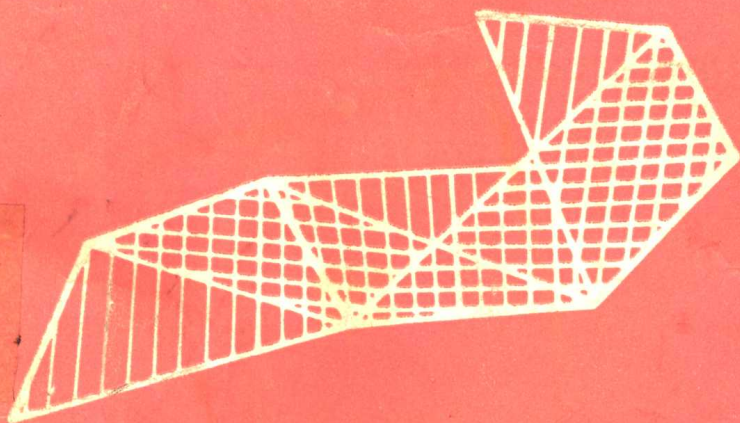


高等学校教材

计算机辅助 几何设计的数学方法

张永曙 等编著



西北工业大学出版社

高等学校教材

计算机辅助几何设计 的数学方法

张永曙 刘克轩 蒋大为 编著

西北工业大学出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了计算机辅助几何设计的各种数学方法, 如圆锥曲线法, Bézier 法, B 样条法, 参数有理曲线、曲面法, Coons 曲面法, 有理 B 样条法, Beta 样条法等等, 并且阐述了各种方法的优点和不足之处。推导详细, 便于阅读。本书可作为应用数学、计算机辅助设计与制造等专业的教材, 并可供从事计算机辅助设计与制造的广大科技人员学习参考。

高 等 学 校 教 材

计算机辅助几何设计的数学方法

张永曙 刘克轩 蒋大为 编著

责任编辑 刘彦信 郭生儒

*

西北工业大学出版社出版

(西安市友谊西路 127 号)

陕西省新华书店发行

西北工业大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 11.5 243 千字

1986 年 8 月第一版 1986 年 8 月第一次印刷

印数 0001—6000 册

统一书号: 13433·032 定价: 1.90 元

前 言

本书初稿曾在西北工业大学应用数学专业讲授过多次，出版前作了较大的修改和补充。

本书系统地介绍了计算机辅助几何设计用的圆锥曲线法，Bézier法，B样条法，参数有理曲线、曲面法，Coons曲面法以及近些年才发展起来的有理B样条法和Beta样条法等。简要地介绍了各种方法产生的渊源，指出了它们的优点和不足之处及使用时应注意的问题。各章还列举了一些实例，并配备了练习题。这是一本实用性很强的教学用书。为了便于广大工程技术人员阅读，对各种方法都作了较详细的阐述和推导。本书可作为应用数学、计算机辅助设计与制造等专业的教材，也可供从事计算机辅助设计与制造的广大科技人员参考。

本书由张永曙同志主编，刘克轩、蒋大为两位同志分别编写了第三章和第四章。北京航空学院李心灿副教授对全书进行了详细的审阅，并提出了许多宝贵意见，在此谨表示衷心的感谢。

由于水平所限，书中缺点错误在所难免，请读者批评指正。

本书的编著得到了中国科学院科学基金的资助。

作 者

一九八六年二月

目 录

第一章 引论..... 1

- § 1 什么是计算机辅助几何设计 (1)
- § 2 计算机辅助几何设计的数学方法及其特点 (2)
- § 3 计算机辅助几何设计与计算几何 (6)

第二章 圆锥曲线法..... 7

- § 1 圆锥曲线的隐式和显式方程 (7)
- § 2 决定一条圆锥曲线的条件 (10)
- § 3 圆锥曲线的参数方程 (25)
- § 4 圆锥曲线法应用示例 (36)

