高等学校教学用书

电子计算机应用数学

第二册

冶金工业出版社

高 等 学 校 教 学 用 书

电子计算机应用数学

第二册

东北工学院 潘德惠 主编

*

冶 金 工 业 出 版 社 出 版

（北京灯市口74号）

新 华 书 店 北 京 发 行 所 发 行

冶金工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092 1/16 印张 20 1/2 字数 487 千字

1981年 8 月第一版 1981年 8 月第一次印刷

印数00,001～14,000册

统一书号：15062 · 3730 定价2.10元

前　　言

电子计算机是当代科学技术最重要的成就之一。随着我国四个现代化的逐步实现，电子计算机必将在国民经济和科学技术的各个方面日益得到广泛的应用。电子计算机的应用技术涉及到现代数学的许多方面，远远超出原工科院校《高等数学》的范畴。本书主要为电子计算机专业和自动控制专业的教学需要而编写的，着重介绍最基础的知识，尽可能介绍有关领域的新成果与应用；编写了例题和习题；为照顾有关专业的不同需要，对较难理解的部分用*号或附录编排，供教学时选择。

全书原计划分三册出版，由于情况的变化，现在精简了部分内容改分两册出版。本书为第二册，第一册已于一九七九年出版。

本册由潘德惠主编，第三、五章由任家时执笔，第四章由任家时和王宝库执笔，第六章由马正午和王佩玲执笔，第七、八章由孙宇执笔。在编写过程中得到了李文清等同志的大力帮助，我们在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，时间仓促，缺点错误在所难免，请读者批评指正。

编　者

1980年7月

目　　录

第三章　复变函数

第一节　复数与复变函数

一、复数及其运算

1．复数

数的概念是根据实际需要而逐渐发展和扩充的。在最初阶段，由于计数和测量的需要，就有了正整数（或称自然数）。随着人类社会的发展，用正整数来表示测量的结果逐渐感到不够，于是就引进了新的数——正分数（任何一个分数都能化成有限小数或无限循环小数）。为了表示相反意义的量，还引进了负数的概念。这样，我们就把整数、分数、零统称为有理数。从数学角度来看，也可以说数的不断扩充是由于代数运算推动的结果。众所周知，如果单单从使得加、减、乘、除四则运算总能有意义地进行这一要求来说，数的概念从自然数扩充到有理数就足够了。但是，从几何上的度量观点来看，显然会产生新的问题；例如，边长为1的正方形对角线的长度，既不能用整数表示，也不能用分数表示，是一个无限不循环的小数，象这样的数称为“无理数”，又如$\pi=3.14159\cdots$，$e=2.71828\cdots$，也都是无理数。总起来说，正、负有理数，正、负无理数统称为实数。每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示，反过来，数轴上的每一个点都表示一个实数。

数的概念扩充到了实数以后，是否就不必再向前扩充了呢？从数学发展上看，不再扩充仍然会遇到困难。例如，最简单的一元二次方程$x^2+1=0$的求根问题，也即负数开平方的问题，在实数范围内就成为不可能的了。为了克服这个困难，人们引进一个新的数字单位i，i表示方程$x^2+1=0$的一个根，即$i^2=-1$。这样，对于任意一个负数a，$\sqrt{a}$就有意义了，即

$$\sqrt{a}=i\sqrt{|a|}\qquad (a<0,\ i=\sqrt{-1})$$

负数能够开平方带来的第一个直接结果，就是一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

永远可以求得两个根了。当$b^2-4ac<0$时，从形式上可算出，它的两个根分别为

$$x_1=\frac{-b}{2a}+i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a};\quad x_2=-\frac{b}{2a}-i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

它们是下边定义的复数。

定义 1　形如$x+iy$的组合称为**复数**，其中x、y均为实数；$i=\sqrt{-1}$称**虚数单位**。复数常用z表示，，即

$$z=x+iy$$

通常我们又称x为复数z的**实部**，y为复数z的**虚部**，并记作

$$x=\mathrm{Re}z,\ y=\mathrm{Im}z$$

当$x=0$时，规定$z=iy$，称为**纯虚数**；当$y=0$时，规定$z=x$，显然是实数。零是同时可作为实数与纯虚数的唯一的一个数。

所谓两个复数相等，是指两个复数的实部与实部，虚部与虚部都相等。即设$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，当且仅当$x_1=x_2$，$y_1=y_2$时，才有$z_1=z_2$。两个不全为实数的不相等的复数，不能比大小。这是复数与实数的一个重要差别。

