林匹克系统学习教材。在第一至三册里，每讲分A、B两子讲。A讲主要讲述课本知识的延伸；B讲主要讲述课本知识的提高。两子讲在知识和题目的难易程度上形成了梯度，并且均指明了适用学生对象，以便于学生自学，方便教师备课。每子讲均配备了大量的针对性习题，并附有答案与提示。

目 录

第一讲　圆(二)

A

(本讲适合初三)

§1.1　面积计算与面积方法

本讲中所涉及的问题均是指与圆有关的面积问题,其实质与第二册§8.3中介绍的等积变换与面积方法是一样的.可以说本讲是第二册§8.3讲的延续.

1. 圆的面积公式

$$S_{圆}=\pi r^2=\frac{1}{4}\pi d^2=\frac{1}{2}cr.$$

其中r为圆的半径,d为圆的直径,c为圆的周长.

2. 扇形面积公式

$$S_{扇形}=\frac{n}{360}\pi\cdot r^2=\frac{1}{2}l\cdot r.$$

其中n是扇形圆心角的度数,l表示扇形的弧长.

3. 与圆有关的三角形面积公式

$$S_{\triangle}=rp=\frac{abc}{4R}.$$

其中r,R分别为三角形的内切圆与外接圆半径,a,b,c为三边长,p为半周长.

4. 圆内接四边形面积公式

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

其中a,b,c,d是圆内接四边形的各边长,p为半周长.

5. 有内切圆的多边形面积公式

$$S_{多边形}=pr.$$

其中p为半周长,r为内切圆半径.

6. 典型例题选讲

Ⅰ. 面积计算、证明问题

例 1 如图 1－1，点 P、Q、R 分别在$\triangle ABC$ 的边 AB、BC、CA 上，且 $BP=PQ=QR=RC=1$，求$\triangle ABC$ 的面积的最大值.

解 连结 PR，依题意知$\triangle ABC$ 中有三个腰长均为 1 的等腰三角形：$\triangle PBQ$，$\triangle QPR$，$\triangle RQC$.

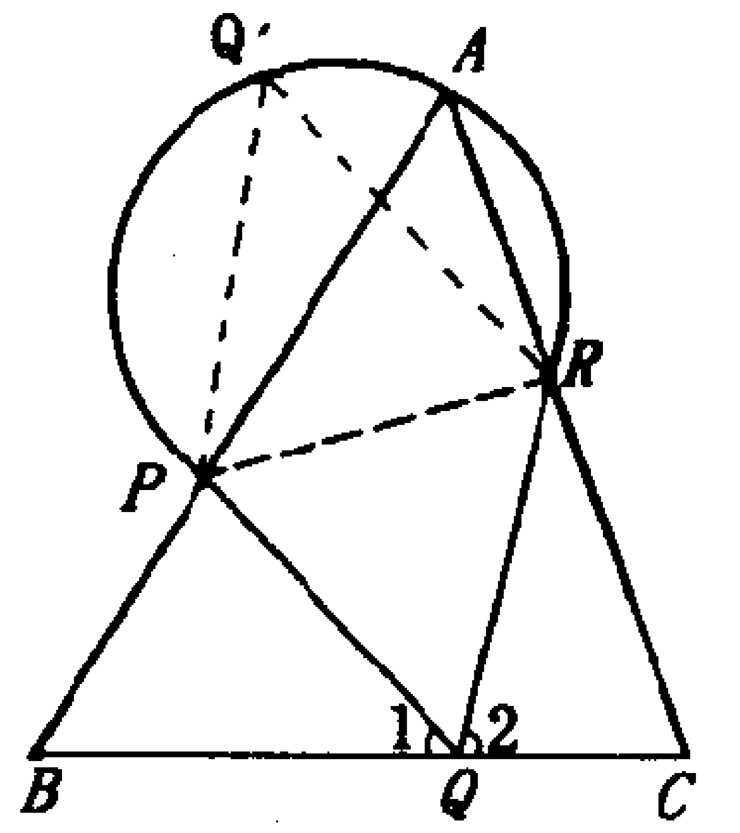

图 1－1

$$S_{\triangle PBQ}=\frac{1}{2}\sin\angle BPQ\leqslant\frac{1}{2},$$

同理：$S_{QPR}\leqslant\frac{1}{2}$，$S_{\triangle RQC}\leqslant\frac{1}{2}$.

以上三个不等式等号成立当且仅当

$\angle BPQ=\angle PQR=\angle QRC=90°$.

另一方面，$\because$ $\angle 1=\angle B$，$\angle 2=\angle C$，

$\therefore$ $\angle PQR=180°-\angle 1-\angle 2=180°-\angle B-\angle C=\angle A$.

作 Q 关于 PR 的对称点 Q'，连 PQ'，RQ'. 则$\angle PQ'R=\angle PQR=\angle A$，

$\therefore$ A、Q'、P、R 四点共圆.

又 $\because PQ=QR$，$\therefore PQ'=RQ'$.