习题..... 40

第三章 样条函数..... 43

- § 1 样条函数概念 (43)
- § 2 代数多项式样条函数 (44)
- § 3 三角样条函数 (86)
- § 4 张力样条函数 (90)
- § 5 B样条函数及其性质 (95)
- § 6 参数三次样条 (103)
- § 7 二元样条函数简介 (107)
- § 8 基线用样条型曲线的应用示例 (112)

习题..... 115

第四章 贝齐尔方法 116

- § 1 引言 (116)
- § 2 贝齐尔曲线的定义与表达式 (117)
- § 3 基函数族 $\{f_{ni}(t)\}_1^n$ 的性质 (118)
- § 4 贝齐尔曲线的性质 (124)
- § 5 几个例子 (132)
- § 6 贝齐尔曲线的伯恩斯坦表示法 (135)
- § 7 伯恩斯坦—贝齐尔曲线的性质 (137)
- § 8 贝齐尔曲线的几何作图法 (143)
- § 9 贝齐尔样条曲线 (148)
- § 10 贝齐尔曲面 (149)
- § 11 贝齐尔方法应用示例 (157)

习题 168

第五章 B 样条方法 166

- § 1 等距 B 样条函数的矩阵表示 (167)
- § 2 B 样条曲线的定义 (171)
- § 3 B 样条基函数的又一推导方法 (172)
- § 4 B 样条基函数的性质 (174)
- § 5 三次 (四阶) B 样条曲线的性质 (175)
- § 6 B 样条曲线的优点 (180)
- § 7 用 B 样条曲线作插值曲线 (185)
- § 8 双三次 B 样条曲面 (188)
- § 9 用 B 样条曲面逼近单位球面 (194)
- § 10 非等距 B 样条曲线和曲面 (197)

习题 198

第六章 参数有理曲线、曲面法 200

- § 1 齐次坐标 (200)
- § 2 巴尔(Ball)参数三次曲线段 (201)
- § 3 巴尔参数有理三次曲线段 (204)
- § 4 贝齐尔参数有理三次曲线段 (211)
- § 5 用参数有理三次曲线逼近单位圆周 (214)
- § 6 参数有理三次曲线的特殊形式 (216)
- § 7 参数有理三次样条曲线 (226)
- § 8 参数有理双三次曲面 (227)
- § 9 参数有理B样曲线、曲面 (236)

习题 246

第七章 孔斯曲面法 247

- § 1 曲线、曲面表示法与记号 (248)
- § 2 孔斯曲面片的定义及分类 (251)
- § 3 边界信息的确定 (268)
- § 4 混合函数的建立 (274)
- § 5 孔斯双三次曲面 (277)
- § 6 具有 C^2 连续的孔斯双三次曲面 (282)
- § 7 不含角点扭矢的双三次曲面 (287)
- § 8 用孔斯双三次曲面逼近单位球面 (298)

习题 304

第八章 含有任意参量的参数曲线和曲面 305

- § 1 含有任意参量的参数三次曲线段及其特性 (305)
- § 2 含有任意参量的参数有理三次曲线段及其特性 (308)

§ 3 含有任意参量的参数双三次曲面片	(310)
§ 4 孔斯双三次曲面片角点扭矢的几何解释	(312)
§ 5 含有任意参量的参数有理双三次曲面片	(316)
§ 6 Beta 样条曲线和曲面	(318)

习题	323
----------	-----

第九章 参数三次曲线的形状分析..... 324

§ 1 参数三次曲线的拐点和奇点	(324)
§ 2 参数三次曲线段含有一个拐点, 或两个拐点, 或一个尖点, 或一个二重点的充要条件	(331)
§ 3 例子	(336)
§ 4 参数三次曲线段的端点切矢对曲线形状的影响 ...	(338)

