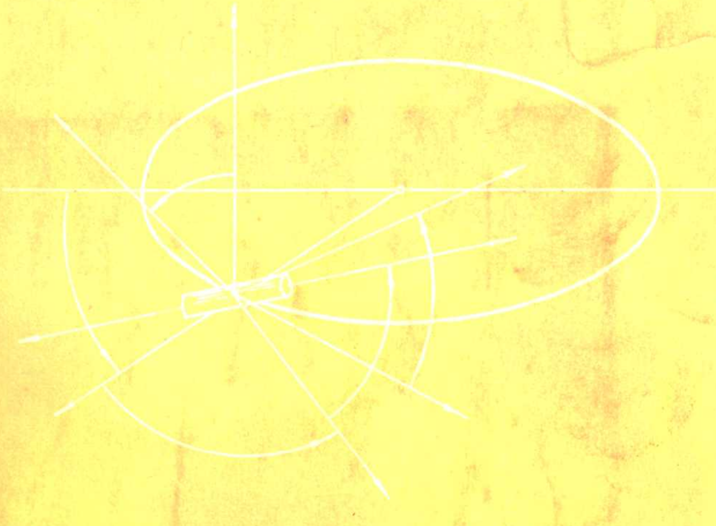
分析力学

黄昭度　纪辉玉　编著



清华大学出版社

内 容 提 要

本书是一本适用于工科专业、具有工程技术特点的分析力学教材。全书共分五章，系统地介绍了分析力学的基本概念和基本原理、完整系统动力学、非完整系统动力学、正则变换和哈密尔顿-雅可比方程以及力学的变分原理等，并附有较多来自工程实际问题的例题与习题。

本书可作为高等工科院校分析力学课程的教材，和有关工程技术人员的科技参考书籍。

分 析 力 学

黄昭度　纪辉玉　编著

☆

清华大学出版社出版

北京　　清华园

人民交通出版社印刷厂排版

河北省固安县印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

☆

开本：787×1092 1/32　印张：11$\frac{5}{8}$　字数：263千字

1985年6月第一版　1985年6月第一次印刷

印数：00001—20000

统一书号：15235·137　定价：2.30元

为《分析力学》一书作序

自 1788 年拉格朗日（Lagrange）的《分析力学（Mécanique Analytique）》第一版问世以来已近二百年了．拉格朗日成功地把力学理论与数学分析方法结合起来，建成了具有严谨数学结构的力学体系，提出了建立质系运动微分方程的普遍又有成效的方法，为分析力学奠定了基石．在此基础上，哈密尔顿（Hamilton）引入新的变量，提出变换理论和方法，建立了微分方程的积分理论和力学的变分原理，从而使分析力学的理论体系臻于完善．现在，分析力学已成为力学中一个重要的分支．

在分析力学形成和发展的时期，它已在天体力学、刚体动力学和微幅振动理论中得到成功的应用．本世纪以来，它又在量子力学、固体力学和流体力学中得到广泛的应用，分析力学已成为这些学科的理论基础之一．由于这种原因，国内外大学中的一些理科专业早已把分析力学作为一门必修理论基础课程，列入教学计划中．近几十年来，现代工程技术迅速发展，许多新的技术科学兴起，这些新学科常是在许多旧学科综合基础上或边缘之中发展起来的，它要求更为宽广而坚实的理论基础．在这种背景下，分析力学在航天技术、现代控制理论、非线性力学、计算力学及非线性网络分析等许多新科学技术领域中得到越来越广泛的应用，日益受到人们的重视．现在，国内外大学的许多工科专业也把分析力学作为一门理论基础课程，许多工程技术人员也在自学或进

修、这无疑是有远见的．但是，目前国内出版的分析力学教材还不能适应形势发展的要求，教材品种太少，多数只适用于理科专业教学．为了培养适应工程技术现代化的人才，编写适用工科专业、具有工程技术特点的分析力学教材是急待解决的一个课题．本书作者黄昭度和纪辉玉两同志在清华大学讲授分析力学课程的基础上，编写了这本教材以适应工科专业分析力学教学的需要．在编写过程中，他们调查并分析了现代工程技术有关学科中常用到的力学理论和方法，收集了一些工程技术应用问题，重新整理，并多次修改，最后才完成书稿．我认为他们的工作是有意义和有成效的．