另外，如果两个复数其实部相同，虚部正负号相反，则称此二复数互为**共轭数**，z的共轭数记为$\overline{z}$，即$z=x+iy$，则$\overline{z}=x-iy$，且$\overline{\overline{z}}=z$。

2．复数的表示法

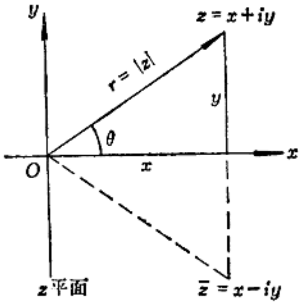

图 3-1 z-平面

如上所述，可知一个复数 $z=x+iy$ 与一对实数组(x,y)成一一对应。对于平面上一个直角坐标系来说，复数$z=x+iy$可以用坐标为(x,y)的点来表示，并且我们常把“点 z”作为“数 z”的同义词。x轴称为**实轴**，y轴称为**虚轴**，两轴所在平面称为**复平面**，或称为 **z-平面**。

既然复数可以用平面上的点表示，自然也可以用向量来表示。如图3-1所示，向量$\boldsymbol{r}$与数z也是一一对应的。我们知道，向量$\boldsymbol{r}$有两个特征数：向量的大小（也称“模”）r，和向量的幅角θ，因此复数z可以通过数组(r,θ)，表示成

$$z=r\angle\theta$$

这就是复数的向量表示。由图3-1可知，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\theta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$、以后我们就把向量$\boldsymbol{r}$的模$r$，幅角$\theta$分别称为复数$z$的**模**和**幅角**，记作

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad \operatorname{Arg}z=\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

这里，对于幅角$\operatorname{Arg}z$有必要进一步说明，当$z=0$时，$|z|=0$，幅角$\operatorname{Arg}z$不确定。当$z\neq0$时，复数z有无穷多个幅角，如果设θ_0是其中的一个，那末

$$\operatorname{Arg}z=\theta_0+2k\pi \qquad (k\text{为任意整数})$$

上式给出了z的全部幅角。在$z\neq0$的全部幅角中，若θ_0满足

$$-\pi<\theta_0\leqslant\pi$$

则称θ_0为$\operatorname{Arg}z$的**主值**，并记作$\arg z$，即

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi$$

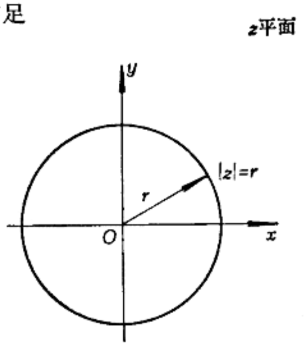

图 3-2

复数的向量表示，突出了复数的模和幅角的几何意义。模也叫作复数的绝对值，从模的表达式可以看出，复数z的模相当于z点到原点的距离。复平面上，$|z|=r$ $(r>0)$表示了中心在坐标原点、半径为r的圆（图3-2）。

根据直角坐标与极坐标的关系

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$$

复数$z=x+iy$，又可以表示成为下面的三角形式

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

再由Euler公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$
上式还可以写成指数形式

$$z=re^{i\theta}$$

总结上述讨论，复数 z 可以写成

$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}=r\angle\theta$$

其中 $\quad |z|=r=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta=\arg z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} \ (-\pi<\theta\leqslant\pi)$

由复数的模或绝对值的表达式可知 $|\operatorname{Re}z|=|x|$，$|\operatorname{Im}z|=|y|\leqslant|z|=r\leqslant|x|+|y|=|\operatorname{Re}z|+|\operatorname{Im}z|$。这些关系以后要用到。

复数$z=x+iy$的共轭复数$\bar{z}$可以写成

$$\bar{z}=x-iy=r[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]=r(\cos\theta-i\sin\theta)=re^{-i\theta}=r\angle(-\theta)$$

从几何上看，在 z 平面上点 z 与点 $\bar{z}$ 是关于 x 轴对称的（如图3-1所示）。

3．*复数的运算法则*

设$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，规定

$$z_1\pm z_2=(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(y_1x_2+y_2x_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \qquad (z_2\neq 0)$$

在上述的加、减、乘、除运算法则中，加、减及乘的运算完全可以按照代数多项式的加、减、及乘的规则来进行，只须注意$i^2=-1$并将计算结果按实部与虚部合并“同类项”即可；而除法规则按如下方法进行更为方便：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{1}{x_2^2+y_2^2}(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