$\therefore$ Q'是弧$\overset{\frown}{PQ'AR}$的中点，

$\therefore$ Q'到 PR 的距离$\geqslant A$ 到 PR 的距离.

$\therefore$ $S_{\triangle APR}\leqslant S_{\triangle Q'PR}=S_{\triangle QPR}\leqslant\frac{1}{2}$.

$\therefore$ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PBQ}+S_{\triangle QPR}+S_{\triangle RQC}+S_{\triangle APR}\leqslant 4\cdot\frac{1}{2}=2$.

等号成立当且仅当$\angle A=90°$，P，Q，R 为三边中点. 故$\triangle ABC$ 的最大值为 2.

注 1. 本题中，我们实际上已经证明如下面积极值定理：

(1)底边相等的圆内接三角形中以等腰三角形的面积最大.

进一步作调整，又可得出：

(2)圆内接三角形中以正三角形的面积最大.

2. 一般地，可以证明如下面积的极值定理：

圆内接 n 边形中以正 n 多边形的面积最大(其中 $n\geqslant 3$).

3. 值得指出的是，关于多边形的面积，还有著名等周面积极值定理，即周长一定的 n 边形中以正 n 边形的面积最大.

以上面积极值定理，我们在解题中可尽管使用.

例 2 如图 1－2，给定半径为 r 的圆上定点 P 的切线 l，由此圆上动点 R 引 $RQ\perp l$，交 l 于 Q. 试确定面积最大的$\triangle PQR$.

分析 欲求 Rt$\triangle PRR$ 的最大面积，只须在圆内寻求一个与它有面积间数量关系的三角形，这样，就可以利用圆内接三角形面积极值定理使问题得到解决.

解 如图1-2,作 $RS/\!/PQ$ 交⊙O 于 S,再作 $PM\perp RS$ 于 M,则 M 是 RS 的中点,且 $RM=PQ$,所以

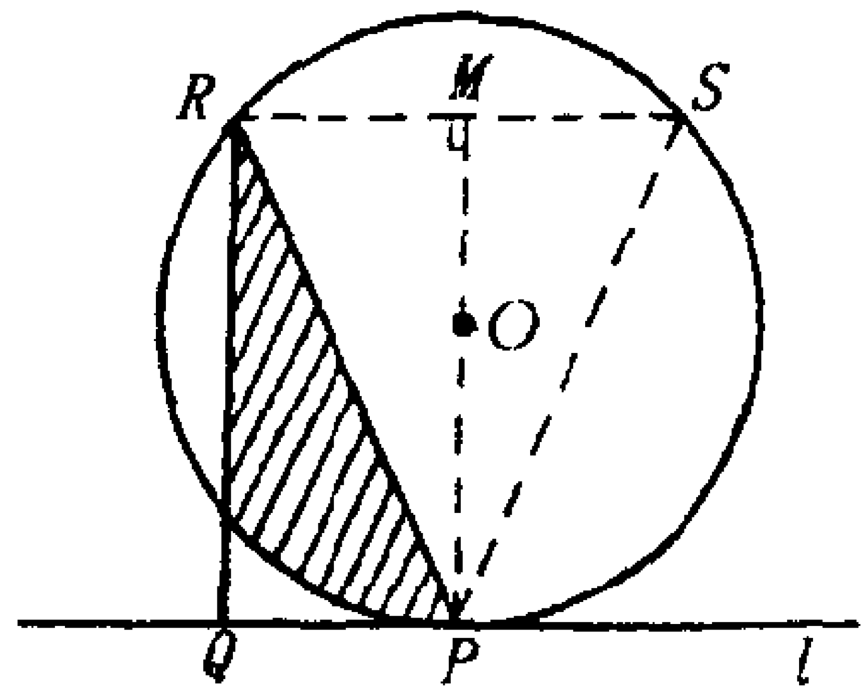

图1-2

$$S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}PQ\cdot QR. \quad ①$$

但 $$S_{\triangle PRS}=\frac{1}{2}PM\cdot RS=\frac{1}{2}QR\cdot(2RM)$$
$$=\frac{1}{2}QR\cdot(2PQ)=PQ\cdot QR. \quad ②$$

由①,②,得 $S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}S_{\triangle PRS}$.

由于△PRS 为圆内接三角形,所以,当它为正三角形时,面积最大,△PRS 的最大面积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$,此时,$\angle PRS=60°$.所以,△PQR 的最大面积为$\frac{3\sqrt{3}}{8}r^2$,而此时$\angle PRQ=30°$.

因此,当$\angle PRQ=30°$时,有面积最大的△PRQ 存在,且最大面积为$\frac{3\sqrt{3}}{8}r^2$.

例3 如图1-3,A 是⊙O 外的一点,且 $OA=2$,AB 是⊙O 的切线,B 是切点,$BC/\!/OA$,连结 AC,已知⊙O 的半径为1,求阴影部分的面积.

