

运筹学

原理与方法

郭耀煌等 编著



西南交通大学出版社

运筹学原理与方法

郭耀煌 等编著

西南交通大学出版社

(川) 新登字 018 号

内 容 简 介

本书系统介绍了运筹学的原理与方法, 主要内容包括: 线性规划、运输问题、整数规划、动态规划、图与网络方法、网络计划技术、矩阵对策、决策分析、排队论、非线性规划、目标规划、多目标规划、启发式方法。

本书既注意论证科学严谨, 又注意联系管理和工程实际, 有利于读者正确掌握运筹学的基本理论和方法。

本书可作为管理类专业大学生和研究生的教材, 也可供管理人员、工程技术人员和其它专业的研究生、大学生学习参考。

运筹学原理与方法

郭耀煌等 编著

*

西南交通大学出版社出版发行

(成都 九里堤)

新华书店经销

郫县犀浦印刷厂印刷

*

开本: 787×1092 1/16 印张: 23.125

字数: 531 千字 印数: 1501—5000 册

1994 年 9 月第 1 版 1995 年 5 月第 2 次印刷

ISBN 7—81022—718—1/O · 063

定价: 16.50 元

前 言

运筹学是第二次世界大战后发展起来的一门新兴学科，是进行科学管理的有力工具。它不仅是经济、管理类专业的一门主要课程，也为越来越多的其它专业的本科高年级学生和研究生所需要。

作者长期从事运筹学教学（包括大学本科生、研究生）和科研工作，使用过多种版本的运筹学教材（包括作者自己过去编著的教材和讲义），在编著本书时，一方面注意到吸收其它教材的优点，另一方面也考虑到学科发展和从事科研工作的需要。

为便于读者学习和适应教师教学的需要，作者在编著该书时特别注意以下各点：（1）加强基本概念、基本理论和主要方法的阐述，帮助读者掌握运筹学的理论实质和基本方法。（2）在引入新概念和新理论时，先说明直观背景，再进行抽象，以便于理解。（3）力求论证科学严谨，对重要结论进行理论证明或详细的科学分析。（4）既反映学科的最新发展，又注意理论联系实际，使广大读者能学以致用。（5）叙述层次分明，深入浅出，便于学习。

本书由郭耀煌主编，各章的执笔人如下：绪论、第一章、第二章：郭耀煌；第三章：王亚平；第四章：徐飞；第五章、第六章：童淑惠；第七章：胡培；第八章：赵冬梅、胡建伟；第九章：童淑惠、宋吉荣；第十章：朱茂礼；第十一章：郭耀煌、张炜；第十二章：李军；第十三章：郭耀煌、徐飞；第十四章：郭耀煌。全书由郭耀煌统编、修改、定稿。

本书前十章可作为管理类专业本科生的教材，后四章可作为研究生教材。本书也可供其它专业的高年级本科生和研究生作为教材或教学参考书，还可供管理工作、工程技术人员、科研人员参考。

DAA2664

目 录

前 言

绪 论	1
§ 1 运筹学简史	1
§ 2 运筹学的主要内容	2
§ 3 运筹学的主要特点	2
第一章 线性规划	4
§ 1 线性规划问题及其数学模型	4
§ 2 线性规划问题的解	7
§ 3 线性规划的单纯形法	17
§ 4 单纯形表	28
§ 5 单纯形法应用中的几个问题	32
§ 6 线性规划建模举例	37
习 题	42
第二章 线性规划的对偶理论与灵敏度分析	45
§ 1 改进单纯形法	45
§ 2 线性规划的对偶理论	52
§ 3 灵敏度分析	63
习 题	74
第三章 运输问题	78
§ 1 运输问题的数学模型	78
§ 2 表上作业法	80
§ 3 产销不平衡运输问题	89
§ 4 有转运的运输问题	91
§ 5 应用举例	94
习 题	97
第四章 整数规划	99
§ 1 整数规划问题的解法概述	99
§ 2 分枝定界法	101
§ 3 割平面法	104
§ 4 0-1 规划	110
§ 5 分派问题	114
习 题	120
第五章 动态规划	122
§ 1 动态规划的基本原理	122