如果复数用向量来表示，那么复数的加、减运算法则恰恰与用来表示复数的向量的加、减法则相同。因此我们可以借助于向量的平行四边形法则来计算复数的加、减法，如图3-3所示。

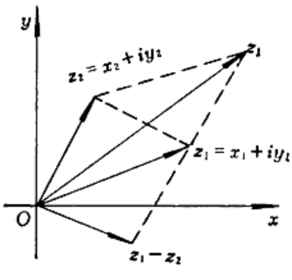

图 3-3

根据模的定义，有

$$|z_2-z_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

这恰是平面上z_1与z_2两点的距离公式。因此，复平面上两点z_1，z_2间的距离可用$|z_2-z_1|$表示。又根据三角形的两边之和大于第三边，以及任意一边大于另外两边之差，得到如下两个不等式

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$$

前一个不等式可以推广为

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|z_k|$$

读者可以自己证明以下的公式：

$$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}z \qquad z-\bar{z}=2i\mathrm{Im}z \quad z\cdot\bar{z}=|z|^2$$

$$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2 \qquad \overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2 \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

容易证明，实数四则运算规律（交换律、结合律、分配律）也适用于复数。

现在我们来讨论复数的乘方与开方运算法则。

设有两个复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$；$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

那末
$$z_1\cdot z_2=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

由此可见
$$|z_1\cdot z_2|=|z_1||z_2|$$
$$\mathrm{Arg}(z_1\cdot z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2\text{❶}$$

同理可推得
$$z_1\cdot z_2\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]$$

即
$$|z_1z_2\cdots z_n|=|z_1||z_2|\cdots|z_n|=\prod_{k=1}^{n}|z_k|$$

$$\mathrm{Arg}(z_1\cdot z_2\cdots z_n)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2+\cdots+\mathrm{Arg}z_n=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Arg}z_k$$

若令 $z_1=z_2=\cdots=z_n=z=\cos\theta+i\sin\theta$，则有
$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

这就是De Moivre公式。

仿此可证明
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2\neq 0)$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2$$

利用复数的三角表示法和De Moivre公式，可以得到复数开方的简单法则。设$w^n=z$，称w为z的n次根，记为$w=\sqrt[n]{z}$。

令 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，则有
$$\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

于是有
$$\rho^n=r,\ n\varphi=\theta+2k\pi \ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

由此得到
$$\rho=r^{\frac{1}{n}}, \qquad \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}$$

所以，
$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

在上式中，当$k=0$，1，2，…，$n-1$时，得到$w=\sqrt[n]{z}$的n个相异的根w_0，w_1，

❶ 在有关幅角的公式中，由于一个复数z的幅角有无穷多个值，因此要这样理解：$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$表示，每指定$\mathrm{Arg}z_1$及$\mathrm{Arg}z_2$各一个值时，$\mathrm{Arg}(z_1z_2)$的无穷多个值中总有一个等于$\mathrm{Arg}z_1$与$\mathrm{Arg}z_2$两个指定值之和，其它关于幅角的公式与此相仿对待。

…，w_{n-1}，当k以其他值代入上式时，这些根又重复出现。例如，当$k=n$时，

$$w_n=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2n\pi}{n}\right)=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)=w_0$$

例 1 解方程 $z^4=1+i$。

解

$$z=\sqrt[4]{1+i}$$

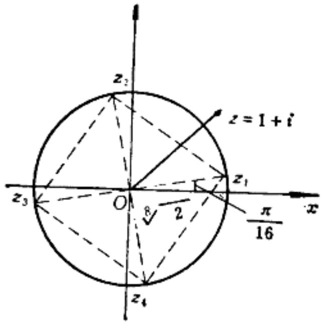

图 3-4

因为
$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

所以
$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

所以方程的根有以下四个：

$$z_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)\qquad z_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9}{16}\pi+i\sin\frac{9}{16}\pi\right)$$

$$z_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17}{16}\pi+i\sin\frac{17}{16}\pi\right)\qquad z_4=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25}{16}\pi+i\sin\frac{25}{16}\pi\right)$$

