

电 路 分 析

下 册

李翰荪 主编

中 央 广 播 电 视 大 学 出 版 社

电 路 分 析

下 册

李翰荪 主编

中央广播电视大学出版社

电 路 分 析

下 册

李翰荪 主编

中央广播电视大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

北 京 印 刷 一 厂 印 装

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ 印张 20.5 千字 466

1985年8月第1版 1985年10月第1次印刷

印数 1—49,500

书号 15300·20 定价: 3.75 元

目 录

第三部分 正弦稳态电路

第九章 正弦激励下动态电路的稳态电压、电流 相量法	1
§ 9-1 正弦电压、电流	1
§ 9-2 正弦电压、电流的有效值	9
§ 9-3 正弦 RL 电路的完全响应 正弦稳态	10
*§ 9-4 复数的复习	13
§ 9-5 相量	19
§ 9-6 KCL、KVL 的相量形式	25
§ 9-7 R 、 L 、 C 伏安关系的相量形式	28
§ 9-8 阻抗与导纳 相量模型	32
§ 9-9 二端网络的阻抗与导纳	35
§ 9-10 串、并、混联电路的分析	40
§ 9-11 用相量图法求解串、并、混联电路	43
§ 9-12 节点、网孔分析法和网络定理在正弦稳态分析中的应用	47
本章基本要求和内容提要	51
习题九	53
第十章 正弦稳态功率	57
§ 10-1 电阻元件的平均功率	57
§ 10-2 电感、电容元件的无功功率和平均贮能	59
§ 10-3 二端网络的平均功率 功率因数	65
*§ 10-4 二端网络的无功功率	69
§ 10-5 复功率	72
§ 10-6 功率因数的提高	73
§ 10-7 正弦稳态的功率传输	76
本章基本要求和内容提要	80
习题十	81
第十一章 耦合电感和理想变压器	84
§ 11-1 耦合电感	84
§ 11-2 耦合电感中两线圈的串联和并联	90
§ 11-3 空芯变压器电路的分析	93
§ 11-4 理想变压器	99
§ 11-5 折合阻抗	103
§ 11-6 实际变压器及其模型	106

本章基本要求和内容提要	112
习题十一	113
第十二章 三相电路	117
§ 12-1 三相电源	117
§ 12-2 对称 Y-Y 联接电路的计算	120
§ 12-3 负载 Δ 形联接对称三相电路的计算	122
§ 12-4 不对称三相电路的计算	124
§ 12-5 三相电路的功率	126
本章基本要求和内容提要	127
习题十二	128
第十三章 双口网络	130
§ 13-1 双口网络及其 Z 参数方程	130
§ 13-2 其他形式的双口网络方程	137
§ 13-3 双口网络参数间的关系	143
§ 13-4 双口网络的等效电路	145
§ 13-5 正弦稳态的网络函数	148
*§ 13-6 双口网络的特性阻抗	154
*§ 13-7 双口网络的传播常数	159
*§ 13-8 匹配网络	162
本章基本要求与内容提要	165
习题十三	167
第十四章 频率响应	169
§ 14-1 频率响应的概念	169
§ 14-2 RC 电路的频率响应	174
§ 14-3 RLC 电路的频率响应 谐振	179
*§ 14-4 波特图	183
*§ 14-5 波特图(续)	197
本章基本要求与内容提要	200
习题十四	201

第四部分 正弦稳态分析方法的推广

第十五章 傅里叶分析的应用	204
§ 15-1 非正弦周期波	204
§ 15-2 傅里叶级数	207
§ 15-3 波形对称性与傅里叶系数的关系	213
§ 15-4 非正弦电路的稳态响应	220
§ 15-5 非正弦波的有效值和功率	224
§ 15-6 傅里叶级数的指数形式	227

§ 15-7 傅里叶变换	230
§ 15-8 一些重要函数的傅里叶变换	233
§ 15-9 傅里叶变换用于电路分析	235
本章基本要求与内容提要	237
习题十五	241
第十六章 拉普拉斯变换方法	245
§ 16-1 拉普拉斯变换	245
§ 16-2 拉普拉斯变换的基本性质	247
§ 16-3 应用拉普拉斯变换求解微分方程	255
§ 16-4 电路的 s 域模型	261
§ 16-5 零状态分析 网络函数	269
本章基本要求与内容提要	275
习题十六	276
部分习题答案	280
附录一 均匀输电线	286
§ 附 1-1 均匀传输线的正弦稳态响应	286
§ 附 1-2 无限长线的输入阻抗	290
§ 附 1-3 无限长线的行波	290
§ 附 1-4 有限长线	292
§ 附 1-5 无损耗线	295
练习题	298
附录二 电路分析计算机程序举例	299
§ 附 2-1 线性方程组的求解程序	299
§ 附 2-2 动态电路分析	302
§ 附 2-3 复数运算的程序	312
§ 附 2-4 N 元复数方程程序简单说明	314