分析力学的特点之一是抽象．拉格朗日在《分析力学》一书序言中曾自豪地说："本书中无一图．我所要阐明的方法既不需要作图，也不需任何几何或力学的论述，而仅需按照统一规定的步骤进行代数的运算．爱好分析的人将会高兴地看到并感谢我使力学成为分析的一个分支"．由此可见，讲授分析力学的难点之一是如何使学生既掌握数学分析方法又理解力学的物理本质．本书的作者在这方面作了不少努力，力图阐明数学公式中所孕含的物理意义，并注意阐明分析方法的思路的发展．

讲授分析力学的另一困难是难于找到合适的应用例题．一般的传统例题常过于简单，反映不出分析力学的威力，有如杀鸡用牛刀．联系工程技术的实例往往又太复杂，解一个题相当讲授一个专题，也不宜采用．如何选择难易适度，既能反映分析力学方法的效力，又结合工程技术应用的例题，实是一项困难任务．本书作者在这方面也作了可贵的努力，从收集的许多例题中作了精选，这将有助于读者学习并领会分析力学的方法和应用．

本书的出版将对工科专业分析力学的教学和在有关工程技术领域中推广应用分析力学作出贡献。

清华大学工程力学系
罗远祥
1983年1月

前　　言

由 Lagrange 创立的，并经 Hamilton、Poisson、Jacobi 及 Appell 等人加以发展起来的分析力学在力学各分支中占有基本的地位．分析力学作为一门学科，虽然已有二百余年的历史，但其研究对象却不易确切地加以概括．我们大体上可以说，建立任意离散力学系统的描述方法，建立系统运动规律的变分原理，并由变分原理得出在各种条件下的运动方程式，以及这些运动方程式的积分方法等就构成了分析力学的基本内容．

分析力学有两大特征：一是数学方法上的严密性，用纯分析的方法进行推理和论证已成为这门学科的传统特色；一是适用范围的广泛性，由于用最一般的方式讨论了系统可能遇到的各种约束条件，这样就包括了实际上可能出现的各种离散力学系统．正是由于以上两方面的特征形成了研究方法上的高度概括性．和初等力学相比，分析力学令人感到十分抽象而不易理解，本质的东西容易被复杂冗长的数学推导所掩盖，这是这门学科在数学上需要克服的一个矛盾．

长期以来，分析力学一直是天体力学、理论物理的工作者所感兴趣的对象，至于工程技术界则很少对它有兴趣．这个情况在一定程度上反映了本世纪初至三、四十年代的力学发展水平．随着工程技术的迅速发展，对力学工作者提出愈来愈高的要求，为了解决航天工程、自动控制、机械工程等技术领域中提出的各种复杂的力学问题，为了适应非线性力

学及计算力学的发展，人们愈来愈多的运用分析力学的原理和方法．这种情况必然要反映到工科院校的力学教学中来。但是国内已经出版的分析力学教材品种少，很少涉及工程实际问题，这是这门学科在教学上需要克服的另一个矛盾．

为了克服以上两个矛盾，作者认为，需要对分析力学的理论和应用进行全面而深入的研究：（1）对现有种类繁多的分析力学著作进行分析和整理，摒弃那些陈旧的，没有多少实际意义的内容，保留那些在理论上和应用上有价值的内容，并适当考虑到工程应用的特点，形成分析力学的理论体系．（2）对分析力学的基本原理、概念和方法作深入的探讨，力求弄清它们的来龙去脉，并澄清长期以来存在的概念上和观点上的混乱和错误．（3）调查分析力学在工程技术中的应用，广泛收集这方面的资料．力求了解分析力学在解决现代工程技术力学问题中所起的作用．

本书在以上几方面作了一些努力．但是由于作者水平有限，又由于时间仓促，这个努力比起所要达到的目标来说是远远不够的．如果本书的出版对于编写带有工程特点的分析力学教材能起抛砖引玉的作用，便算是达到了作者的目的．

全书共分五章：第一章讲述分析力学的基本概念和原理．鉴于多维抽象空间的概念有助于加深对某些基本问题的理解，在本章中引入了位形空间及相空间的概念．在本章中还着重探讨了某些基本问题，如两个 Lagrange 经典关系和微分——变分交换关系《$d\delta=\delta d$》的适用范围，目的是使读者一开始便接触到完整系统与非完整系统在一系列基本问题上的差别，建立正确的概念和方法．

第二章讲述完整系统动力学，主要是 Lagrange 方程的建立和应用．由于离散完整系统动力学问题是工程技术中大

量存在的分析力学问题，所以本章最后讨论了几个典型而深入的实际应用问题。

第三章讲述非完整系统动力学。本书限于篇幅，只讨论了三种基本形式的方程，即 Routh 方程，Boltzman-Hamel 方程及 Appell 方程，在讨论后两种方程时，一律采用伪坐标的描述方法，这是因为伪坐标既简化了理论上的处理，又有实际应用上的很大灵活性。