且这四个根均在以原点为中心，$\sqrt[8]{2}$为半径的圆周上（图3-4）。

二、复变函数

1. 区域

复平面上以z_0点为中心，δ（>0）为半径的圆的内部所有点的集，即满足

$$|z-z_0|<\delta$$

的z点的集称为z_0的δ**邻域**（图3-5）。

z平面上满足下列条件的点集D，称为一个**区域**。即D的每一点都有一个邻域全属于D。其次，D中任何两点，都可以用完全属于D的一条折线连接起来。

如果一个区域D可以包含在一个以原点为中心的圆里面，那末D称为**有界的**，否则称为**无界的**。设P点不属于D，而在P点的任意小的邻域内总包含D中的点，这样的点P我们称为D的**界点**，所有界点组成D的边界。由区域D及其边界所组成的点集称为闭区域，记作$\overline{D}$。

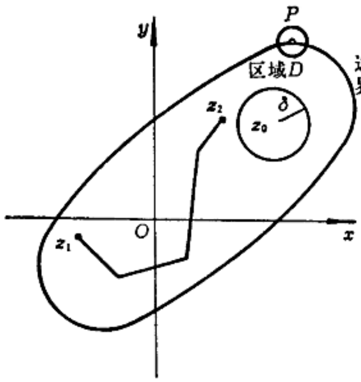

图 3-5

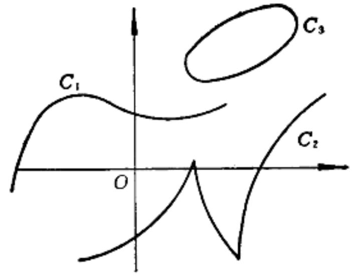

图 3-6

如果设$x(t)$和$y(t)$是两个连续实函数，则方程组

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \quad a\leqslant t\leqslant b$$

可表示xOy平面上一条连续曲线。令$z(t)=x(t)+iy(t)$，则由上式所代表的曲线就可以用一个方程$z=z(t)$，$t\in[a, b]$来表示。又如$x(t)$与$y(t)$在$t\in[a, b]$时有导数，则规定$z(t)$的导数为$z'(t)=x'(t)+iy'(t)$，设$x'(t)$与$y'(t)$对于t连续且对t的每一值，有$z'(t)\neq 0$；那末，称这条曲线为**光滑**的。由有限段光滑曲线所组成的曲线称为**逐段光滑曲线**（图3-6）。

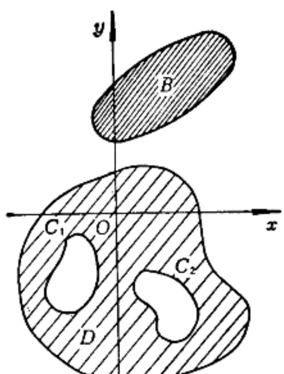

图 3-7

一条逐段光滑的连续曲线$z=z(t)$，$t\in[a, b]$；如当$t_1\neq t_2$ t_1、$t_2\in(a, b)$时，必有$z(t_1)\neq z(t_2)$，但$z(a)=z(b)$，则称此曲线为**简单闭曲线**（如图 3-6 的曲线 C_3）。一条简单闭曲线C将平面分为两个区域，其中一个是有界的，称为C的**内部**；另外一个无界的称为C的**外部**。

一个区域中任一简单闭曲线的内部总属于此区域，就称这个区域为**单连域**。有界的，单连域的边界是一条简单闭曲线（如图 3-7 的B域）。一个区域，如果不是单连域，就称为**复连域**（如图3-7的D域）。

例 2 试描出下列不等式所确定的区域：

（1）$|z-1|\leqslant|z+1|$；（2）$1\leqslant\arg z\leqslant 1+\pi$；（3）$3\leqslant|z|\leqslant 5$

解 （1）因为$|z-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$；$|z+1|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$，所以有