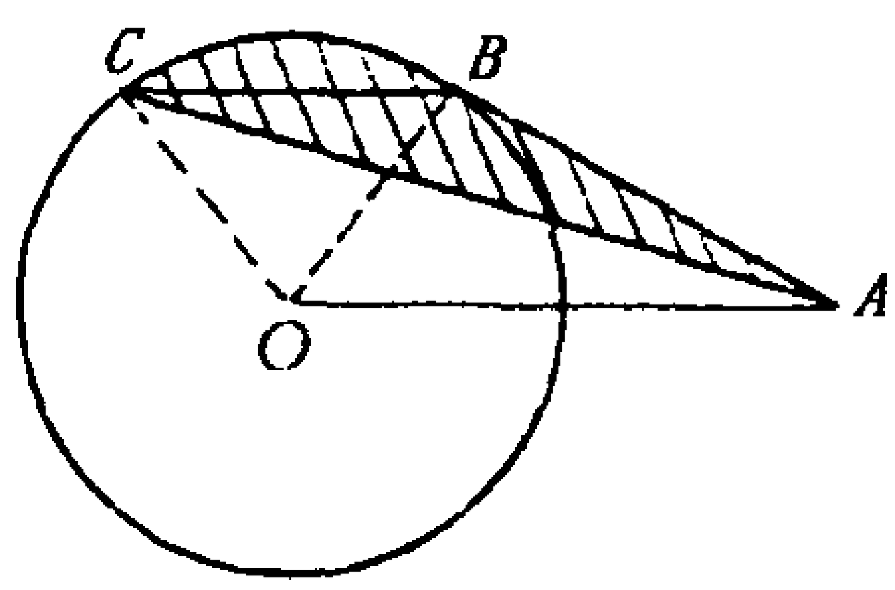

图1-3

解 连结 OB,OC.

∵ $BC/\!/OA$,∴ $S_{\triangle OBC}=S_{\triangle ABC}$,

这说明阴影部分的面积即为扇形 OBC 的面积.

又∵AB 是⊙O 的切线,∴$\angle ABO=90°$.

在 Rt△ABO 中,$OA=2$,$OB=1$,故$\angle AOB=60°$.

由 $BC/\!/OA$ 知,$\angle OCB=\angle OBC=\angle AOB=60°$,

∴ $\angle BOC=180°-\angle OCB-\angle OBC=60°$.

∴ $S_{扇形OBC}=\frac{1}{6}\pi\cdot OB^2=\frac{\pi}{6}$.

例4 如图1-4,已知 A、B 两点位于⊙O 上,用另一个圆弧 K 连结A 与 B,将⊙O分成面积相等的两部分.求证圆弧 K 的长度大于⊙O 的直径.

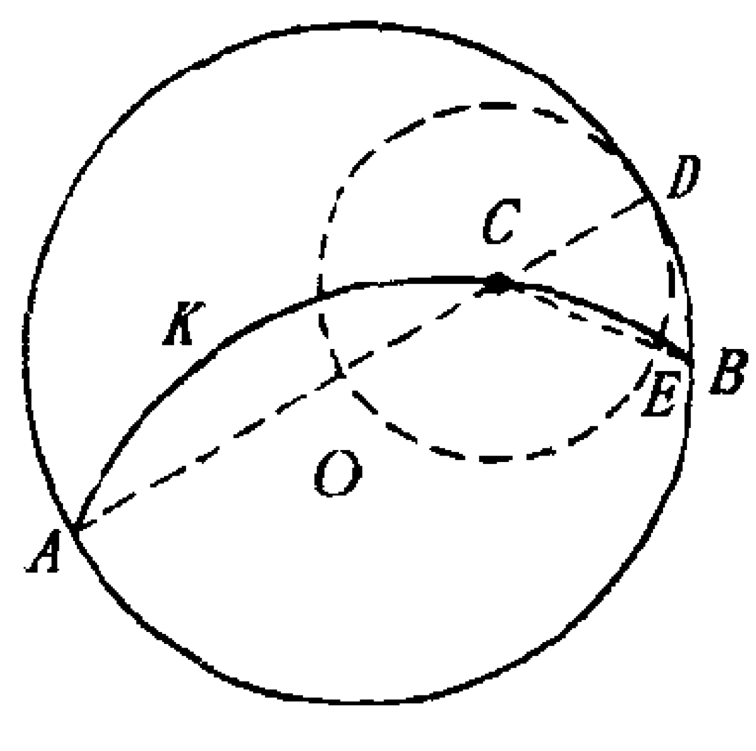

图1-4

证 由于圆的直径将圆的面积分成两个相等的部分,故圆心 O 必在圆弧K 所在的圆的内部,否则就可以找到一条直径与圆弧 K 相切或相离,而 K 将圆分成的两部分面积不相等.

如图1-4所示,O 在圆弧K 所在圆的内部,连结 AO 延长与圆弧K、⊙O 分别交于 C、D.连结 CB.显然圆弧 K 的长度L 大于$AC+CB$.以 C 为圆心、CD 为半径作⊙C,显然⊙C 与⊙O 相切,因而⊙C 必与CB 相交于E,于是

$L > AC + CB > AC + CE = AC + CD = AD$.

其中 AD 为$\odot O$ 的直径.