第三部分 正 弦 稳 态 电 路

第九章 正弦激励下动态电路的稳态 电压、电流 相量法

在本章以前,我们所讨论的电路主要都是在直流电压、电流激励下工作的。从本章起,将研究电路在正弦电压、电流激励下工作的情形。

线性、非时变动态电路在正弦电压、电流激励下的完全响应与在直流电压、电流激励时一样,也是由固有响应和强制响应组成的。不同的是,其强制响应不再是不随时间变化的恒定量,而是与激励具有相同频率的正弦量。和直流电压、电流激励时一样,在正弦电压、电流激励下,动态电路的固有响应如果也是随着时间的增长而衰减的,则当 $t \rightarrow \infty$ 时,固有响应也将趋于零,这时,电路的完全响应可认为完全由强制响应来决定。这样的强制响应又可称为稳态响应,相应的固有响应则称为暂态响应。从时间上讲,只存在稳态响应的阶段,称为稳态阶段,暂态响应与稳态响应同时存在的阶段,则称为暂态阶段或过渡阶段。正弦激励下电路的稳态阶段简称正弦稳态。正弦稳态是很多实用电路的主要工作阶段,例如电力系统中大多数电路就是如此。因此,对于电路的这一工作阶段进行专门的讨论,是十分必要的。分析电路在正弦稳态中各支路或某些支路的电压、电流、功率、能量情况,称为正弦稳态分析。本章至第十四章就是专门讨论正弦稳态分析的。

掌握正弦稳态分析的方法不仅可以直接分析单一频率正弦电压、电流激励下线性非时变电路稳态中的工作情况,它还是分析在任意波形电压、电流激励下线性非时变电路的傅里叶分析法的基础。这是因为凡满足狄里赫里条件的任一波形都可以分解为许多不同频率,不同振幅,不同初相角的正弦波之和,而根据迭加定理,任一线性电路的响应都可以看成是激励电源的各分量单独作用时所产生的响应之和。因此,掌握了线性非时变电路的正弦稳态响应,从理论上说,我们就可掌握该电路对任何波形信号的响应。和阶跃信号、冲激信号一样,正弦信号也是考察电路的基本信号之一。

因此,不论从实际应用的角度上、还是从理论分析的角度上来看,学习正弦稳态电路的分析方法都是很重要的。

§ 9-1 正弦电压、电流

随时间按正弦规律变化的电压、电流称为正弦电压、电流。它们都属正弦波,如图 9-1(a)