$$(x-1)^2+y^2\leqslant(x+1)^2+y^2$$

$$4x\geqslant 0，x\geqslant 0，或\mathrm{Re}z\geqslant 0$$

因此得到包含虚轴在内的右半平面。

（1）、（2）、（3）式所确定的区域如图3-8(a)、(b)、(c)。

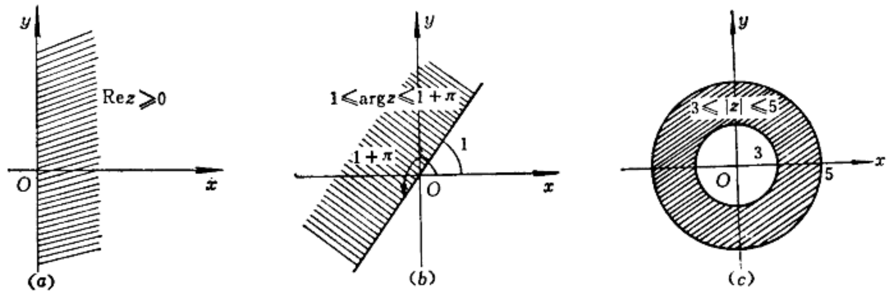

图 3-8

有了区域的概念，我们就可讨论复变函数了。

2. 复变函数

定义 2 对复平面上某个区域D上的每一个复数区，按一个确定的规则确定一个数$w=u+iv$，则称w为z的**函数**，也称为**复变函数**，记作$w=f(z)$。z称为**自变量**，w也称为**因变量**。D称为这个函数的**定义域**。若z的一个值对应两个或两个以上的w值，就称$w=f(z)$是z的**多值函数**。对应于D中的所有z的一切w值所构成的集G称函数$f(z)$的**值域**。

由于给定了复数$z=x+iy$就相当于给定了两个实数x和y，而数$w=u+iv$亦同样地对应着一对实数u和v；因此，每给定一对实数x，y，就对应一对实数u和v，所以复变函数w和自变量z之间的关系$w=f(z)$相当于下面的两个关系式

$$u=u(x,\ y);\quad v=v(x,\ y)$$

u，v分别是x，y的二元实函数。因此

$$f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$$

并称$u(x,\ y)$为$f(z)$的**实部**，$v(x,\ y)$为$f(z)$的**虚部**。反之任意给出两个二元实函数$u(x,\ y)$与$v(x,y)$，写成$u(x,\ y)+iv(x,\ y)$的形式，就得到一个复变函数。不过，我们今后所研究的并不是由两个随意的二元实函数联系起来的一般复变函数，而是满足一定条件的$u(x,y)$，$v(x,\ y)$所构成的复变函数，即所谓解析函数。下节将进一步讨论它们。

例 3 求复变函数$w=z^2$和$w=\dfrac{1}{z}$的实部$u(x,y)$和虚部$v(x,y)$。

解 （1）$z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i(2xy)$

所以
$$u(x,y)=x^2-y^2;\quad v(x,y)=2xy$$

这里的函数z^2的定义域是整个z-平面，

（2）$$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$$

所以
$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2};\quad v(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

函数$\dfrac{1}{z}$的定义域是除去原点的z-平面。

3. 复变函数的几何意义

复变函数$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$描述了两对变量u，v和x，y之间的关系。所以，复变函数的几何描述则需要在两个复平面之间进行。一个平面z-平面用来表示自变量$z=x+iy$的变化范围，另一个平面w-平面则用来表示因变量$w=u+iv$的变化范围。z平面上定义域D内一点z，对应函数$w=f(z)$在w平面上一个点w。点w叫做点z的**映象**(又称**象点**)。如果点z在z平面上沿一条曲线运动，则象点w在w平面上运动也有一定的轨迹。

例 4 设有函数$w=z^2$，问

（1）将z平面上的矩形域(由$x=1$，$y=1$与两坐标轴围成的映射到w平面上是什么域？

（2）将z平面上的双曲线族，$x^2-y^2=c_1$及$xy=c_2$映射到w平面上是什么样的图形？

解 （1）因为$w=u+iv=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i(2xy)$

于是
$$u(x,y)=x^2-y^2;\ v(x,y)=2xy$$
由题设知，z平面上区域D为：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$；为了求得w平面上区域G，我们计算G的边界如下：

当$x=0$，$0\leqslant y\leqslant 1$，代入u，v得$-1\leqslant u\leqslant 0$，$v=0$

当$x=1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，代入u，v得$u=1-y^2$，$v=2y$；消去y，得

$u=1-\left(\dfrac{v}{2}\right)^2 (0\leqslant v\leqslant 2)$

又当$y=0$，$0\leqslant x\leqslant 1$，代入u，v得$0\leqslant u\leqslant 1$，$v=0$

$y=1$，$0\leqslant x\leqslant 1$，代入u，v得$u=x^2-1$，$v=2x$；消去x，得$u=\left(\dfrac{v}{2}\right)^2-1$，$(0\leqslant v\leqslant 2)$