例 5 如图 1－5,两圆外切,PAB,$PA'B'$ 是外公切线,且 $PA = AB = 4$,求小圆的面积.

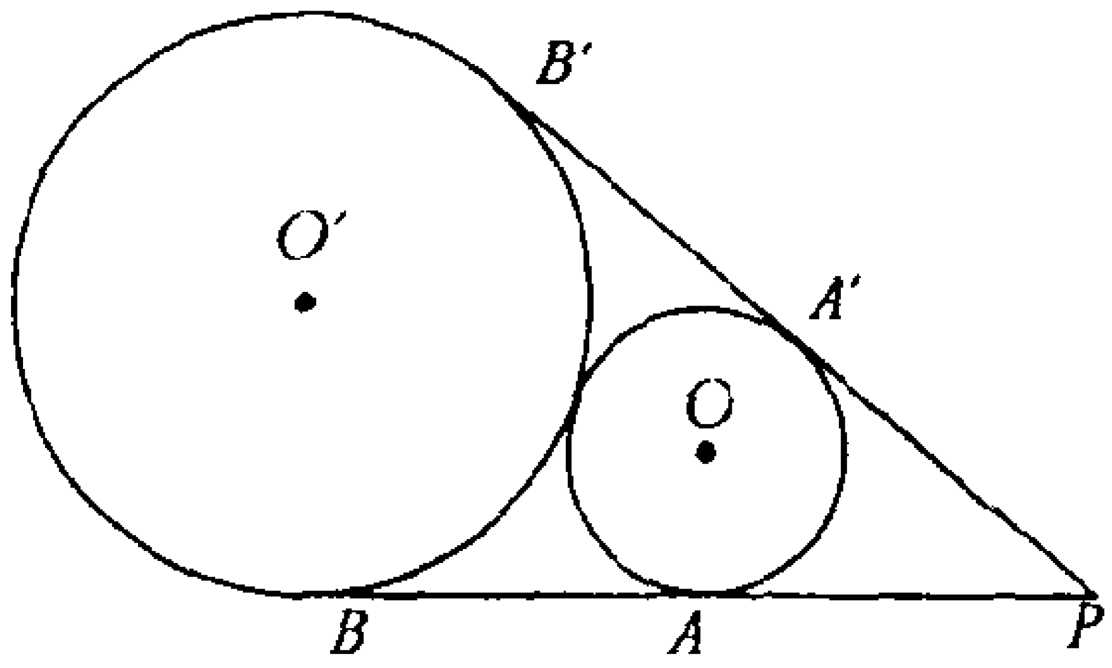

图 1－5

解 设大、小两圆的半径为 R,r,则

$$\frac{OP}{O'P} = \frac{r}{R}, \frac{PA}{PB} = \frac{4}{4+4} = \frac{1}{2},$$

$\therefore \quad R = 2r, O'P = 2OP$.

但 $OO' = R + r$,

$\therefore \quad 2\cdot OP = O'P = OO' + OP = R + r + OP$,

$\therefore \quad OP = R + r = 3r$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OAP$ 中,$OP^2 = OA^2 + AP^2$,即$(3r)^2 = r^2 + 4^2$,$\therefore r^2 = 2$,

$\therefore \quad S_{小圆} = \pi r^2 = 2\pi$.

例 6 如图 1－6,一个学生剪了三个圆,它们的半径分别为 2、3、10,他把它们摆在一张圆桌上,使每个圆都与其他两个圆外切,也与圆桌相切.求这桌面的面积.

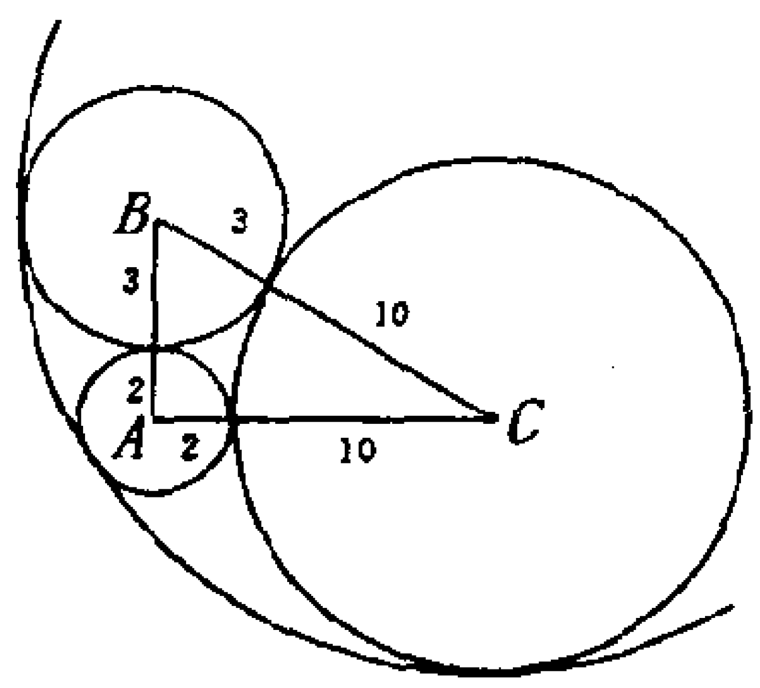

图 1－6

解 设半径为 2、3、10 的圆的圆心分别为 A、B、C,连结 AB,BC,CA 均过有关的切点.$AB = 5$,$BC = 13$,$CA = 12$,因而$\triangle ABC$是直角三角形,$\angle A = 90°$,以 AB、AC 为边作矩形 $ABOC$,连结 OA,且将 OA、OB、OC 延长分别交三个圆于 D、E、F,则