所示。所谓正弦规律即简谐规律,即可用时间的 $\sin$ 函数表示,也可用时间的 $\cos$ 函数表示。本书采用 $\cos$ 函数,仍可称为正弦波。

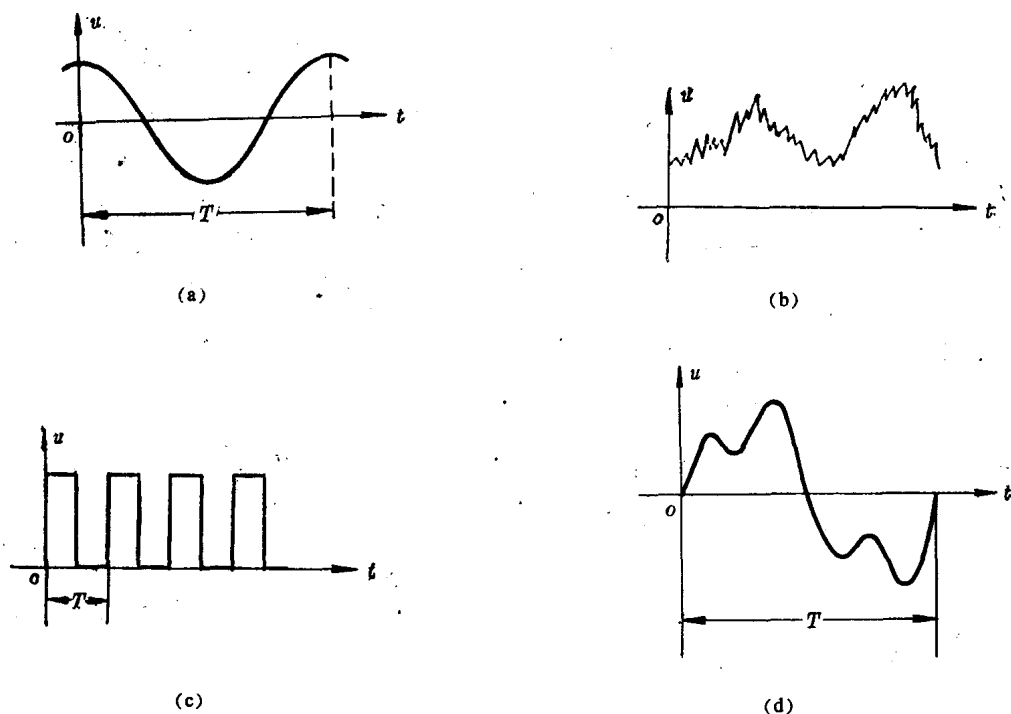


图 9-1 时变电压

正弦电压、电流是一种时变的电压、电流。随时间变化的电压、电流称为时变的电压、电流。更一般的时变电压、电流波形如图 9-1(b)所示。时变的电压、电流可用选定的参考方向下的波形图或函数式 $u(t)$ 、 $i(t)$ 来表示。时变电压、电流在某一特定时刻的值,称为它的瞬时值。根据瞬时值的正、负和选定的参考方向可以确定该时刻电压、电流的真实方向。我们今后用小写字母表示时变电压、电流的瞬时值,而用大写字母表示不随时间变化的值。

正弦电压、电流不仅是时变的,而且是一种周期性的电压、电流。如果时变电压、电流的每个值在经过每一相等的时间后重复出现,就是周期性的,称为周期电压、电流。更一般的周期电压、电流如图 9-1(c)所示。以电压为例,周期波应满足

$$u(t) = u(t + KT) \quad (9-1)$$

其中 K 为任意正整数。 T 称为周期。它是波形重复出现的最短时间间隔,单位为秒(s)。周期的倒数称为频率,用符号 f 表示。即

$$f = \frac{1}{T} \quad (9-2)$$

显然,频率表示了单位时间内周期性波形重复的次数,即单位时间内的周期数。频率的单位为赫兹,简称赫(Hz)。

正弦电压、电流不仅是周期性的,而且还是一种交变的电压、电流。如果周期性的电压、电

流不但大小,而且方向也是随时间改变的,则称为交变的电压、电流。应该指出,交变一词通常只限于指在一个周期内平均值为零,亦即指其波形在一个周期内正半周与负半周的面积相等的周期波。更一般的交变电压、电流波形如图 9-1(d)所示。

由上可知,正弦电压、电流是一种特殊的交变电压、电流,即按正弦规律变化的电压、电流。以正弦电压为例,其瞬时值可表示为

$$u(t) = U_m \cos \omega t \quad (9-3)$$

其波形如图 9-2 所示。式(9-3)中: U_m 称为正弦电压的振幅或最大值,单位为伏(V); ωt 的量纲是角度,为与机械角度相区别,可称为电角度。单位是弧度(rad), ω 称为角频率,可理解为单位时间走过的电角度。单位是弧度/秒(rad/s),显然,以 ωt 为自变量的正弦波的周期为 2π 。

那末, ω 与 f 有什么关系呢? 因为同一正弦波也可以以 t 为自变量表示,因此,一个时间周期 T 应对应于电角度 2π ,即 $2\pi = \omega T$,故

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (9-4)$$

可见, ω, f, T 三个参数告诉我们的的是同一个信息。我国电力系统提供的正弦电压频率是 50 Hz,即角频率为 100π rad/s,约为 314 rad/s。由于正弦函数的许多性质都和角度有关,所以

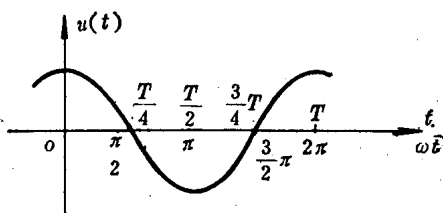


图 9-2 正弦电压

很多情况下用 ωt 作自变量更方便些。图 9-2 所示正弦波形同时标出了以 t 和以 ωt 为自变量的两种情况。

在一般情况下,正弦电压、电流在起始时刻的值不一定恰好是其最大值。如图 9-3 所示的正弦电压, $t=0$ 时的值就不是 U_m ,而 U_m 是出现在 $-\theta$ 处,此电压的瞬时值表示式应为

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta) \quad (9-5)$$

式(9-5)是正弦电压的最一般的表示式。其中 $\omega t + \theta$ 称为相位角,表示某一时刻对应的电角度, θ 称为初相角,即初始时刻的相位角。初相角为正,意味着正弦波的最大值出现在起始时刻之前,初相角为负,意味着其最大值出现在起始时刻之后。