所以，w平面上区域G边界由曲线：$v=0$，$u=1-\left(\dfrac{v}{2}\right)^2$，$u=\left(\dfrac{v}{2}\right)^2-1$组成。(图3-9)。

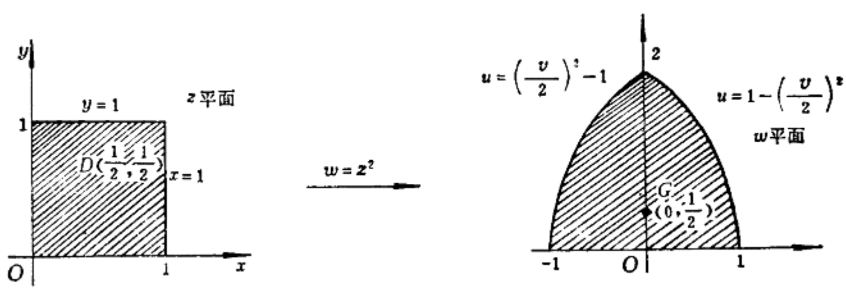

图 3-9

又知z-平面上正方形中心$x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$变成$u=0$，$v=\dfrac{1}{2}$，由函数的连续性可知，

$w=z^2$将图3-9的正方形区域D映射成w-平面上的区域G。

（2）由（1）可以看出z-平面上双曲线族$x^2-y^2=c_1$，$xy=c_2$的映像分别由$u=c_1$和$v=2c_2$来表示。它们分别表示w平面上的平行于y轴和x轴的直线族(图3-10)。

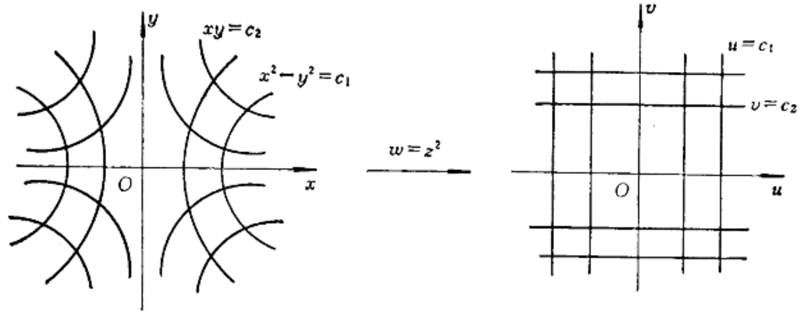

图 3-10

三、复变函数的极限与连续

极限概念是数学分析的基础。我们知道，所谓实数序列x_n的极限是x_0，是指当$n\to\infty$时，$|x_n-x_0|\to 0$。与此相仿，对复数序列z_n的极限，可以这样考虑：当$n\to\infty$时，复数z_n-z_0的模$|z_n-z_0|\to 0$，就说$n\to\infty$时数列z_n以z_0为**极限**，记为$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$。设$z_n=x_n+iy_n$，$z_0=x_0+iy_0$，则$z_n-z_0=(x_n-x_0)+i(y_n-y_0)$。显然，$|x_n-x_0|$，$|y_n-y_0|\leqslant|z_n-z_0|\leqslant|x_n-x_0|+|y_n-y_0|$。从而看出，如果$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$，则必有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$。反之，从后两个结果也可得出前一结果。

和实变函数时相仿，可以给出复变函数极限的ε-δ定义。

定义 3 设函数$w=f(z)$定义在z平面的区域D上，若z_0为D的一个点，而A为一复数。对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得D上的点z只要满足$0<|z-z_0|<\delta$，就有$|f(z)-A|<\varepsilon$则称$f(z)$当z趋于z_0时，**有极限**A，并记作

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A$$

在上述极限定义中，若当$A=f(z_0)$时，我们说复变函数$w=f(z)$在点z_0处是**连续**的。如果$f(z)$在区域D上处处连续，我们就说$f(z)$在D上连续。

复变函数的极限与连续性，是实函数的极限和连续性的推广。数学分析里有关函数的极限与连续的性质一般均可推广到复变函数中来。

设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$；$A=u_0+iv_0$；$z_0=x_0+iy_0$；则

$$f(z)-A=(u(x,y)-u_0)+i(v(x,y)-v_0)$$

所以由一中2段末得到

$$|u-u_0|,\quad |v-v_0|\leqslant|f(z)-A|\leqslant|u-u_0|+|v-v_0|$$

又由前述得知，$z\to z_0$与$x\to x_0$，$y\to y_0$是一回事，从上边的不等式可以得知，如果$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=u_0$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=v_0$；反之，后两式成立，则前一式必成立。即$f(z)$以$A$为极限与$\mathrm{Re}f(z)$以$\mathrm{Re}A$，$\mathrm{Im}f(z)$以$\mathrm{Im}A$为极限是一回事。