第四章讲述正则变换与Hamilton-Jacobi方程。在本章中通过实例讨论了在相空间中描述系统运动的方法和特点，赋予正则变换的几何说明。在讨论 Hamilton-Jacobi 方程的可积分情况时，本书用统一的观点讨论了可分离变量的几种情况。最后讨论了正则摄动理论初步及其在解非线性动力学问题中的应用。

第五章讲述力学的变分原理，本章对变分原理的实质，形成和发展作了简要的回顾。对于从变分原理推导正则变换作了简短的论述。这对于不希望按第四章的处理方法（即双线性协变量方法）的读者也带来了某些方便。本章对于某些观点上的混乱（如正则变量变分的独立性，Hamilton 原理对于非完整系统是否有效等）作了一些探讨。最后讨论了变分原理对于非线性离散系统及线性或非线性连续系统的某些应用。

本书是作者在清华大学讲授《分析力学》课程的基础上，经过修改和补充编写而成的。在编写过程中，得到罗远祥教授的热情赞助和支持。罗远祥教授对本书原稿进行了详细校阅，并提出了很多宝贵意见，作者藉此机会表示衷心的感谢。

黄昭度　纪辉玉

1983年4月

目　录

第一章　基本概念

1·1　约束及其分类

任意多个质点的集合称为质点系，或简称系统．系统各质点在空间的位置的集合称为系统的位形，位形表示了系统各质点的位置分布所构成的几何形象．位形或速度不受任何预先规定的几何条件的制约而能任意变化的系统称为自由系统．如太阳系、飞行器——地球——月球系统都属于自由系统．位形或速度受到预先规定的几何条件的制约而不能任意变化的系统称为非自由系统．工程技术中大量出现的力学问题属于非自由系统力学问题，如陀螺系统、机器与机构，机械手与机器人等受控系统都属于这一类，因此研究非自由系统动力学就有理论上和实际上的重要意义．分析力学的主要任务是研究任意自由及非自由系统动力学的普遍原理和方法，即系统运动的描述方法、变分原理及运动方程式的建立、积分方法等．

在非自由系统中，那些预先规定的，与初始条件及受力条件无关的，限制系统位形或速度的运动学条件统称为**约束**．设有 N 个质点组成的系统受到只限制其位形的约束，这样的约束称为**完整约束**．完整约束的约束条件可用以下的约束方程表示：

$$f_k(x_1,\ y_1,\ z_1,\ \cdots,\ x_N,\ y_N,\ z_N)=0$$
$$(k=1,\ \cdots,\ r;\ r<3N) \tag{1·1·1}$$

其中 r 为约束条件数，显然 r 必须小于 $3N$，否则系统就不能运动了．约束方程中不显含时间变量 t 的约束称为**定常约束**，而在约束方程中显含时间变量 t 的约束则称为**非定常约束**：

$$f_k(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_N, y_N, z_N, t)=0$$
$$(k=1, \cdots, r;\ r\leqslant 3N) \tag{1·1·2}$$