考虑到式(9-4),则式(9-5)也可写成

$$u(t) = U_m \cos(2\pi f t + \theta) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \theta\right) \quad (9-6)$$

由上看出,一个正弦波可由三个参数所确定,即振幅(或最大值)、频率(或周期,角频率)和

初相角。这三个参数称为正弦波的三要素。直流电压、电流可以看成是频率为零,初相角为零的正弦电压、电流。

应该指出,工程上常习惯于用度 (degree) 作为初相角的单位。如果不致引起混乱,这样作也是可以的。如 $u=100 \cos(1000t-\frac{\pi}{6})$ 也可写作 $u=100 \cos(1000t-30^\circ)$, 但具体计算时,应把整个相位角的两个部分统一起来(统一成 rad 或 degree) 来计算。

比较两个直流电压、电流用它们的数值就可以了。两个正弦波怎么比较呢? 工程上遇到的正弦波常常具有相同的频率。在相同频率的情况下,两个正弦波的比较可由它们的振幅和相位角的关系来确定。图 9-4 为两个具有相同频率,不同振幅和不同初相角的正弦波。图中

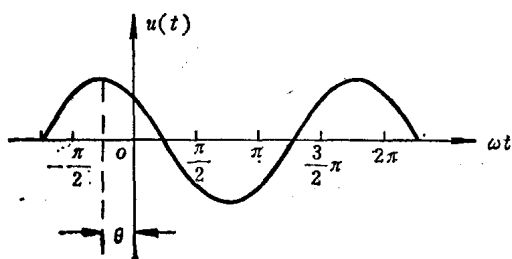


图 9-3 一般正弦电压波形

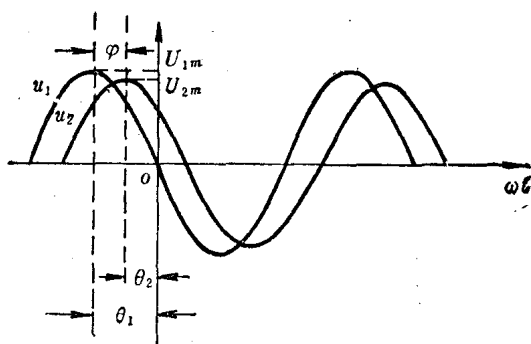


图 9-4 相径差

$$u_1 = U_{1m} \cos(\omega t + \theta_1)$$

$$u_2 = U_{2m} \cos(\omega t + \theta_2)$$

两个正弦波振幅的比较是容易的,例如用它们的比值即可。怎么比较它们的相位呢?由图 9-4 看出,它的相位角在每个时刻都是不同的,但是它们的相位角之差在每个时刻都是相同的,这是它们频率相同的必然结果。这个相位之差称为相位差,用符号 φ 表示,即

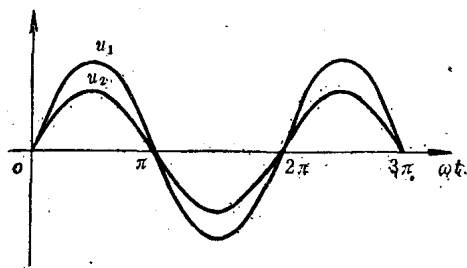
$$\varphi = (\omega t + \theta_1) - (\omega t + \theta_2) = \theta_1 - \theta_2 \quad (9-7)$$

式(9-7)表明,同频率的两正弦波的相位差等于它们的初相角之差。

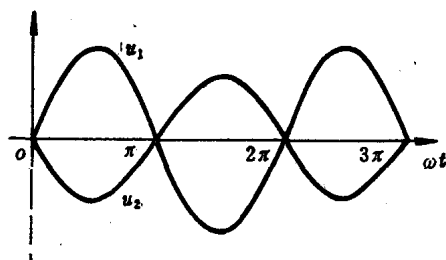
两个正弦波之间相位角之间的关系可用它们的相位差来表示。当 $\varphi = 0$ 时,称为 u_1 与 u_2 同相位,表示两正弦波的波形在步调上是一致的,即同时到达最大值,同时到达零值,同时到达最小值等。当相位差不为零时,表示两个波形步调不一致。若 $\varphi > 0$,称为 u_1 超前 u_2 一个角度 φ ,即如果把 u_1 的波形向右平移一个角度 φ ,就和 u_2 同相位了。若 $\varphi < 0$,称为 u_1 滞后 u_2 一个角度 φ ,即如果把 u_1 的波形向左平移一个角度 φ ,就和 u_2 同相位了。由于正弦波最大值是周期性出现的,所以两个正弦波在相位上的超前、滞后关系是不确定的,即,可以说 u_1 超前 u_2 角度 φ ,也可以说 u_1 滞后 u_2 角度 $2\pi - \varphi$ 。为了避免上述混乱,一般都规定相位差的绝对值必须在 0 与 π 之间,即 $|\varphi| \leq \pi$ 。应该指出,一个正弦波的初相角 θ 可以理解为该正弦波与 $A_m \cos \omega t$ 的