和实函数情况相仿，有以下的极限定理。

定理 如果$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$；$\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$，那末

（1）$\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$

（2）$\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)]=A\cdot B$

（3）$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$

这些关系式与实函数一样，可以从定义出发来证明；也可以利用函数极限与实部和虚部极限的关系来证明，读者可以自己试一下。

相仿地可以证明，复变函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在$z_0=x_0+iy_0$。连续与实变函数$u(x,y)$，$v(x,y)$在点(x_0,y_0)连续是一回事。

与实函数情形相仿，可证明,连续函数的和、差、积、商(分母不为0)仍为连续函数。连 续 函数的复合函数仍为连续函数。

作为以上内容的推论，我们得到

有理整函数(多项式)

$$w=P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$$

对所有的z都是连续的。而有理分函数

$$w=\frac{P(z)}{Q(z)}\ (P(z),\ Q(z)\text{均为多项式})$$

在分母不为0的点也是连续的。

和实函数的情形相仿，有以下的结论。

有界闭区域$\overline{D}$上的连续函数$f(z)$的模$|f(z)|$在$\overline{D}$上有界，并且达最大值与最小值。

这个结论可以这样证明：二元连续函数$u(x,y)$，$v(x,y)$构成的$[u(x,y)]^2+[v(x,y)]^2=|f(z)|^2$在有界闭域上有界且达到最大、最小值。因此，$|f(z)|$也有界且一定在$\overline{D}$上达到最大值与最小值。

习　　题

1．设$z=\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{i^2}$，求$\mathrm{Re}\,z$，$\mathrm{Im}\,z$，$|z|$。

2．当x，y等于什么实数值时，等式$\dfrac{(x+1)+i(y-3)}{5+3i}=1+i$成立?

3．将下列复数表示为向量形式、三角形式及指数形式

（1）i；（2）-1；（3）$-i$；（4）$1+i\sqrt{3}$；（5）$1-\cos\theta+i\sin\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$。

4．一个复数乘以i，问它的模与幅角有何改变?

5．证明：若$z_1+z_2+z_3=0$，且$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，则点z_1，z_2，z_3是内接于中心在原点，半径为1的圆周的正三角形的顶点。

6．描出下列不等式所确定的区域，并指明是有界的还是无界的，闭的还是开的。

（1）$\mathrm{Im}z>0$；（2）$|z-1|>4$；（3）$0\leqslant\mathrm{Re}z\leqslant 1$；

（4）$|z-1|<4|z+1|$；（5）$z\overline{z}-(2+i)z-(2-i)\overline{z}\leqslant 4$。

7．作出下列方程所表示的曲线

（1）$|z-1|=2$；（2）$\mathrm{Re}(z^2)=a$（a为实常数）；

（3）$|z-a|+|z-b|=c$　（a，b，c为实常数，且$c>0$）。

8．作出下列方程所表示的曲线（t为实参数）

（1）$z=t(1+i)$；（2）$z=a\cos t+ib\sin t$（a，b为实常数）

（3）$z=t+\dfrac{i}{t}$；（4）$z=t^2+\dfrac{i}{t^2}$。

9．函数$w=\dfrac{1}{z}$把z平面上的如下曲线变成w平面上什么样的曲线？

（1）$x^2+y^2=4$；（2）$y=x$；（3）$x=1$；（4）$y=0$；（5）$(x-1)^2+y^2=1$。

10．证明：

（1）$1+z+z^2+\cdots+z^n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$

（2）$1+\cos\theta+\cos2\theta+\cdots+\cos n\theta=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}$

（3）$\sin\theta+\sin2\theta+\cdots+\sin n\theta=\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}$

第二节　解　析　函　数

以下研究复变函数中主要的一类函数——解析函数；它在解决实际问题中起着重要的作用。

一、复变函数的导数

设$w=f(z)$是区域D上的一个复变函数，点$z_0\in D$，比$\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$当$z\to z_0$时有极限值$A$，即

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=A$$

则称A是函数$f(z)$在点$z_0\in D$处的**导数**，记作$f'(z_0)$，或者$\left.\dfrac{df(z)}{dz}\right|_{z=z_0}$。

