常微分方程

上册

CHANG WEI FEN FANG CHENG

湖南科学技术出版社

常微分方程

上 册

贺建勋 王志成

湖南科学技术出版社

常 微 分 方 程

（上册）

贺建勋　王志成

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版

湖南省新华书店发行

湖南省新华印刷二厂印刷

*

1979年11月第1版第1次印刷

字数：404,000　印数：1—8,000　印张：19.75

统一书号：13204·12　　定价：1.82元

目　　录

前　　言

微分方程，产生于十六、十七世纪的力学和几何学的研究中。后来，随着生产力的发展和微积分学的建立，它逐步形成了一门富有生命力的数学分科，成了人们解决其他科学技术问题的重要数学工具。它在科学发展的历程中，早已显现出巨大的作用。它不仅在几何学、力学、天文学、物理及其他技术科学中得到了广泛的应用，推动了这些学科的发展；而且，在近代科学中，例如在核物理、电子技术、自动控制、星际航行等许多尖端科学技术领域内，也成为强有力的杠杆，推动着这些学科迅猛发展。就是在现代的生物学和经济学的研究领域内，它的理论和方法也是不可缺少的。

本书是一本常微分方程的教学参考书，主要供理、工科院校师生教学参考之用，也可作为工程技术人员和一切需要用到常微分方程的同志当作手册来查阅。本书的起点低，只要有数学分析基础的人就可以进行自学。但是，它的终点较高，将把读者带到常微分方程现代研究的某些专门性领域。因此，本书的篇幅较大，所涉及的内容较为广泛，包括常微分方程的基础理论、各种解题方法、大量的例题和习题，以及常微分方程在各方面的应用，书末还附有习题的答案。

全书共有九章，分上、中、下三册；上册含一、二、三章，

叙述常微分方程的基本概念，以及各种类型方程的初等积分法；中册含四、五章，叙述线性系统的一般理论和解法，同时还介绍常见的一些常微分方程的数值解法；下册含六、七、八、九章，叙述常微分方程的基础理论，一般定性理论，稳定性理论和最优控制理论。

我们编写此书时，本意是力求在体系、内容及处理方法上具有特色，使之比国内现有的常微分方程基础教材，具有更多、更新、更深的内容和更多的应用实例；同时也有别于一些常微分方程的专著，做到由浅入深，较为通俗易懂，其内容包含许多更广泛、更实用的材料，以求尽量满足各方面读者的需要。但由于我们的水平和学识有限，力不从心，本书难免有许多缺点和错误，希望读者给予批评、指教，以便进一步修改。

在本书的编写过程中，秦元勋、叶彦谦、李森林、王柔怀等教授曾给予热情的鼓励和支持，并进行了许多宝贵的指教；林坚冰、钱祥征同志分别帮助编写了第五章、第七章；陈湘能同志仔细校阅了第一章，叶忠光同志帮助修改了第二章，并对其他章节提出了修改意见；蔡维璇、黄淑兰、黄汉侠、周叔子、陈强等同志也从不同方面给予我们很多帮助。在此，谨向上述诸位师长和同志表示衷心的感谢。

编　者

一九七九年七月

第一章 绪 论

本章分五节叙述。我们首先通过实例阐明微分方程的由来(§1)，接着叙述微分方程的一些基本概念(§2)，解的存在唯一性条件(§3)，一阶方程的几何解释和图解方法(§4)，最后略述常微分方程论的问题(§5)。

§1 微分方程的实例

在数学分析里，为了反映运动过程中量与量间的变化规律，我们引进了函数，以及函数的微分与积分等。在那里遇到的函数关系，一般说来，函数本身是已知的，或者是容易直接建立起来的。但是，在实践向我们提出的许多更新更复杂的问题中，描述运动过程的函数本身却往往是未知的。这时，人们首先要利用广泛的自然科学知识与丰富的实践经验，间接地来找出问题中一些变量及其导数(变化率)之间的关系式。就是说，我们首先找出的是一个含有未知函数及其导数的方程，它称为微分方程。然后，通过对这个方程的讨论和求解，才能得出所需求的函数关系（运动规律）。

应当指出，在初等数学里我们所熟悉的代数方程中，作为未知而要去求的，是某个量的一个或几个特定的值（叫做方程

的解）。但在微分方程中，作为未知而要去求的“解”却是整个函数本身。这种求未知函数的方程，也叫做函数方程，而微分方程是其中最重要的一种。

下面，我们通过实例来说明微分方程及其解的某些概念，同时，说明微分方程可以来自各个方面。

例1 设一质点沿Ox轴运动，已知其速度v为时间t的连续函数，即$v=v(t)$，而且，当$t=0$时，该质点的位置（初始位置）为x_0，试求其运动的规律。

【解】 设在时间 t，质点的坐标为x。现在的问题就是要找出在运动过程中，坐标 x 与时间t的函数关系。为此，我们首先来建立这个未知函数 $x=x(t)$ 所应满足的微分方程。