习题	356
----------	-----

主要参考文献	357
--------------	-----

第一章 引 论

§ 1 什么是计算机辅助几何设计

一九四六年世界上诞生了第一台电子计算机。电子计算机的出现，标志着技术革命的又一个新时代的开始。从计算机的应用看，第一代计算机主要用于科学计算。但随着电子计算机的不断发展、更新和社会需要的推动，计算机逐渐应用到产品的设计与制造领域。至六十年代中期已开始借助计算机来辅助产品的设计与制造，将设计与制造紧密地结合到一起。在国外，把这种新技术称为 CAD/CAM (Computer Aided Design 与 Computer Aided Manufacture 之缩写) 即计算机辅助设计与计算机辅助制造。在我国，称为“设计制造一体化”。

CAD/CAM 技术的范围非常广泛，借助计算机可以辅助许多种工业产品的设计与制造。例如，可以辅助飞机、船舶、汽车、建筑、机电、计算机等等的设计与制造。而且就一种工业来说，其所包含的内容也是十分广泛的。比如，以飞机工业为例，CAD/CAM 技术包含的内容有：飞机总体方案的优选、气动性能分析、结构强度计算、外形设计计算、操纵、燃油、救生等系统的设计、数控绘图、数控加工、数控测量以及生产计划、仓库管理、订货销售等方面。它涉

及几种不同的领域。有与力学有关的气动强度分析，有与几何有关的外形和结构的设计与制造，有与自动控制有关的生产过程的控制，有与经济活动有关的企业管理等几个方面。把其中与几何性质有关的设计与制造作为 CAD/CAM 的一个分支来研究，这就是 CAGD (Computer Aided Geometric Design) /CAM 即计算机辅助几何设计与计算机辅助制造。详细一点说，用较少量的几何信息（定义曲线、曲面的点、切矢、二阶导矢等等）描述飞机几何外形，建立飞机几何外形的数学模型，再以此数学模型为基础，通过电子计算机计算飞机各个部件、零构件的外形数据和结构参数，将这些数据和参数转化成一连串数值信息存贮在电子计算机的相应数据库内，供尔后设计与制造的各有关部门调用，这个过程就是飞机的计算机辅助几何设计（CAGD）。飞机制造部门通过各种指令及程序调用存贮在电子计算机数据库内的上述信息，自动编制数控带，并以此由绘图机绘制模线，由数控机床加工样板、工艺装备和飞机零件等，这个过程就是飞机的计算机辅助制造（CAM）。从上面的整个过程可以看出，飞机的计算机辅助几何设计与制造（CAGD/CAM）是密切联系在一起的，是一个有机的整体。显然，在这个整体中，电子计算机是中心辅助手段，而全机的外形数学模型则是基础。

§ 2 计算机辅助几何设计的数学方法及其特点

用计算机辅助飞机、船舶、汽车及复杂机械零件等产品的几何外形设计，就是要建立产品几何外形的数学模型，并

通过计算机对产品外形进行描述、修改和控制。要建立产品几何外形的数学模型，关键是要有合适的用来描述产品外形的数学方法。飞机、船舶、汽车等都具有特定要求的几何外形。过去，解析几何、微分几何主要是研究已给曲线或曲面（它们的方程已知）的几何性质，对于如何设计具有特定形状的曲线、曲面帮助不大。因此，需要寻求新的适合于计算机描述的曲线、曲面的数学表达方法。这种方法应具有以下一些特点：

第一，它应是用尽可能少的几何信息来定义具有任何形状的曲线、曲面（以后称其为自由型曲线、曲面），并且这些几何信息要易于由用户提供。

第二，计算机辅助几何设计一般是在与计算机相联的图象仪上进行的，因此，用几何信息定义的曲线、曲面要容易自动地在图象仪上显示，并能方便地改变原始输入信息，以便对初始曲线、曲面进行修改、控制，使构造出的曲线、曲面符合设计要求。