§ 2 动态规划的应用举例	131
习 题	143
第六章 图与网络方法	146
§ 1 图的概念	146
§ 2 欧拉图和哈密尔顿回路	151
§ 3 树	154
§ 4 最短路问题	156
§ 5 网络最大流	161
§ 6 最小费用流	166
§ 7 应用举例	170
习 题	172
第七章 网络计划技术	176
§ 1 网络图的绘制	176
§ 2 计算时间参数和确定关键线路	179
§ 3 计划评审技术	183
习 题	186
第八章 矩阵对策	187
§ 1 引 言	187
§ 2 最优纯策略	189
§ 3 混合策略	193
§ 4 矩阵对策的求解	198
§ 5 将矩阵对策转换为线性规划	202
习 题	206
第九章 决策分析	208
§ 1 基本概念	208
§ 2 非确定型决策	210
§ 3 风险型决策	213
§ 4 效用理论	223
习 题	228
第十章 排队论	231
§ 1 普阿松过程	231
§ 2 生灭过程	236
§ 3 一般排队系统结构	239
§ 4 $(M/M/1); (\infty/\infty/FCFS)$ 排队模型	241
§ 5 $(M/M/C); (\infty/\infty/FCFS)$ 排队模型	244
§ 6 $(M/M/1); (N/\infty/FCFS)$ 排队模型	247
§ 7 $(M/M/c); (N/\infty/FCFS)$ 排队模型	250
§ 8 $(M/M/1); (N/N/FCFS)$ 排队模型	251
§ 9 $(M/M/c); (N/N/FCFS)$ 排队模型	253
§ 10 $(M/G/1); (\infty/\infty/FCFS)$ 排队模型	254
§ 11 $(M/E_k/1); (\infty/\infty/FCFS)$ 排队模型	255
习 题	256

第十一章 非线性规划	259
§ 1 基本概念	259
§ 2 一维搜索	269
§ 3 无约束极值问题	274
§ 4 约束极值问题	282
习 题	299
第十二章 目标规划	302
§ 1 引 言	302
§ 2 目标规划的图解法	308
§ 3 目标规划的单纯形法	311
§ 4 灵敏度分析	315
习 题	321
第十三章 多目标规划	325
§ 1 解 集	325
§ 2 像 集	331
§ 3 解决多目标规划问题的方法	335
§ 4 交互型方法	345
习 题	348
第十四章 启发式方法	350
§ 1 基本概念	350
§ 2 应用及例子	352
主要参考文献	361

绪 论

§1 运筹学简史

运筹学的朴素基本思想的起源，可以追溯到很久以前，但形成一门科学，一般认为开始于第二次世界大战，诞生于英国。

那时，英国陆军遭到很大挫折，又受到德国空军和海军的封锁，形势十分危机，如何转变战争局势，成为当时急待解决的严重问题。在 20 世纪 30 年代末期虽然已研制成功了雷达和新式作战飞机等武器，但由于没有实际使用经验，在当时资源十分缺乏的情况下，难于正确评估和迅速提高这些武器的使用效率。为了动员各方面的力量，首先是发挥科学家的聪明才智，英国国防部在 1940 年成立了一个专门小组 Operational Research Group (简称 O. R. 小组) 进行作战研究，该小组包括四位物理学家、二位数学家、三位生理学家、一位测量员和一位军官，由著名物理学家布赖克特 (P. M. S. Blackett) 领导。这个小组研究了一些与作战和武器运用有关的问题，取得了显著效果。

反潜艇战是当时着重研究的一个问题。潜艇可怕的主要原因是它潜入水中，使对方不易觉察，因而反潜艇应首先注意搜索，著名数学家库普曼 (B. O. Koopmans) 起了很大作用，这一研究后来发展成为搜索论。搜索到潜艇的目的是为了打沉它，原来用飞机投普通炸弹，破坏力不大，后改用深水炸弹，在水下爆炸，问题在于在水下多深处爆炸为好？著名物理学家肖克莱 (Shockley) 经科学的定量分析，发现在 25 英尺深处爆炸能使袭击成功的机会增加三倍。这样一来就作出了以下决策：在潜艇刚开始下沉时投弹攻击，起爆点为水面下 25 英尺。由于采用这种方法使德国潜艇被摧毁的数目增加到四倍。