因为速度可由$\dfrac{dx}{dt}$表示，而且已知质点在时刻 t 的速度为$v(t)$，故立刻可以得出下面的方程

$$(1.1)\qquad \frac{dx}{dt}=v(t),$$

这就是未知函数$x(t)$所应满足的微分方程。方程含有一阶导数，故叫做一阶微分方程。

直接积分(1.1) 式，得到

$$(1.2)\qquad x(t)=\int_{t_0}^{t} v(t)dt+c,$$

其中c为任意常数（积分常数）。显然，由(1.2)式所确定的函数$x(t)$都能满足方程(1.1)，即将函数(1.2)及其导数$x'(t)=v(t)$代入方程(1.1)后，结果得到恒等式：

$$v(t)\equiv v(t)。$$

所以，不论c为何值，函数(1.2)都是方程(1.1)的解。

另方面，不管质点从哪一个初始位置开始运动，当其速度为已知函数$v(t)$时，则表示其运动的函数$x(t)$都应满足方程(1.1)。于是，对应于无穷多个不同的初始位置，就有无穷多个不同的运动。这也表明，微分方程(1.1)不是只有一个或几个解，而是有无穷多个解。

现在我们的问题归结为求方程(1.1)的这样的一个解，它满足下列条件：

$$(1.3)\qquad x\bigg|_{t=t_0}=x_0.$$

条件(1.3)称为初始条件，它表示质点运动的初始位置。

将条件(1.3)代入关系式(1.2)，得出$c=x_0$。于是，所求问题的解，可用下面公式表示

$$(1.4)\qquad x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}v(t)dt.$$

例2 镭衰变规律：设镭衰变速度与该时刻现有存镭量成正比，且已知当$t=0$时，存镭量为R_0克，试确定在任意时刻t的存镭量$R(t)$。

【解】 显然，在时刻t的存镭量R是时间t的函数，即$R=R(t)$。要想直接找出这个函数关系是比较困难的，因此，下面先来建立$R(t)$所应满足的微分方程。

因为衰变速度就是函数$R(t)$对时间t的变化率$\frac{dR}{dt}$，根据题意，可以得出下面的一阶微分方程

$$(1.5)\qquad \frac{dR}{dt}=-\lambda R,\ (R>0),$$

其中$\lambda>0$，是比例系数。上式右端的负号是由于函数$R(t)$是随时间的增加而减少的，因而它的导数应是负的。

现在的问题归结为求方程(1.5) 的一个解，它满足下面的初始条件

(1.6) $$R\Big|_{t=0}=R_0.$$

将方程(1.5) 改写成

$$\frac{dR}{R}=-\lambda dt,$$

积分得

$$\ln R=-\lambda t+c_1,$$

(1.7) $$R=ce^{-\lambda t},$$

其中$c=e^{c_1}$。容易直接验证，不论c为何值，函数(1.7) 都能满足方程(1.5)，因而是方程 (1.5) 的解。事实上，由(1.7) 微分得

(1.8) $$\frac{dR}{dt}=-\lambda ce^{-\lambda t}.$$

将(1.7)及(1.8)代入方程(1.5)，得出恒等式

$$-\lambda ce^{-\lambda t}\equiv(-\lambda)\cdot(ce^{-\lambda t}).$$

现在我们还要从函数族(1.7)中找出满足初始条件(1.6)的解。为此，将(1.6)代入(1.7)，解出 $c=R_0$。于是，所求问题的解就是

(1.9) $$R=R_0e^{-\lambda t}.$$

上式表明：在开始时 (即 $t=0$时)，存镭量是R_0，而后，存镭量$R(t)$ (镭衰变规律) 是按指数律衰减的。

从上面例题可以看到，为了求得描述运动过程的函数关系，我们总是首先建立这个未知函数所满足的微分方程，然后通过微分方程的求解，最后才得出所求的函数关系。

下面我们再举一些建立微分方程的实例，至于微分方程的解法留待以后各章再叙述。

例 3 质点直线运动的方程：设有一质量为m的质点，在平行力F的作用下沿ox轴运动，若力F是质点的位置x、运动的速度 $v=\frac{dx}{dt}$及时间t的已知连续函数，即$F=F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$，试建立质点运动的微分方程。

【解】 设质点在时间t时，它的坐标为x。显然，当质点在ox轴上运动时，它的坐标x是时间t的函数，而要知道质点的运动规律，就是要知道x和t的函数关系。下面我们来建立未知函数$x=x(t)$所满足的微分方程。

根据牛顿第二定律，作用于质点上的力F，将引起运动的加速度 $\omega=\frac{d^2x}{dt^2}$，而且质点的质量m乘这个加速度确切地等于作用力的大小。亦即，在运动的任何时间里，成立恒等式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{1.10}$$