相位差,所以初相角也应规定其绝对值在 0 与 π 之间,即 $|\theta| \leq \pi$ 。

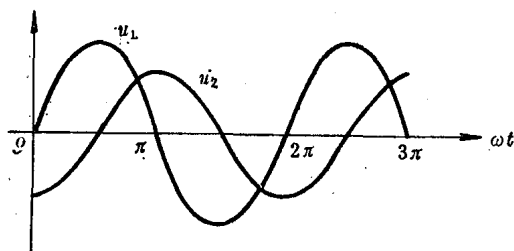
除 $\varphi = 0$ 时称两正弦波同相外,还有两个特殊的相位差角,即当 $\varphi = \pm\pi$ 时,称两正弦波反相, $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ 时,称两正弦波正交。如图 9-5 所示。



(a)同相



(b)反相



(c)正交

图 9-5 几个特殊的相位关系

例 9-1 图9-6 为某正弦电路的一部分。已知 $i(t) = 100 \cos(2\pi t - \frac{\pi}{4})$ mA, 参考方向如图所示。试绘出 $i(t)$ 的波形图,并求出 $t = 0.5$ s; 1.25 s; 0.25 s 时的电流大小和方向。

解 为了绘出波形图,首先要求出正弦波的三要素,即振幅 $I_m = 100$ mA,角频率 $\omega = 2\pi$ rad/s,初相角 $\theta = -\frac{\pi}{4}$,波形图的纵坐标为 i ,横坐标可以是 t ,也可以是 ωt ,为方便起见,我们用 ωt 。由于 $\theta = -\frac{\pi}{4}$,故此波形为 $100 \cos 2\pi t$ 的波形向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 。如图 9-7 所示。

$$i(0.5) = 100 \cos(2\pi \times 0.5 - \frac{\pi}{4}) = -70.7 \text{ mA}$$

如图中 A 点所示,负号表示此时刻电流的真实方向与参考方向相反。

$$i(1.25) = 100 \cos(2\pi \times 1.25 - \frac{\pi}{4}) = 70.7 \text{ mA}$$

如图中 B 点所示。

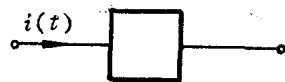


图 9-6 例 9-1

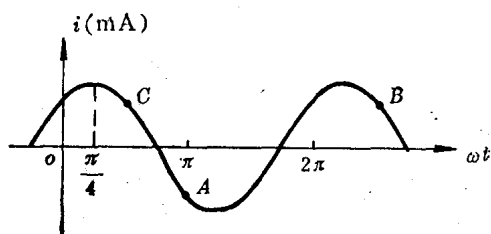


图 9-7 例 9-1 的解答

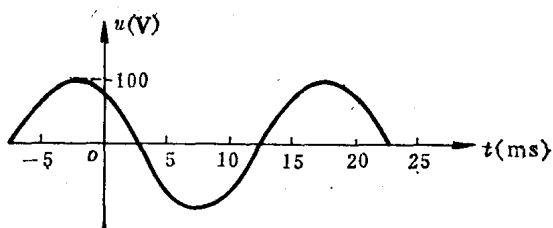


图 9-8 例 9-2

$$i(0.25) = 100 \cos \left(2\pi \times 0.25 - \frac{\pi}{4} \right) = 70.7 \text{ mA}$$

如图中 C 点所示。

例 9-2 已知某一正弦电压的波形如图 9-8 所示。试写出它的瞬时值表达式。

解 要写出 u 的表达式, 首先应从图中求出它的三要素, 即

$$U_m = 100 \text{ V}$$

$$T = 17.5 - (-2.5) = 20 \text{ ms}$$

(即可利用两个峰值之间的时间间隔)。

根据式(9-4)可得

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{20 \times 10^{-3}} = 100\pi \text{ rad/s}$$

初相角

$$|\theta| = \omega \times 2.5 \times 10^{-3} = 100\pi \times 2.5 \times 10^{-3} = \frac{\pi}{4}$$