$OD = OA + AD = 13 + 2 = 15$,

$OE = OB + BE = 12 + 3 = 15$,

$OF = OC + CF = 5 + 10 = 15$,

以 O 为圆心,15 为半径的圆与三个圆都相切,即为桌面圆,故桌面圆的半径为 15,面积为 $\pi\cdot 15^2 = 225\pi$.

例 7 如图 1－7,$\odot O$ 与$\odot O_1$ 外切,AB 为外公切线(A,B 为切点),若两圆的半径分别为 1 和 3,求阴影部分的面积.

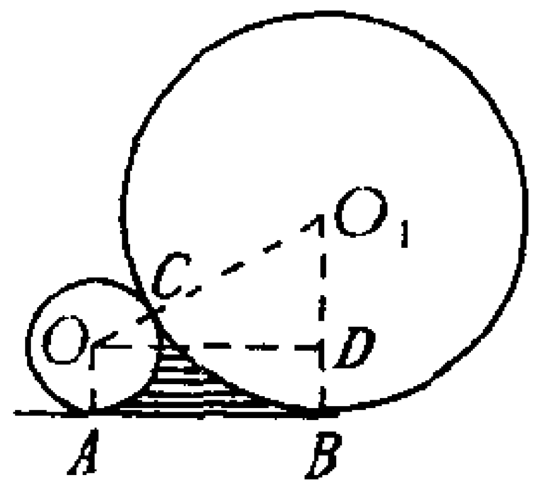

图 1－7

解 连结 OO_1、OA、OB,则 $OA \perp AB$,$O_1B \perp AB$.

$\therefore OA /\!/ O_1B$,AOO_1B 是一直角梯形.

过 O 作 $OD /\!/ AB$ 交与 O_1B 于 D,则 $OD \perp O_1B$,$\therefore BD = OA = 1$.

$\therefore \quad O_1D = 2, OD = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$.

因此 $S_{梯形AOO_1B} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

而 $\cos\angle OO_1D = \frac{O_1D}{O_1O} = \frac{1}{2}$,故$\angle OO_1D = 60°$,从而得到$\angle AOO_1 = 120°$.

$\therefore\quad S_{扇形O_1BC}=\frac{1}{6}\pi\cdot 3^2=\frac{3}{2}\pi, S_{扇形OAC}=\frac{1}{3}\pi.$

$\therefore\quad S=4\sqrt{3}-(\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{3}\pi)=4\sqrt{3}-\frac{11}{6}\pi.$

注　这道例题是求由几条曲线(或直线)所围成的图形的面积.这类图形通常是由几个特殊几何图形组合而成,因此,计算这类图形面积的问题,可化为计算几个特殊图形面积的代数和的问题.

例 8　在边长为 1cm 的正五边形内,去掉所有与正五边形各顶点距离都小于 1cm 的点,求余下部分的面积.

解　如图 1-8,以 A 为圆心,1cm 长为半径的扇形 ABE 内的点到点 A 的距离都小于 1cm.分别以正五边形的各顶点为圆心,1cm 长为半径作弧,以五段圆弧为边界的"曲边五边形"$MNPQR$ 内的点到正五边形 $ABCDE$ 各顶点的距离都小于 1cm.所以除去这个"曲边五边形",正五边形内余下的部分是五个等积的"曲边三角形"BMC, CND, DPE, EQA, ARB.

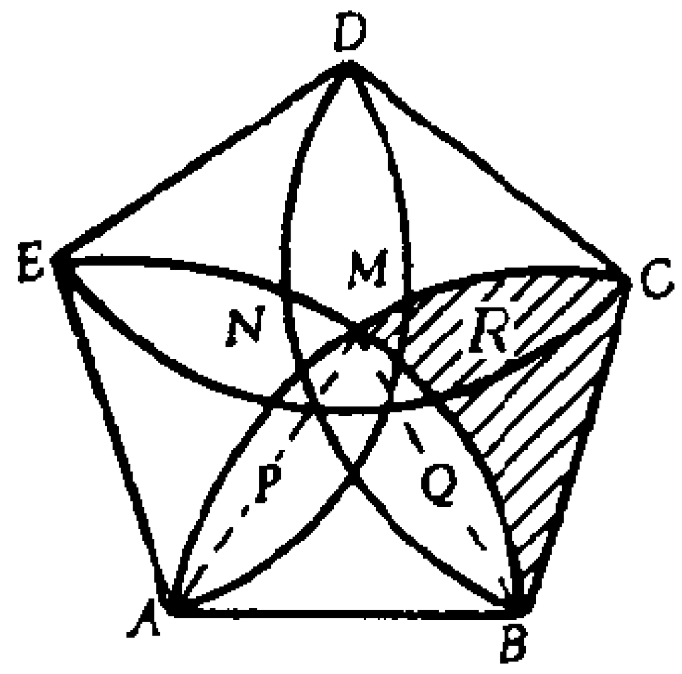

图 1-8

"曲边三角形"BMC 与以$\angle BAM$ 为圆心角的扇形 BAM 的面积之和恰等于等边三角形 ABM 与以$\angle CBM$ 为圆心角的扇形 CBM 的面积之和,所以,所要求的面积为:

$$5S_{曲边\triangle BMC}=5(S_{\triangle ABM}+S_{扇CBM}-S_{扇BAM})=5(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{2\pi}{15}-\frac{\pi}{6})$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}(\text{cm}^2).$$

例 9　已知锐角$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R,点 D, E, F 分别在边 BC, CA, AB 上.求证:AD, BE, CF 是$\triangle ABC$ 的三条高的充要条件是

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}R(EF+FD+DE).$$

证　1. 必要性

如图 1-9,因为$\triangle ABC$ 为锐角三角形,故点 O 在$\triangle ABC$ 内,故　$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle EAF}+S_{\triangle FBD}+S_{\triangle DCE}$.

过点 A 作$\odot O$ 的切线 PQ,则 $OA\perp PQ$, $\angle PAB=\angle ACB$.

又 BE、CF 为高,故 B、C、E、F 四点共圆,

$\therefore\quad \angle ACB=\angle AFE,$

$\therefore\quad \angle PAB=\angle AFE, PQ /\!/ EF, OA\perp EF,$

$\therefore\quad S_{四边形OEAF}=\frac{1}{2}OA\cdot EF.$

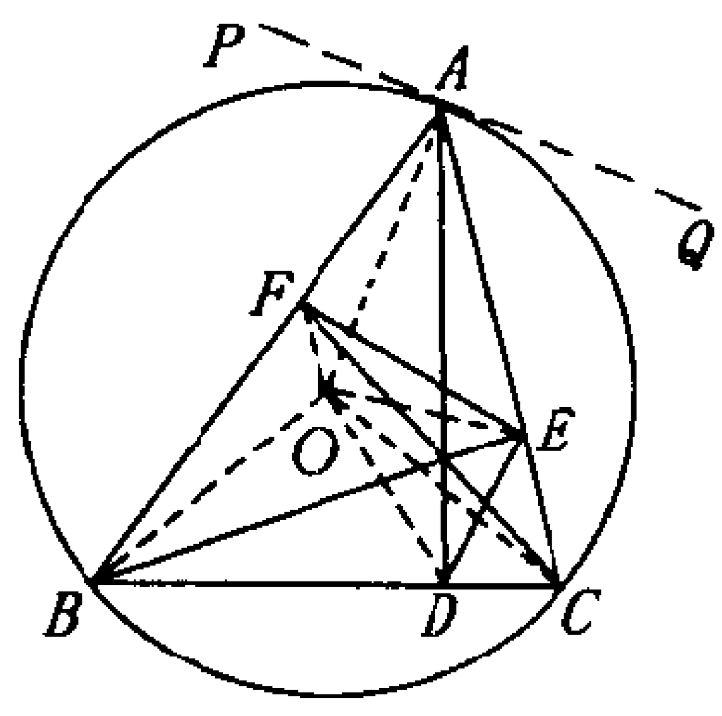

图 1-9

同理,$S_{四边形OFBD}=\frac{1}{2}OB\cdot FD$, $S_{四边形ODCE}=\frac{1}{2}OC\cdot DE$,

$\therefore \quad S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(OA\cdot EF+OB\cdot FD+OC\cdot DE)=\frac{1}{2}R(EF+FD+DE).$

2. 充分性

用反证法,若 OA 与 EF 不垂直,则 $S_{四边形OEAF}<\frac{1}{2}OA\cdot EF$.

又 $S_{四边形OFBD}\leqslant\frac{1}{2}OB\cdot FD$, $S_{四边形ODCE}\leqslant\frac{1}{2}OC\cdot DE$,

故 $S_{\triangle ABC}<\frac{R}{2}(EF+FD+DE)$.

与已知条件矛盾.故 $OA\perp EF$.

同理,$OB\perp FD$, $OC\perp DE$.

过点 A 作$\odot O$ 的切线 PQ,则 $OA\perp PQ$.因 $OA\perp EF$,故 $PQ/\!/EF$,故 $\angle AFE=\angle PAF=\angle ACB$.

故 B、C、E、F 四点共圆,$\angle AEB=\angle AFC$.

同理,A、B、D、E 四点共圆,$\angle ADB=\angle AEB$.

同理,A、C、D、F 四点共圆,$\angle ADC=\angle AFC$.