飞机侦察潜艇的活动，潜艇就设法避开侦察。一方采用某种措施，对方就设法找出反措施，即制定对策。战争中的双方和其它很多敌对行动都属于这种对策范畴，二次世界大战中提出了很多这类问题，使对策论（也称博弈论）得到了发展。

商船编队和舰队护航也是当时研究的问题之一。经过分析，确定了每批商船的适宜数目，提出了在受到敌机攻击时大船急转向和小船缓转向的逃避方针，使船只的中弹数由 47% 减少到 29%。

由于英国 O. R. 小组工作的成功，其它有些国家也成立了类似小组，美国叫 Operations Research Group。他们在战时使用的方法虽然比较粗浅，但是收效很大。

二次世界大战之后，O. R. 小组中的很多人回到了原先工作的科研和教学岗位。这时，时间和精力允许他们将战时提出的方法进一步科学化、条理化，以用于经济和社会发展的非军事目的。在战后恢复时期，生产规模空前扩大，科学技术获得迅速发展，新型设备层出不穷，从而使社会需求的多样性日益增强，生产和服务的专业分工越来越细。另一方面，随着原来落后地区的开发，人力、设备和其它资源在空间上的散布更加广泛，使经济、社会的纵横联

系日趋复杂,生产和服务的社会性空前增加,行业竞争日渐加剧,科学决策的重要性显得十分突出。这一切表明,很多方面都迫切要求用科学的方法进行管理,以适应不断变化的内部和外部形势。很多有识之士发现,O.R.是解决这类问题的有效工具。这种形势大大促进了这门学科的建立和发展。

著名学者钱学森、许国志教授于50年代中期将O.R.引入我国,接着吸引了以华罗庚教授为首的一大批数学家,大大促进了这一学科在我国的发展。O.R.的中译名运筹学出自刘邦“运筹于帷幄之中,决胜于千里之外”这句话,这很好反映了O.R.所具有的作好运用、决策、规划的含意。

五十年代已明确提出了一些运筹学分支,例如线性规划、对策论、排队论等。线性规划可用于处理资源有效利用、生产计划等问题,对策论研究竞争和敌对现象,排队论来自于对工程、管理和社会中拥挤现象的分析。它们虽然由对不同问题的研究产生,处理的方法又截然不同,但都是运用科学和定量的方法以提供尽量好的决策。

在1946年之前,运筹学主要用于军事;到60年代上半期,主要用于企业管理,并在理论上趋于成熟;此后,随着计算机的发展,处理的系统由小变大,应用范围不断扩大,在理论上也获得了很大发展,形成了运筹学的完整学科体系。

§ 2 运筹学的主要内容

什么是运筹学?至今没有公认的确切的定义,原因是从事运筹学研究的人来自不同的学科,大家的看法不完全一致。英国运筹学会认为:“运筹学是运用科学方法来解决工业、商业、政府、国防等部门里有关人力、机器、物资、金钱等大型系统的指挥或管理中出现的复杂问题的一门科学”。莫斯(P. M. Morse)和金博尔(G. E. Kimball)的定义是:“为决策机构在对其控制下业务活动进行决策时,提供以数量化为基础的科学方法”。还有人认为:“运筹学是一门应用科学,它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法,解决实际中提出的专门问题,为决策者选择最优决策提供定量依据”。

运筹学包含的内容很多,一般认为它有以下主要分支(详见以后各章):线性规划、整数规划、非线性规划、动态规划、图与网络分析、网络计划(统筹法)、对策论、决策论、存贮论、排队论(随机服务系统)、多目标规划、启发式方法等。根据实际问题的不同性质,可选用不同分支给出的方法加以解决。

用运筹学的方法解决问题时,常需首先建立数学模型。数学模型是对系统行为的一种定量描述和本质抽象,它包含常数、参数、变量和函数关系,由目标和限制条件构成,目标一般是要求某个或某些评价函数最佳(极大或极小)或满意,限制条件根据问题的性质和决策者的意愿确定,常称为约束(条件)。若模型不含随机因素,称它为确定性模型,否则称为随机模型。当变量只取离散值时,称它为离散模型,否则称为连续模型。如果按用途来划分,有运输模型、分配模型、设备更新模型、排队模型、存贮模型等。按研究对象分,则有宏观经济模型、教育模型、能源模型、社会模型、人口模型、生态环境模型、管理模型等。