由于波形的最大值在坐标原点的左边, 所以初相角为正。故

$$u(t) = 100 \cos \left(100\pi t + \frac{\pi}{4} \right) \text{ V}$$

例 9-3 已知两个同频率的正弦电压为

$$u_1(t) = 100 \cos \left(\omega t + \frac{1}{2}\pi \right) \text{ V}$$

$$u_2(t) = 80 \cos \left(\omega t + \frac{3}{4}\pi \right) \text{ V}$$

试求它们的振幅比和相位差。

解

振幅比

$$\frac{U_{1m}}{U_{2m}} = \frac{100}{80} = 1.25$$

相位差

$$\varphi = \theta_1 - \theta_2 = \frac{1}{2}\pi - \frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{4}\pi$$

即 $u_1(t)$ 滞后 $u_2(t)$ 角 $\frac{1}{4}\pi$ 。也可以说, $u_2(t)$ 超前 $u_1(t)$ 角 $\frac{1}{4}\pi$, 还可以说 $u_1(t)$ 超前 $u_2(t)$

角 $-\frac{1}{4}\pi$ 。

例 9-4 若使上例中的 $u_2(t) = 80 \cos\left(\omega t - \frac{3}{4}\pi\right)$, $u_1(t)$ 不变, 再求 $u_1(t)$ 与 $u_2(t)$ 的相位差。

解

$$\varphi = \theta_1 - \theta_2 = \frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{5}{4}\pi$$

据此结果, 我们可以说 $u_1(t)$ 超前 $u_2(t)$ 角 $\frac{5}{4}\pi$, 但此角已大于 π , 故我们应该说是 $u_1(t)$ 滞后 $u_2(t)$ 角 $\frac{3}{4}\pi$ 或 $u_2(t)$ 超前 $u_1(t)$ 角 $\frac{3}{4}\pi$ 。 $u_1(t)$ 与 $u_2(t)$ 的波形如图 9-9 所示

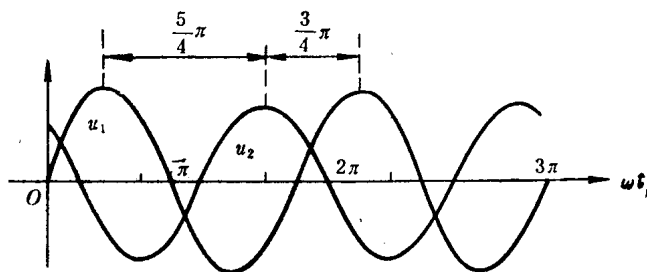


图 9-9 例 9-4 波形

例 9-5 已知两个同频率正弦电压为

$$u_1(t) = 100 \cos\left(\omega t + \frac{3}{4}\pi\right) \text{ V}$$

$$u_2(t) = 80 \sin(\omega t + \pi) \text{ V}$$

试求它们的相位差。

解 此例中两个正弦波的函数形式不同, 一个用 $\cos$ 函数, 一个用 $\sin$ 函数。在比较它们的相位关系时, 应首先把它们的函数形式一致化。可以都用 $\cos$ 函数表示, 也可以都用 $\sin$ 函数表示。本例我们都用 $\cos$ 函数表示, 即 $u_2(t)$ 可改写为

$$u_2(t) = 80 \cos\left(\omega t + \pi - \frac{1}{2}\pi\right) = 80 \cos\left(\omega t + \frac{1}{2}\pi\right)$$

故

$$\varphi = \theta_1 - \theta_2 = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{4}\pi$$

即 $u_1(t)$ 超前 $u_2(t)$ 角 $\frac{1}{4}\pi$ 。

例 9-6 已知两个同频率正弦电压为

$$u_1(t) = 100 \cos\left(\omega t + \frac{3}{4}\pi\right) \text{ V}$$

$$u_2(t) = -80 \cos\left(\omega t + \frac{1}{2}\pi\right) \text{ V}$$

试求 $u_1(t)$ 与 $u_2(t)$ 的相位差。

解 用式(9-7)求两正弦波的相位差, 不但要求两正弦波的函数形式要相同, 而且要求两

个表示式都要是标准形式,即 $u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta)$, 其中 U_m 为正数。故本例中 $u_2(t)$ 应改写为

$$u_2(t) = 80 \cos\left(\omega t + \frac{1}{2}\pi \pm \pi\right)$$

式中 $\pm$ 号表示用 $+$ 号或用 $-$ 号皆可。若取 $+$ 号, 则

$$u_2(t) = 80 \cos\left(\omega t + \frac{3}{2}\pi\right)$$

故

$$\varphi = \theta_1 - \theta_2 = \frac{3}{4}\pi - \frac{3}{2}\pi = -\frac{3}{4}\pi$$