例如，具有固定悬挂点O及刚性杆（摆长$=l=$常数）的球摆，摆锤 M 被限制在以O为球心，以 l 为半径的球面上，其约束方程为

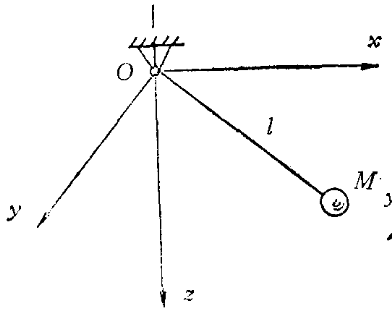


图 1·1·1

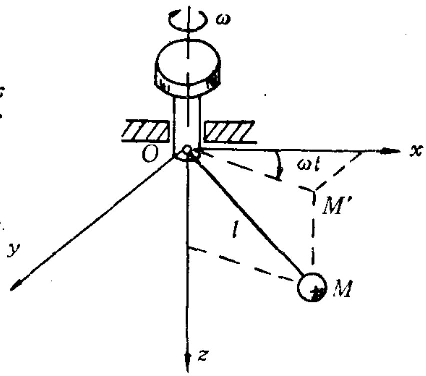


图 1·1·2

$$x^2+y^2+z^2=l^2 \tag{1·1·3}$$

这种约束是定常的，因为约束方程中不显含时间变量 t．如果悬挂点的位置随时间变化，或悬挂点的位置不变，但摆长随时间而变，则约束方程将变为以下形式：

$$[x-x_0(t)]^2+[y-y_0(t)]^2+[z-z_0(t)]^2=l^2 \tag{1·1·4}$$

或
$$x^2+y^2+z^2=l(t)^2 \tag{1·1·5}$$

这后两种情形属于非定常约束，因为约束方程中显含 t．

又如，用圆柱铰联结在一个旋转轴上的摆，该轴绕铅垂

轴线 OZ 以等角速 ω 转动. 这个系统称为旋转摆（图 1·1·2）. 旋转摆显然也要满足和球摆一样的约束条件，即 M 点被限制在以 O 为圆心，以 l 为半径的球面上，因而也必须满足约束方程（1·1·3）. 但除此之外还需满足随旋转轴一起转动的条件，这个条件可分析如下：过 OM 作一铅垂面，这个铅垂面随旋转轴一起转动。如果旋转轴的角位移从 x 轴开始度量，则 OM 在 Oxy 平面上的投影 OM' 和 x 轴之夹角应为 $\varphi=\omega t$，于是 M 点的坐标 x 及 y 应满足以下方程：

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\omega t \tag{1·1·6}$$

方程（1·1·3）和（1·1·6）构成了旋转摆的全部约束条件. 可见，旋转摆有两个完整约束，其中一个是定常的，另一个是非定常的.

如果系统在运动过程中有可能脱离约束（全部或部分脱离），这种约束称为单面约束；如果系统在任何情况下都不会脱离约束，这种约束就称为双面约束. 这两类约束的差别表现在约束方程上：前者是不等式，后者是等式. 今后除非事先声明，我们一律讨论双面约束的情形.

以上我们讨论了完整约束，其特点表现为约束对系统位形的限制. 如果约束表现为对系统速度的限制，这样的约束就属于**非完整约束**. 非完整约束方程的一般形式可表为以下形式：

$$\begin{gathered}f_k(x_1,\ y_1,\ z_1,\ \cdots,x_N,\ y_N,z_N;\\ \dot{x}_1,\ \dot{y}_1,\ \dot{z}_1,\ \cdots,\ \dot{x}_N,\ \dot{y}_N,\ \dot{z}_N;t)=0\\ (k=1,\cdots,\ l;l\leqslant N)\end{gathered} \tag{1·1·7}$$

和完整约束相比较，非完整约束方程的特点表现为微分形式，而不是有限形式（代数形式），所以这种形式的约束又

称为微分约束．从表面上看，约束方程中含有各质点的坐标和速度，似乎是约束对位形和速度都有了限制．其实不然，在方程组（1·1·7）中可以任意指定坐标，而速度则可在指定坐标及约束条件（1·1·7）的情况下变化．换言之，在（1·1·7）中坐标可以任意给定，但速度则不能任意给定．方程（1·1·7）可以理解为在任意给定的位形中，系统各点速度应满足的约束条件．在非完整约束中最重要的一种情形是约束方程可表为速度的线性方程式：

$$\sum_{i=1}^{N}(\alpha_{ki}\dot{x}_i+\beta_{ki}\dot{y}_i+\gamma_{ki}\dot{z}_i)+g_k=0$$

$$(k=1,\cdots,l) \qquad (1\cdot1\cdot8)$$

其中 α_{ki}、β_{ki}、γ_{ki} 及 g_k 是坐标和时间 t 的函数．用速度的线性关系式（1·1·8）表达的约束称为一阶线性非完整约束，而用一般形式(1·1·7)表达的约束称为一阶非线性非完整约束．作为一阶线性非完整约束的经典例子，我们可以举出雪橇在水平面中运动的问题，即著名的 Чаплыгин—Caratheodory 问题．非完整约束表现为雪橇重心 C 点的速度永远沿其轴线 AB 的方向，如图 1·1·3 所示．如果取 C 点坐标 x_c，y_c 及 AB 线的转角 φ 决定这个作平面运动刚体的位形，则约束对 C 点速度方向的限制条件可表为：