$\therefore \quad \angle AEB+\angle AFC=\angle ADB+\angle ADC=180°$,

$\therefore \quad \angle AEB=\angle AFC=90°$, $\angle ADC=\angle AFC=90°$.

即 $AD\perp BC$, $BE\perp CA$, $CF\perp AB$.这说明 AD, BE, CF 为$\triangle ABC$ 的三条高.

Ⅱ.面积方法问题

例 10 如图 1-10,AB 是$\odot O$ 的弦.在圆外延长弦 AB 至 P、Q.过 P、Q 分别在 AB 的异侧作$\odot O$ 的切线 PC、PD,C、D 为切点.求证:CD 平分 AB 的充要条件是 $PA=QB$.

证 连 AC、AD、BD、BC.欲证 CD 平分 AB,等价于证 $S_{\triangle ACD}=S_{\triangle BCD}$,注意到$\angle DAC+\angle DBC=180°$,

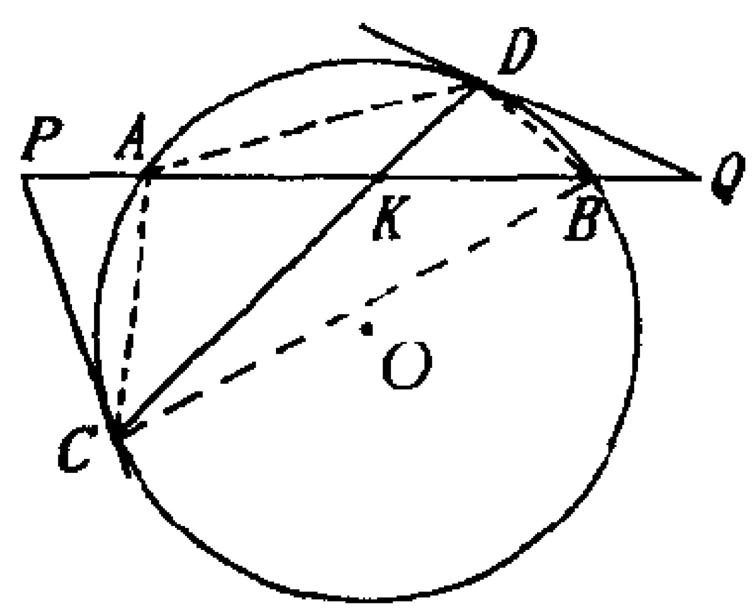

图 1-10

故 $S_{\triangle ACD}=S_{\triangle BCD}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin\angle DAC=\frac{1}{2}BD\cdot BC\cdot\sin(180°-\angle DAC)$

$\Leftrightarrow AC\cdot AD=BD\cdot BC$

$\Leftrightarrow\frac{AC}{BC}=\frac{BD}{AD}$. ①

又$\because DQ$ 是$\odot O$ 的切线,

$\therefore \quad \angle BDQ=\angle DAB$,又$\angle Q$ 公共,

$\therefore \quad \triangle DBQ\backsim\triangle ABQ$,

$\therefore \quad \frac{BD}{AD}=\frac{BQ}{DQ}$. ②

同理可证:$\frac{AC}{BC}=\frac{PA}{PC}$. ③

将②、③代入①,得①等价于

$$\frac{BQ}{DQ}=\frac{PA}{PC} \quad ④$$

$$\Leftrightarrow\frac{BQ^2}{DQ^2}=\frac{PA^2}{PC^2}\Leftrightarrow\frac{BQ^2}{BQ\cdot QA}=\frac{PA^2}{PA\cdot PB}(\text{切割线定理})\Leftrightarrow\frac{BQ}{QA}=\frac{PA}{PB}$$

$$\Leftrightarrow\frac{BQ}{QA-BQ}=\frac{PA}{PB-PA}\Leftrightarrow\frac{BQ}{AB}=\frac{PA}{AB}\Leftrightarrow BQ=PA.$$

例 11 如图 1－11, P 为正方形 $ABCD$ 的外接圆的 $\overset{\frown}{CD}$ 上任一点,求证:

$PA\cdot PB=PB\cdot PC+PC\cdot PD+PD\cdot PA$.