一般地，函数$w=f(z)$在任意点z处的导数可以写成

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\qquad（这里z+\Delta z\in D）$$

如果函数$f(z)$在区域D上处处有导数，则我们说$f(z)$在区域D上**可微**。可以和实函数情况相仿地证明，当函数$f(z)$在z_0点有导数时，此函数在该点一定是连续的。

由复变函数$w=f(z)$在点z处的导数定义

$$\lim_{\Delta z\to0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=f'(z)$$

我们有 $$\frac{\Delta w}{\Delta z}=f'(z)+\alpha$$

这里 α 随 Δz 趋于零而趋于零。从上式可以得到

$$\Delta w=f'(z)\Delta z+\alpha\Delta z$$

如同实函数一样，我们把 $f'(z)\Delta z$ 称作函数 $f(z)$ 的**微分**，当 $f'(z)\neq 0$ 时 $\frac{\alpha\cdot\Delta z}{f'(z)\Delta z}$ 在 $\Delta z\to 0$ 时趋于零，因此 $f'(z)\Delta z$ 是 $\Delta w\to 0$ 这个无穷小量的主部，$\alpha\Delta z$ 是 Δz 的高阶无穷小量。$w=f(z)$ 的微分记为 dw 即

$$dw=f'(z)dz$$

如果设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$；$f'(z_0)=a+ib$，$\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$，于是

$$\begin{aligned}\Delta u+i\Delta v&=(a+ib)(\Delta x+i\Delta y)+(\alpha_1+i\alpha_2)(\Delta x+i\Delta y)\\&=(a\Delta x-b\Delta y+\alpha_1\Delta x-\alpha_2\Delta y)+i(b\Delta x+a\Delta y+\alpha_2\Delta x+\alpha_1\Delta y)\end{aligned}$$

从而得到

$$\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+\alpha_1\Delta x-\alpha_2\Delta y$$
$$\Delta v=b\Delta x+a\Delta y+\alpha_2\Delta x+\alpha_1\Delta y$$

因为 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha=0$，所以 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha_1=0$；$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha_2=0$，因此得知，如果 $f(z)$ 在 z_0 可微，那末 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 均可微❶。

复变函数导数的定义与实函数导数的定义在形式上完全一样，在微积分学中讨论过的有关导数计算的一些法则和公式如导数的四则运算法则、复合函数及反函数求导公式等，都能照搬到复变函数中来。我们将这些法则和公式陈述如下：

设 $f(z),g(z)$ 在区域 D 上是可微的，则有

（1）$[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z)$

（2）$[f(z)\cdot g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$

（3）$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}\quad(g(z)\neq 0)$

（4）$\{f[g(z)]\}'=f'(w)g'(z)$　其中 $w=g(z)$

（5）$f'(z)=\frac{1}{\varphi'(w)}$　其中 f 与 φ 是两个互为反函数的单值函数且 $\varphi'(w)\neq 0$。

我们说复变函数导数的定义与实函数导数的定义在形式上完全一样，但是实函数的导数有明确的物理意义和几何意义，代表变化率和切线的斜率，而复变函数的导数却不易直观看出它的意义，对此以后另有专门的论述。另一方面我们还应特别注意，由于在复变函数的导数定义中，动点 $z+\Delta z$ 变到点 z（即 $\Delta z\to 0$）的方式是任意的，也就是说它可以沿任何途径以任何方式趋向于点 z。这表明复变函数可微的条件要比实函数可微的条件要求高。这就带来了复变函数理论的不少独特性质与应用。

❶二元函数 $\varphi(x,y)$，当 x，y 都有增量 Δx，Δy 时，$\varphi(x,y)$ 的增量 $\Delta\varphi=\varphi(x+\Delta x,y+\Delta y)-\varphi(x,y)$ 可写成 $\Delta\varphi=A\Delta x+B\Delta y+\rho(\Delta x,\Delta y)$，$A$、$B$ 是两个与 Δx、Δy 无关的数，而 $\rho(\Delta x,\Delta y)$ 是 Δx，$\Delta y\to 0$ 时对于 $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 的高阶无穷小，即 $\Delta x,\Delta y\to 0$ 时 $\rho(\Delta x,\Delta y)/\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$，则称 $\varphi(x,y)$ 在 x，y 点可微分或可微，这时 $A=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$，$B=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$。