§ 3 运筹学的主要特点

用运筹学解决问题时应注意其下述特点。

1. 强调科学性和定量分析。用运筹学解决实际问题时应进行科学的定量和定性分析，强调以定量分析为基础的可靠性和科学性，避免“想当然”，尽量导出最好的结果，即达到通常所说的最优性。在实用中有时“最优”过于理想化，难于达到，这时也可用“次优”或“满意”取代。

2. 把所要解决的问题看成一个系统，不是孤立地去认识它；要考虑到有关的各种主要因素和条件，从相互联系中尽量全面地去考察问题，强调总效果，而不是某个方面的局部“最优”。

3. 运用多学科知识解决问题。用运筹学方法解决实际问题时，除了要熟悉与研究对象有关的科学知识之外，还要运用适宜的数学方法和计算机技术，有时可能还需要与经济学、社会学、其它技术科学的知识相交叉，才能建立起适宜的模型，使问题得以很好解决。为了在组织上得到保证，常建立包括有关多学科成员在内的组织机构，以利实施。

4. 遵循一定的科学步骤。解决实际问题时常按以下步骤进行：

(1) 明确问题 通过调查和分析，将所要解决的问题弄清楚，包括：问题所在、要求目标、限制条件、假设前提、可能的各种决策方案等，在此基础上把问题明确地表达出来。

(2) 建立模型 模型是客观事物的一种映象，它既要反映实际，又要进行抽象而“高”于实际。建模（构模）是一种创造性活动，是至关重要的一步工作。本书阐述了一些基本模型，可供建模时使用和参考。但很多实际系统往往复杂得多，难于套用现成的模型，建模时必须进行认真的分析。建模工作包括拟定变量和参数，建立目标函数和正确写出约束条件。

(3) 模型求解 根据模型的性质和结构选用适宜的方法求解（参见以后各章），如没有合适的现成方法，也可用随机模拟或构造启发式算法等手段寻求问题的“近似解”，解的精度由决策者确定。

(4) 解的检验 检查求解过程有无错误，结果是否与现实一致。如出现问题，还要分析问题所在，必要时修改模型或（和）解法。

(5) 解的实施 对实际问题来说，求出的解往往就是某种决策方案，要考虑具体实施中可能遇到的问题，以及实施中需要的修改。

上述过程有时需反复进行。

第一章 线性规划

在工业、农业、国防、建筑、交通运输、科研、商业等各种活动中，常常要求对资源进行统一分配、全面规划和合理调度，以便从各种可能安排方案中找出最优的计划或设计，用以指导生产。在这类问题中，一方面有期望达到最优要求的目标（例如希望产值最高或消耗最少），另一方面又要受到一定条件的限制（例如人力、物力、财力的限制），如何安排才能使成效最高：消耗既定资源取得的收益最大，或达到既定收益所消耗的资源最少，这可以借助于线性规划（Linear Programming）来解决。

早在本世纪 30 年代，苏联学者康托洛维奇（Конторович）等人在研究生产组织和运输问题中，就曾提出过解某些线性规划问题的方法；1947 年，美国数学家丹齐格（Dantzig）提出了求解线性规划问题的一般解法——单纯形法（Simplex Method），它可用于求解各种线性规划问题，从而为线性规划这门学科奠定了基础。单纯形法的出现，使求解大规模决策问题成为可能，它给许多部门带来了巨大经济利益，因而受到世界各国各部门的普遍重视和欢迎，目前，大多数计算中心都有线性规划的商用计算机程序可供使用。像电子计算机那样，单纯形法的出现被认为是 20 世纪的一件大事。线性规划不仅可用于解决很多实际问题，而且也是理解运筹学其它许多分支的基础，因而，学好线性规划是十分重要的。