即 $u_1(t)$ 滞后 $u_2(t)$ 角 $\frac{3}{4}\pi$ 。

练 习 题

9-1 试绘出 $i(t) = \cos(2t + 60^\circ) \cdot U(t)$ A 的波形, 分别用 t 和 ωt 为横坐标。 $U(t)$ 为单位阶跃函数。

9-2 图 9-10 所示电流波形其最大值为 100 V , 写出时间起点分别在 A 、 B 、 C 、 D 、 E 各点时, 电流 $i(t)$ 的表达式。

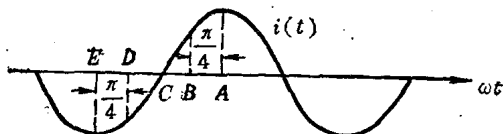


图 9-10 练习题 9-2

9-3 试求下列各正弦波的周期、频率和初相角。

(1) $4 \cos 314 t$;

(2) $6 \sin(5 t + 17^\circ)$;

(3) $4 \cos 2 \pi t$;

(4) $\cos\left(2 t + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \sin\left(2 t - \frac{\pi}{6}\right)$.

$$\left(0.02 \text{ s}, 50 \text{ Hz}, 0^\circ; \frac{2}{5} \pi \text{ s}, \frac{5}{2\pi} \text{ Hz}, -73^\circ; 1 \text{ s}, 1 \text{ Hz}, 0^\circ; \pi \text{ s}, \frac{1}{\pi} \text{ Hz}, -105.95^\circ\right)$$

9-4 若 $u_1(t) = 4 \cos(1000 t - 40^\circ) \text{ V}$, 分别求出 $u_2(t)$ 超前 $u_1(t)$ 的相位角; 其中 $u_2(t)$ 为

(1) $5 \cos(1000 t - 25^\circ) \text{ V}$;

(2) $3 \sin(1000 t + 40^\circ) \text{ V}$;

(3) $-2 \cos(1000 t - 120^\circ) \text{ V}$;

(4) $\sin(1000 t - 180^\circ) \text{ V}$.

$$(15^\circ; -10^\circ; 100^\circ; 130^\circ)$$

§ 9-2 正弦电压、电流的有效值

正弦电压、电流的瞬时值是随时间不断变化的,那末,怎样表征它们的大小呢?在电工技术中,对于周期电压、电流,为了表征它们在电路中的某种平均的效果,常用它们的某种积分量作为其大小的表征,其中最常用的就是所谓有效值。

以周期电流为例,其有效值的定义是

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \quad (9-7)$$

其中: $i(t)$ 为周期电流, I 为 $i(t)$ 的有效值,有效值用与其瞬时值对应的大写字母表示, T 为周期。式(9-7)表明,周期量的有效值等于其瞬时值的平方在一周期中的平均值再开方,因此,有效值又称方均根值。同样,周期电压的有效值为

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \quad (9-8)$$

有效值的单位与它的瞬时值的单位相同。

周期电压、电流的有效值可以体现这个电压、电流加到电路上产生电能的大小。例如,若有效值为 I 的正弦电流与大小为 I 的直流电流分别通入同一个电阻 R ,则在一个周期 T 中,电阻 R 消耗的能量相同。正弦电流 $i(t)$ 流过电阻时,一个周期中消耗的能量为

$$\int_0^T p(t) dt = \int_0^T R i^2(t) dt = R \int_0^T i^2(t) dt = R I^2 T$$

直流电流 I 流过同一电阻时,在时间 T 中消耗的能量为

$$P T = R I^2 T$$

可见,它们在一个周期中消耗的能量是相同的。也就是说,就在同一电阻上消耗的平均功率来说,有效值为 I 的周期电流与其值为 I 的直流电流是等效的。

正弦电压、电流是周期性的。当然也可用有效值表示。并且它们的有效值与振幅值之间有着简单的关系。即若

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

则

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \theta_i) dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_m^2 \cos^2(\omega t + \theta_i) d\omega t} \\ &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 I_m \end{aligned} \quad (9-9)$$

同理可得正弦电压的有效值为

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0.707 U_m \quad (9-10)$$

由此可见,正弦波的有效值等于其振幅值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍。这样,有效值的作用便可以代替振幅值的作用成为正弦波三要素中的一个要素。因此,正弦电压、电流瞬时值表达式也可以写成