第三，这种数学方法要既能适合于在与计算机相联的图象仪上进行自由型曲线、曲面的设计，又能在没有显示设备的情况下，对现有的曲线、曲面进行插值或拟合。

自从六十年代中期提出用计算机辅助几何设计以来，符合上述要求的描述自由型曲线、曲面的各种数学方法相继产生，并且在短短的二十年中有了很大的发展。我国从七十年代中期开始 CAGD 和 CAM 方法的研究和应用工作。目前在飞机、造船等工业中已较普遍地采用了这项新技术，并且在短短的十年中，在数学方法研究和应用等方面均已取得了许多可喜的成果。

本书以后各章将系统地介绍计算机辅助几何设计的各种数学方法，即表达自由型曲线和曲面的数学方法。

在早朝，自由型曲线的设计，一般采用圆锥曲线。五十年代以来，逐渐用各种样条函数曲线，特别是多项式样条函数曲线代替了圆锥曲线。

关于自由型曲面的构作方法，目前通常有两种：母线法和曲面法。

母线法是把产品的几何外形看作是一个曲面或是由若干个小的曲面按一定的连续阶要求拼接而成。根据“线动成面”的原理，每个小的曲面又看作是以若干条曲线为基线（或称控制线）和一条按某种规律定义的动线（通常称为母线）沿各基线上的对应点连续运动时所扫描出来的曲面（图1-1）。基线和母线原则上可以采用各种类型的连续曲线。例如，可以同时采用圆锥曲线或样条型曲线，也可以基线采用样条型曲线，母线采用圆锥曲线等等。

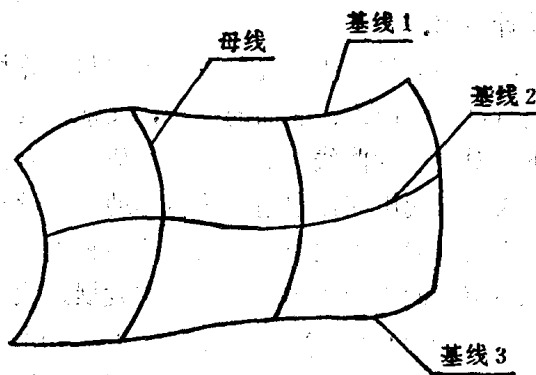


图 1-1

例如，对于飞机机翼几何外形，通常取两个基准翼型作

为基线，然后在这两条基线上的对应点拉直线，此直线即是母线。当母线沿两基线的对应点连续运动时，所扫描出来的曲面便是机翼表面（图 1-2）。这种母线为直线的曲面称为直母线曲面或直纹面。

又如，对于飞机机身几何外形，通常先把机身表面按纵向线（上、下顶点线和最大宽度线等）和横向线（垂直机身轴线的平面与机身表面的交线）划分为若干片，划分的原则是使每片中横截线的构成规律相同。然

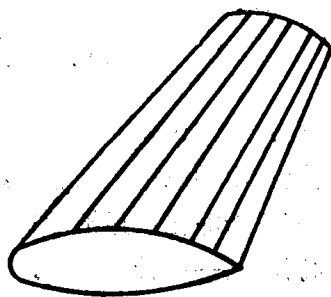


图 1-2

后对于每一曲面片，取纵向线为基线，横向线为母线，当横向线沿纵向线对应点运动时便扫描出机身表面。在飞机机身外形设计中，上、下顶点线和最大宽度线等，通常给出的是一组离散的数据点，横向线常给出的是它的构成规律，如由多段圆弧组成或由直线与圆锥曲线段组成，等等（图 1-3）。