§ 1 线性规划问题及其数学模型

下面先通过例子说明什么是线性规划问题，如何用数学语言来描述它，再进一步说明线性规划数学模型的结构。

一、线性规划问题

例 1 生产决策问题

某厂生产甲乙两种产品，已知制成一吨产品甲需用资源 A 3 吨，资源 B 4 m^3 ；制成一吨产品乙需用资源 A 2 吨，资源 B 6 m^3 ，资源 C 7 个单位。若一吨产品甲和乙的经济价值分别为 7 万元和 5 万元，三种资源的限制量分别为 90 吨、200 m^3 和 210 个单位，试决定应生产这两种产品各多少吨才能使创造的总经济价值最高？

本问题的目的，是决定满足资源限制条件下创造经济价值最高的生产方案（即生产产品甲和乙的数量），为此，可按如下步骤进行。

(1) 假定自变量

x_1 ：生产产品甲的数量（吨）

x_2 ：生产产品乙的数量（吨）

上述变量为由决策者决定的未知量，称为决策变量。

(2) 分析并表达限制条件

对各个限制条件逐一加以分析, 写出反映其限制关系的表达式 (等式或不等式), 从而得到约束条件。在本例中

资源 A 限制: $3x_1 + 2x_2 \leq 90$

资源 B 限制: $4x_1 + 6x_2 \leq 200$

资源 C 限制: $7x_2 \leq 210$

此外, 产量 x_1 和 x_2 不能为负, 只能取正值 (生产) 或零 (不生产), 从而还有

非负条件: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

(3) 分析目标

以 z 表示生产甲和乙两种产品各为 x_1 和 x_2 (吨) 时产生的经济价值, 则有

$$z = 7x_1 + 5x_2$$

这就是该问题的目标函数。

经上述分析, 可将该问题表示为

$$\begin{cases} \max z = 7x_1 + 5x_2 & (1.1.1) \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 90 & (1.1.2) \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 200 & (1.1.3) \\ 7x_2 \leq 210 & (1.1.4) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & (1.1.5) \end{cases}$$

这种数学表达方式, 称为该问题的一种数学模型。

例 2 投资问题

某单位有一批资金用于四个工程项目的投资, 用于各工程项目时所得之净收益 (投入资金的百分比) 如下表所示:

工 程 项 目	A	B	C	D
收 益 (%)	15	10	8	12

由于某种原因, 决定用于项目 A 的投资不大于其它各项投资之和; 而用于项目 B 和 C 的投资不小于项目 D 的投资。试确定使该单位收益最大的投资分配方案。

设用 x_1 、 x_2 、 x_3 和 x_4 分别代表用于项目 A、B、C 和 D 的投资百分数, 由于用于各种项目的投资百分数之和必须等于 100%, 故

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

考虑到其它限制条件及该问题的目标, 可将该问题的数学模型表示如下:

$$\begin{cases} \max z = 0.15x_1 + 0.1x_2 + 0.08x_3 + 0.12x_4 & (1.2.1) \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \leq 0 & (1.2.2) \\ x_2 + x_3 - x_4 \geq 0 & (1.2.3) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 & (1.2.4) \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 4 & (1.2.5) \end{cases}$$

例3 营养问题

某动物饲养场利用 n 种天然饲料来配制混合饲料使用，已知单位第 j 种天然饲料的价格为 c_j ，它含有第 i 种营养成分的量为 a_{ij} ；根据动物生长的需要，要求具有 m 种营养成分，且第 i 种营养成分的含量不得低于 b_i 。试确定在保证动物营养需要的条件下费用最低的饲料配合法。

设 x_j 为第 j 种天然饲料的使用量, 则 $a_{ij}x_j$ 为第 j 种天然饲料含有第 i 种营养成分的数量, 根据题目要求, 应有

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i=1, 2, \dots, m$$

考虑到非负约束和目标要求,得该问题的数学模型如下

$$\begin{cases} \min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j & (1.3.1) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, & i = 1, 2, \dots, m & (1.3.2) \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, n & (1.3.3) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (1.3.2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.3.3)$$

其中, 式(1.3.2)代表 m 个约束条件, 它们分别对应于对各种不同营养成分数量的要求。

类似的例子可以举出很多。

由上述例子可以看出, 尽管它们谈的是截然不同的事情, 但却都属于同一类优化问题。从数学上说, 它们具有以下共同特征:

1. 用未知自变量表示某种重要的可变因素，变量的一组数据代表一种解决方案，通常要求这些变量取非负值。
2. 存在一定的限制条件（例如材料、人力、设备、时间、费用等的限制），它们可以用自变量的线性方程（等式）或线性不等式来表示。这些条件称为约束条件。
3. 都有一个要达到的目标，它也是自变量的线性函数，称为目标函数。根据需要，要求目标函数极大化或极小化。

由于目标函数和约束条件都是自变量的线性函数，故称这种规划问题为线性规划问题。

二、线性规划的数学模型

线性规划的数学模型可一般表示为

[illegible]

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq (= , \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq (= , \geq) b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq (= , \geq) b_m \end{array} \right\} \quad (1.4.2)$$
$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \quad (1.4.3)$$

其中, (1.4.1)为目标函数, (1.4.2)和(1.4.3)为约束条件, (1.4.3)为非负条件。

上述数学模型，也可借助于求和符号 Σ 写成如下的“压缩”形式：

$$\begin{cases} \max(\min) z = \sum_{j=1}^n c_j x_j & (1.5.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (=, \geq) b_i, \quad i=1, 2, \dots, m & (1.5.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_j \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n & (1.5.3) \end{cases}$$

若引用下述记号：

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$$

则可将线性规划的数学模型写成矩阵形式如下

$$\begin{cases} \max(\min) z = CX & (1.6.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} AX \leq (=, \geq) b & (1.6.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X \geq 0 & (1.6.3) \end{cases}$$

其中，0为n维零向量。

在上述各式中， c_j ($j=1, 2, \dots, n$) 称为价值系数， a_{ij} ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$) 为约束条件的系数， b_i ($i=1, 2, \dots, m$) 为约束条件的右侧常数， x_j ($j=1, 2, \dots, n$) 为未知数（变量）， C 为价值系数（行）向量， b 为限定向量， X 为未知数向量， A 为约束条件的系数矩阵， A_j ($j=1, 2, \dots, n$) 为约束条件的系数列向量。

当用线性规划的方法解决实际问题时，首先要把该问题正确地表述成线性规划的数学模型。为使建立的数学模型科学实用，必须对实际问题进行认真细致的分析，在此基础上恰当地选取自变量，并根据目标要求建立目标函数，确定要极小化或极大化，再分析限制条件，列出约束条件等式和（或）不等式。最后，还要进一步检查建立的数学模型是否和实际问题的目标与条件一致，避免遗漏和重复。

§ 2 线性规划问题的解

一、图解法

为了建立对线性规划问题解的直观概念，先看具有两个自变量的线性规划问题的图解。

例4 某厂生产A、B两种商品混凝土拌合物，按生产能力，该厂每小时可以生产A种混凝土拌合物14车，或生产B种混凝土拌合物7车。根据运输条件，每小时可运输A种混凝土拌合物7车，或运输B种混凝土拌合物12车。根据装车能力，每小时仅能装8车（装哪一种都行）。预计A种混凝土拌合物每车价值60元，B种混凝土拌合物每车价值100元，问该厂

每小时应生产每种混凝土拌合物各多少车才能使产值最高？

设每小时生产混凝土拌合物 A 和 B 各为 x_1 车和 x_2 车，则可写出如下约束。

根据工厂的生产能力，生产每车拌合物 A 需 $1/14$ 小时，生产每车拌合物 B 需 $1/7$ 小时，按一个小时考虑，应有

$$\frac{x_1}{14} + \frac{x_2}{7} \leq 1$$

进行类似的分析，对运输能力有

$$\frac{x_1}{7} + \frac{x_2}{12} \leq 1$$

对装车能力，有

$$\frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{8} \leq 1$$

或

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

该问题的数学模型为

$$\begin{cases} \max z = 60x_1 + 100x_2 & (1.7.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x_1}{14} + \frac{x_2}{7} \leq 1 & (1.7.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x_1}{7} + \frac{x_2}{12} \leq 1 & (1.7.3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 & (1.7.4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geq 0 & (1.7.5) \end{cases}$$