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \theta_u) \quad (9-11)$$

和
$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \theta_i) \quad (9-12)$$

应该指出,许多正弦电路运行中所关心的都是电压、电流的有效值,并且许多交流测量仪表的读数也是按有效值刻度的。50Hz 交流电的电压、电流,若不加说明,给出的值都是指有效值。例如我们日常生活中用的交流电为 220V,就是指有效值,其振幅为 $\sqrt{2} \times 220 = 311$ V。

例 9-7 写出下列正弦量的有效值

(1) $u(t) = 120 \cos 314t$ V

(2) $i(t) = 70.7 \cos(6280t + 45^\circ)$ A

解 (1) $U = \frac{120}{\sqrt{2}} = 84.85$ V

(2) $I = \frac{70.7}{\sqrt{2}} = 50$ A

应该指出,工程上有时也需要知道正弦(或周期)电压、电流的最大值(峰值),作为选择某些电器元件耐压等级的根据。有时也用正弦(或周期)电压、电流均绝值的概念。以周期电流为例,均绝值的定义是

$$I_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt \quad (9-13)$$

即,均绝值等于其瞬时值的绝对值在一个周期的平均值。磁电整流式交流仪表的指针反映的就是周期电压、电流的均绝值*。

§ 9-3 正弦 RL 电路的完全响应 正弦稳态

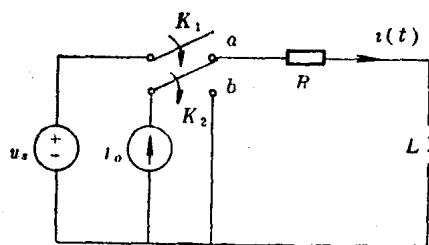


图 9-11 正弦 RL 电路

本节我们以正弦电压激励下 RL 串联电路为例,讨论线性非时变电路在正弦电压、电流激励下完全响应的几个特点,并引入正弦稳态的概念。

图 9-11 所示 RL 串联电路,电压源 $u_s = U_m \cos(\omega t + \theta_u)$, $t < 0$ 时电路已处于稳态, $t = 0$ 时开关 K_1, K_2 同时动作,使 K_1 与 a 点接通, K_2 与 b 点接通。求电流 $i(t)$ 在 $t \geq 0$ 时的完全响应。

* 这种仪表的表盘还是按有效值刻度的。

我们根据两类约束用列解电路方程的方法进行求解。在 $t > 0$ 时的电路方程为

$$Ri + L \frac{di}{dt} = U_{sm} \cos(\omega t + \theta_u) \quad (9-14)$$

初始电流

$$i(0) = I_0 \quad (9-15)$$

由微分方程理论可知

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t)$$

其中 $i_h(t)$ 为齐次方程的解, $i_p(t)$ 为特解。 $i_h(t)$ 应满足

$$Ri_h + L \frac{di_h}{dt} = 0$$

此方程即为无电源 RL 串联电路电流应满足的方程。由 § 6 可知

$$i_h(t) = K e^{-t/\tau} \quad (9-16)$$

其中: $\tau = \frac{L}{R}$, 为时间常数。 K 为待定常数, 需由 $i(t)$ 的完全解和初始条件来确定。

特解 $i_p(t)$ 的求解要比直流激励时复杂些。高等数学告诉我们, 求这个特解, 可首先猜测一个解答的形式, 然后再用待定系数的方法。由于正弦函数的导数仍然是正弦函数, 我们猜想 $i_p(t)$ 也是正弦函数, 假设 $i_p(t)$ 为

$$i_p(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i) \quad (9-17)$$

将式(9-17)代入式(9-14), 得

$$R I_m \cos(\omega t + \theta_i) + L [-I_m \omega \sin(\omega t + \theta_i)] = U_{sm} \cos(\omega t + \theta_u)$$

考虑到三角恒等式

$$A \cos \alpha + B \sin \alpha = \sqrt{A^2 + B^2} \cos\left(\alpha - \arctg \frac{B}{A}\right) \quad (9-18)$$

可得

$$\sqrt{(R I_m)^2 + (\omega L I_m)^2} \cos\left(\omega t + \theta_i + \arctg \frac{\omega L}{R}\right) = U_{sm} \cos(\omega t + \theta_u) \quad (9-19)$$

解得

$$I_m = \frac{U_{sm}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad (9-20)$$

$$\theta_i = \theta_u - \arctg \frac{\omega L}{R} \quad (9-21)$$

于是, $i(t)$ 的完全响应为

$$i(t) = K e^{-t/\tau} + I_m \cos(\omega t + \theta_i) \quad (9-22)$$

由于 $i(0) = I_0$, 则

$$I_0 = K + I_m \cos \theta_i$$

即

$$K = I_0 - I_m \cos \theta_i$$

则