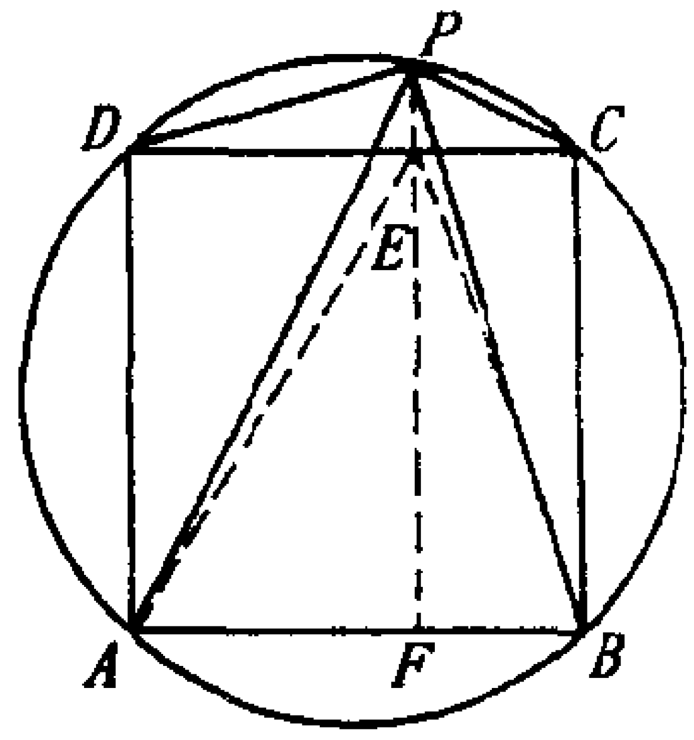

图 1－11

证 作 $PF\perp AB$ 于 F,交 CD 于 E,连结 EA, EB,则 $PF/\!/BC$, $PF/\!/AD$. $S_{\triangle PAE}=S_{\triangle PDE}$, $S_{\triangle PBE}=S_{\triangle PCE}$.

又　$S_{\triangle EBF}=S_{\triangle EBC}=S_{\triangle BCP}$, $S_{\triangle EAF}=S_{\triangle EAD}=S_{\triangle ADP}$,

$$\begin{aligned}\therefore\quad S_{\triangle PAB}&=S_{\triangle PBE}+S_{\triangle EBF}+S_{\triangle EAF}+S_{\triangle PAE}\\&=S_{\triangle PCE}+S_{\triangle EBC}+S_{\triangle EAD}+S_{\triangle PDE}\\&=S_{\triangle BCP}+S_{\triangle ADP}+S_{\triangle PCD}.\end{aligned} \quad ①$$

又 $\angle DPA=\angle CPB=\angle APB=45^\circ$,

$$\therefore\quad S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}PA\cdot PB\sin45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{4}PA\cdot PB, \quad ②$$

同理, $S_{\triangle BCP}=\frac{\sqrt{2}}{4}PB\cdot PC$, $S_{\triangle ADP}=\frac{\sqrt{2}}{4}PA\cdot PD$,　③

$$S_{\triangle PCD}=\frac{\sqrt{2}}{4}PC\cdot PD. \quad ④$$

将②,③,④代入①式立即得证.

例 12 已知在凸四边形 $ABCD$ 中,直线 CD 与以 AB 为直径的圆相切,求证:当且仅当 $BC/\!/AD$ 时,直线 AB 与以 CD 为直径的圆也相切.

证 如图 1－12,设 E, F 分别为 AB, CD 的中点, E 到 CD 的距离为 d_1, F 到 AB 的距离为 d_2,依题意有

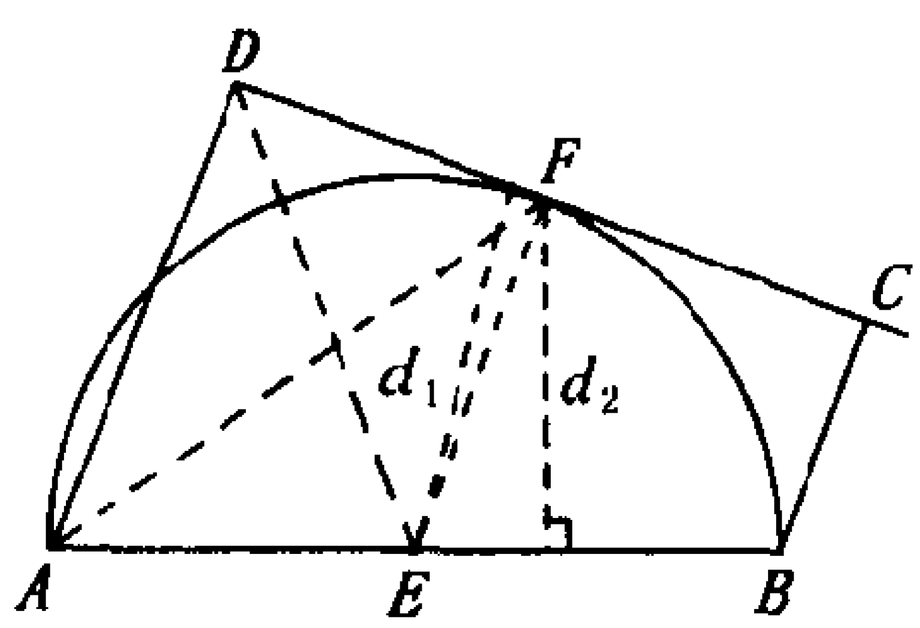

图 1－12

$$d_1=\frac{1}{2}AB.$$

1. 充分性

当 $BC/\!/AD$ 时, EF 为梯形 $ABCD$ 的中位线,有 $EF/\!/AD$. 于是有　$S_{\triangle AEF}=S_{\triangle DEF}$.

即　$S_{\triangle FAE}=S_{\triangle EDF}$.

$$\therefore\quad\frac{1}{2}AE\cdot d_2=\frac{1}{2}DF\cdot d_1,$$