为用图解法求解该问题，首先建立直角坐标系 x_1Ox_2 。满足非负条件的点在第一象限内。现令约束不等式(1.7.2)取等式，即

$$\frac{x_1}{14} + \frac{x_2}{7} = 1$$

在上述坐标系中画出它的图象，得到一条直线。在这条直线左下方的点(包括这条直线上的点)，都满足不等式(1.7.2)，右上方的点则不满足这个约束条件。由此可见，满足该约束条件的点构成一个闭半平面(该直线及其左下方)。用同样的方法可以画出对应于另外两个约束条件的直线(图 1.1)。这三条直线和两个坐标轴一起组成五边形 $OABCD$ ，根据以上分析可知，在这个五边形内的所有点(包括边界上的点)，满足该问题的所有约束条件，这个范围以外的点，则不能同时满足上述各约束条件。

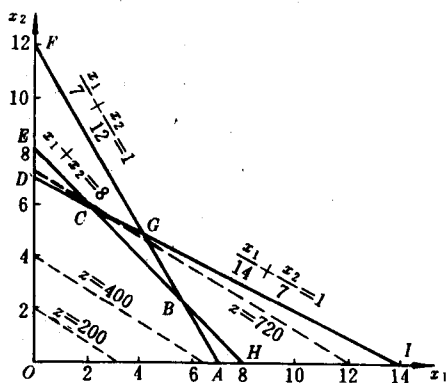


图 1.1

满足所有约束条件的点称为可行点。在本例中，五边形 $OABCD$ 中的任何一点均为可行点，其坐标值 x_1 和 x_2 满足所有约束条件。五边形 $OABCD$ 包含了例 4 的所有可行点，是可行点的集合，它是该问题的可行域。

可行域中的每一点,代表该线性规划问题的一个可行方案,即一个可行解,它满足所有约束条件的要求。一般说来,决策者感兴趣的不是所有的可行解,而是能使目标函数值达到最优值(最大值或最小值)的那种可行解,这种解称为最优可行解,简称最优解。

为了寻求最优解,我们来考察目标函数(1.7.1)。可行域中的任一点都对应线性规划问题的一个可行解,也对应目标函数的一个值。在原点, $x_1=x_2=0$ 。其目标函数值 $z=0$ 。在(2, 2)点 ($x_1=x_2=2$), $z=60x_1+100x_2=320$ 。现暂令目标函数 z 的值等于某一常数(例如说令 $z=60x_1+100x_2=400$),即可在图 1.1 中画出相应于这一 z 值的一条直线。这条直线上的所有点,都有相同的目标函数值(这时为 400),这样的直线就是目标函数的等值线。若令 $z=60x_1+100x_2=500$,就又到一条等值线,它在前一条直线($z=400$)的上方,二者彼此平行。显然,线性规划问题目标函数的等值线是一组平行直线。平移等值线至 $z=720$,这条等值线正好通过 C 点,它和可行域仅有一个公共点 C ,即这条等值线只含有一个可行点(C 点, $x_1=2$, $x_2=6$)。相应于更大 z 值的等值线不通过可行域,它已完全位于可行域之外,因此,上面的点将不代表任何一个可行解,其对应的目标函数值也将完全没有意义。由此看来,可行域的点 C 对应于最优解,其相应的目标函数值 $z=720$ 。

若该例的其它条件不变,仅将目标函数改为

$$z=50x_1+100x_2 \quad (1.8)$$

这时,新目标函数的等值线平行于可行域的一条边 CD ,处于 CD 上的各点均有相同的目标函数值(这时等于 700)。在这种情况下,该线性规划问题有无限多个最优解。多重最优解的存在,给决策者提供了选择不同最优方案的可能性,在实际问题中这是很有利的。

例 5 用图解法求解线性规划

$$\begin{cases} \max z = x_1 + x_2 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

该问题的可行域和目标函数等值线如图 1.2 所示。由图可知,该线性规划的可行域可沿 x_1 轴无限延伸,其可行解集无界,目标函数值无界(在可行解集中可取任意大的值)。也就是说,该线性规划问题有可行解,但无有限最优解(无最优解)。