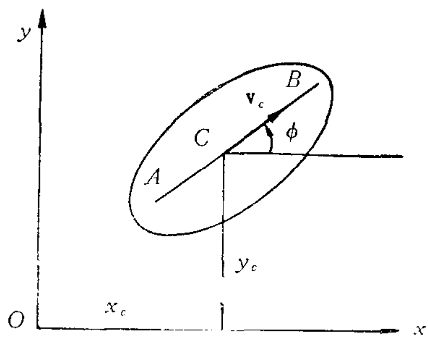


图 1·1·3

$$\dot{y}_c-\dot{x}_c\mathrm{tg}\varphi=0 \qquad (1\cdot1\cdot9)$$

这是速度 $\dot{x}_c$，$\dot{y}_c$ 的线性方程。我们注意到，这个约束并没有限制雪撬的位形，就是说 x_c，y_c 及 φ 可取任意值。方程（1·1·9）可以理解为，在给定任意 φ 值后，速度分量 $\dot{x}_c$，$\dot{y}_c$ 必须满足的关系。

一阶线性非完整约束方程（1·1·8）可改写为以下形式：

$$\sum_{i=1}^{N}(\alpha_{ki}dx_i+\beta_{ki}dy_i+\gamma_{ki}dz_i)+g_k dt=0$$

$$(k=1,\cdots,l) \qquad (1\cdot1\cdot10)$$

这种形式的方程称为对变量 x_i，y_i，z_i 及 t 的 Pfaff 型微分方程。由 Pfaff 型方程的理论可知*，方程组(1·1·10)可积的必要且充分的条件是其系数应满足以下诸条件：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\alpha_{ki}}{\partial x_j}=\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial x_i},\quad \frac{\partial\beta_{ki}}{\partial y_j}=\frac{\partial\beta_{kj}}{\partial y_i},\\
&\frac{\partial\gamma_{ki}}{\partial z_j}=\frac{\partial\gamma_{kj}}{\partial z_i}\\
&\frac{\partial\alpha_{ki}}{\partial y_j}=\frac{\partial\beta_{kj}}{\partial x_i},\quad \frac{\partial\beta_{ki}}{\partial z_j}=\frac{\partial\gamma_{kj}}{\partial y_i},\\
&\frac{\partial\gamma_{ki}}{\partial x_j}=\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial z_i}\\
&\frac{\partial\alpha_{ki}}{\partial t}=\frac{\partial g_k}{\partial x_i},\quad \frac{\partial\beta_{ki}}{\partial t}=\frac{\partial g_k}{\partial y_i},\\
&\frac{\partial\gamma_{ki}}{\partial t}=\frac{\partial g_k}{\partial z_i}
\end{aligned}\right\} \qquad (1\cdot1\cdot11)$$

如果方程组（1·1·10）可积，则约束方程将由微分形式回到

*）彼得罗夫斯基著，黄克欧译：常微分方程论讲义，1953

有限形式(1·1·2)．因此可积的微分约束可以归入完整约束那一类，只有不可积的微分约束才能叫做非完整约束．今后，具有全部完整约束的系统称为完整系统，具有非完整约束（即使只有一个，而其余都是完整约束）的系统称为非完整系统．

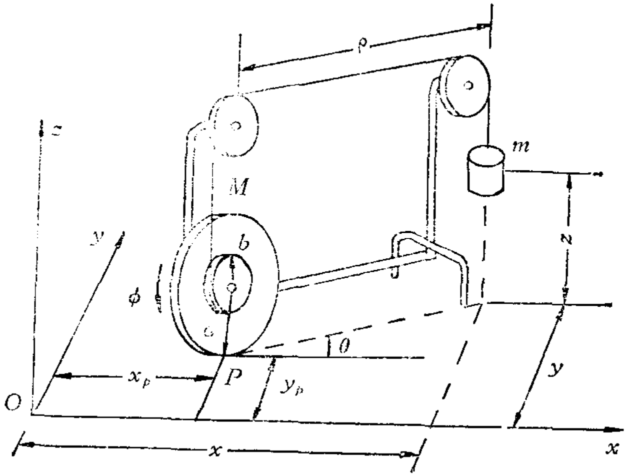


图 1·1·4

Appell-Hamel 的椅子轮可作为一阶非线性非完整约束的例子，如图 1·1·4 所示．系统的构造如下：半径为 a 的轮子 M 可在水平面内作无滑动的滚动．为了保持轮子平面在铅垂面内，用两条腿的支架和轮子轴承相固结．重物 m 通过绳子绕过固定在支架上的两个滑轮，最后绕在和轮子 M 相固结的鼓轮上．设鼓轮的半径为 b，由轮子 M 的中心到 m 的水平距离为 ρ；x，y，z 为 m 的坐标；x_P、y_P 为轮子与地面接触点的坐标；θ 为轮子平面与轴 Ox 的夹角；φ 为轮子的自转角．由图 1·1·4 可知：

$$\dot{z} = b\dot{\varphi} \tag{1·1·12}$$