这就是所求的质点直线运动的微分方程，它是牛顿第二定律的数学描述。方程(1.10)中含有未知函数的二阶导数，故也叫做二阶微分方程*。

*)方程中出现未知函数的最高阶导数的阶数，叫做微分方程的阶（参看§2中的定义）。

例 4 设有一质量为m的质点，在有阻力的介质（液体或气体）中受弹簧的弹性力的影响，沿水平轴 Ox 轴作微幅振动（见图1—1）。设介质阻力与运动速度成正比，而弹簧的弹性力服从虎克定律，试建立此质点微幅振动的微分方程。

【解】 设平衡位置为$x=0$，而在时间 t 时，质点的坐标为

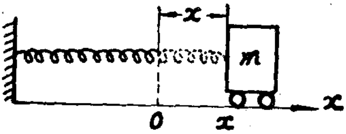

图 1—1

$x=x(t)$，现在要建立函数$x(t)$所满足的微分方程。

根据假设，弹簧的弹性力F_1遵照虎克定律，有

(1.11) $$F_1=-kx,$$

其中$k>0$为弹性系数。又阻力F_2与运动速度成正比，即

(1.12) $$F_2=-h\frac{dx}{dt},$$

其中$h>0$为阻尼系数。(1.11)、(1.12)两式中的负号表示弹性力和阻力的方向与运动的方向相反。

因此，在我们所考虑的问题中，使质点运动的净力F为

$$F=F_1+F_2=-kx-h\frac{dx}{dt}.$$

根据牛顿第二定律，得到

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-h\frac{dx}{dt},$$

或

(1.13) $$m\frac{d^2x}{dt^2}+h\frac{dx}{dt}+kx=0.$$

其中m、k、h 均为常数。这是一个二阶微分方程，它称为有阻尼自由振动的微分方程。

此外，若除了上述诸力外，质点还受有一个外力$F_3=f(t)$的影响，那末得到的微分方程是

$$(1.14)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2}+h\frac{dx}{dt}+kx=f(t),$$

这是有阻尼强迫振动的微分方程。

例 5 如图1—2的简单闭合电路（简称回路）中，左边代表电容 C，它的两极和自感L、电阻R串联组成的回路（简称为R、C、L 电路）。设在某时刻将电容器充电，使之得到一个电位差以后，便将电源切断，由于有自感L存在，回路中产生振荡的电流，试建立电振荡的微分方程。

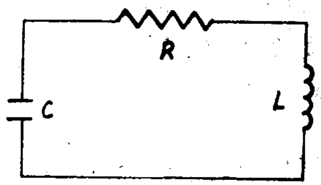

图 1—2

【解】 设 $v=v(t)$ 表示在时刻 t 电容器两极间的电位差，$i=i(t)$表示电流强度。根据物理学中熟知的电学定律，电阻 R 上的电位差为iR，自感L上的电位差为 $L\frac{di}{dt}$，遵照基尔霍夫第二定律，沿任一闭合回路的电位差的代数和等于0，我们得到：

$$(1.15)\qquad L\frac{di}{dt}+iR+v=0.$$

又因为 $i=\frac{dQ}{dt}$，$v=\frac{Q}{C}$，这里$Q=Q(t)$表示在时刻t电容器上的电荷，得到

$$i=C\frac{dv}{dt},\quad \frac{di}{dt}=C\frac{d^2v}{dt^2},$$

代入(1.15)，得到

$$(1.16)\qquad LC\frac{d^2v}{dt^2}+RC\frac{dv}{dt}+v=0,$$

这就是所论回路中电振荡的方程，它是一个二阶微分方程。

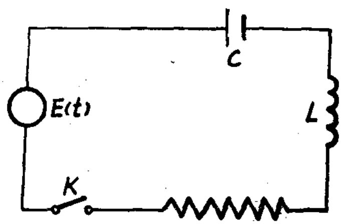

图 1—3

此外，若R、C、L电路与电动势为$E(t)$的电源串联，如图 1—3，则得到微分方程

$$(1.17)\qquad LC\frac{d^2v}{dt^2}+RC\frac{dv}{dt}+v=E(t),$$

其中R、L、C均为常数。

方程(1.13)、(1.14)、(1.16)及(1.17)中，出现未知函数的一阶、二阶导数的各项都是一次的，这样的方程叫做线性微分方程，它是微分方程中很重要的且应用很广的一类方程。

比较方程(1.13)与(1.16)，(1.14)与(1.17)，可以看出这两个不同系统的微分方程具有相同的形式，这在实践中是很重要的。例如，我们可以通过建造和研究一个与机械系统相似的电模拟系统，来代替机械系统的建造和研究。因为，一般说来，电的或电子的系统更容易通过实验来进行研究。

例 6 在一根长为L的细绳下端，悬挂一质量为m的质点，略为移动后，该质点在重力作用下来回摆动（见图1—4）。这种