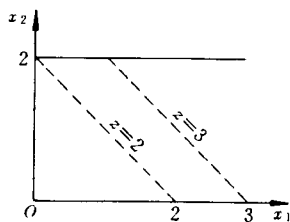


图 1.2

例 6 用图解法求解线性规划

$$\begin{cases} \max z = 3x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

在坐标系 x_1Ox_2 中画出约束条件的图象,知满足第一个约束条件的点均不满足第二个约束条件,反之亦然。也就是说,该线性规划的可行域是空的,没有一个解可同时满足所有约束条件,可行解集为空集,不存在任一可行解。当然,该线性规划问题无解。

线性规划图解法的步骤如下:(1)建立坐标系,确定比例尺;(2)画出各约束条件的边界线,定出可行域;(3)画出目标函数的一根等值线,平移等值线求出最优解;(4)算出最优目标函数值。

上述三个例子的图解告诉我们:(1)线性规划问题的解可能有下列几种情形:有唯一最

优解，有多重最优解，目标函数无界（有可行解，但无有限最优解），无解（无可行解）；(2) 如果线性规划问题有可行解，则其可行域非空，通常可行域为凸多面体；(3) 若线性规划问题有最优解，则一定可以在可行域的某个顶点上达到；如果在某两个顶点上均达到最优，则在这两个顶点联线上的各点也都达到最优。这些结论的理论分析，请参看后面的基本定理。

二、线性规划的标准型

上面提到,线性规划问题的目标函数可以要求极大化,也可以要求极小化;约束条件可以为“ $\leq$ ”型,也可以为“ $\geq$ ”型;还可以为等式。这种多样性给讨论问题带来不便,为便于讨论,常规定某种标准形式。设线性规划含有 n 个变量, m 个约束条件(不包括非负约束),本书规定线性规划的标准型如下:

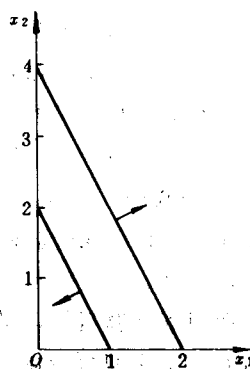


Figure 1.3 shows a large square with a side length of 1. Inside this square, there is a smaller square with a side length of $\sqrt{1/2}$. The area of the smaller square is $1/2$, which is half the area of the larger square. This illustrates the concept of a square root, where the side length of the smaller square is the square root of the ratio of its area to the area of the larger square.

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (1.9.1)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.9.2)$$

$$\begin{aligned} & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned} \quad (1.9.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (1.10)$$

或

$$\left\{ \begin{array}{l} \max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (1.10)$$

阵形式:

$$\begin{cases} \max z = CX \\ AX = b \\ X \geq 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

1. 特点是: (1) 要求目标函数极大化; (2) 约束条件取等式; (3) 变量非负。

也可写成相应的矩阵形式:

$$\begin{cases} \max z = CX \\ AX = b \\ X \geq 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

1. 特点是: (1) 要求目标函数极大化; (2) 约束条件取等式; (3) 变量非负。

数学模型可能与上述标准型不同,但都可以

这种标准型的特点是：(1)要求目标函数极大化；(2)约束条件取等式；(3)变量非负。实际线性规划问题的数学模型可能与上述标准型不同，但都可以采用以下方法将其化为标准型。

1. 若某个约束条件是“ $\leq$ ”不等式, 则可在该不等式的左端加上一个非负变量而把约束条件变成等式, 这样的变量称为松弛变量。若是“ $\geq$ ”不等式, 则在该不等式的左端减去一个非负变量, 这样的变量称为剩余变量 (也可统称为松弛变量)。

2. 当需使目标函数极小化时, 可将该目标函数乘以“ -1 ”, 变为极大化问题, 然后按极大化方法求解。这时求得的最优解和原问题的最优解相同, 但目标函数值变号 (图 1.4)。

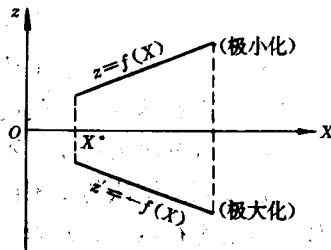


图 1.4