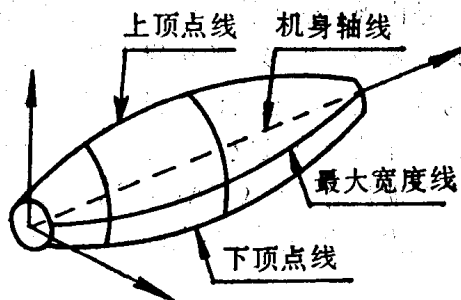


图 1-3

曲面法也是把产品外形看作是一个曲面或是由若干个小曲面按一定的连续阶要求拼接而成，但每个曲面方程由边界信息或控制多面体的顶点直接构成。

§ 3 计算机辅助几何设计与计算几何

自六十年代中期以来，随着现代业工的发展，计算机在几何设计中的应用愈来愈多，计算机辅助几何设计数学方法的研究不断深化，逐渐形成了具有自己的独特特点和研究领域的新学科——计算几何。一九七四年在美国召开的第一届CAGD国际会议上确认了这门新兴的学科。所谓计算几何就是用计算机来表示、分析和综合任何几何外形信息并用计算机进行控制的学科。这里所说的几何外形信息是指那些定义曲线、曲面的点、切矢、扭矢、特征多边形等等。按照这些几何信息构作曲线、曲面的数学模型存贮于计算机中，这就是计算机表示。用计算机控制就是控制曲线、曲面的形态，使构作的曲线、曲面符合设计要求，如曲线不出现多余的拐点、奇点，曲面保凸等等。

计算几何是由函数逼近论、微分几何、代数几何、计算数学，特别是数控技术等形成的边缘学科。应用计算几何建立产品外形的数学模型，通过计算机对产品外形进行描述、修改和控制，从而使计算机成为设计人员的得力助手，这就形成了计算机辅助几何设计(CAGD)。由此可见，本书与“计算几何”在内容上是没有多大的差别的。

第二章 圆锥曲线法

在飞机工业中，早在四十年代采用“模线样板、标准样件”工作方法时，就使用了圆锥曲线作图法。但当时由于计算工具比较落后，还没有能够用圆锥曲线来描述飞机外形。到了五十年代，由于已经有了电子计算机，使得用数学方法来描述飞机外形成为可能，而圆锥曲线简单、直观，没有拐点，保凸性好，又为设计人员所熟知，所以，那时国外不少飞机公司在建立飞机外形数学模型时，主要采用圆锥曲线，并且有的公司至今仍以圆锥曲线为主。

用圆锥曲线描述飞机外形，主要见于母线法中。在母线法中，若基线和母线都采用圆锥曲线，则称为圆锥曲线法。

§ 1 圆锥曲线的隐式和显式方程

圆锥曲线，对于学过平面解析几何的读者来说，是比较熟悉的。但是本章还要对圆锥曲线作较详细的讨论。这不仅因为在用母线法构作曲面时圆锥曲线占有重要的地位，更主要的是，我们在这里讨论的着眼点不同。在平面解析几何中，主要是用代数方法研究给定的二元二次方程所表示的几何图形的形状和性质。在这里，我们主要讨论：根据给定的几何条件，如何建立圆锥曲线的方程。这正是计算机辅助几何设计的特点。

§1.1 隐式方程

在平面解析几何中，我们已经知道，圆锥曲线的一般方程是

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2-1)$$

其中系数 A, B, C, D, E, F 为实常数，且 A, B, C 不同时为零。

(2-1) 式称为圆锥曲线的隐式方程。

令 $\Delta = B^2 - 4AC$ (2-2)

称上式为二元二次方程 (2-1) 的判别式。由解析几何知道：

当 $\Delta < 0$ 时，(2-1) 式为椭圆型曲线（包括圆、点椭圆和虚椭圆）；

$\Delta = 0$ 时，(2-1) 式为抛物型曲线（包括两平行直线和虚直线）；

$\Delta > 0$ 时，(2-1) 式为双曲型曲线（包括两相交直线）。

§1.2 显式方程

在 (2-1) 式中

1. 设 $A^2 + C^2 \neq 0$

若 $C \neq 0$ ，将 (2-1) 式就 y 解出，得

$$y = Px + Q \pm \sqrt{Rx^2 + Sx + T} \quad (2-3)$$

其中

$$P = -\frac{B}{2C}, \quad Q = -\frac{E}{2C}, \quad R = \frac{B^2 - 4AC}{4C^2} = P^2 - \frac{A}{C}$$

$$S = \frac{2BE - 4CD}{4C^2} = 2PQ - \frac{D}{C},$$

$$T = \frac{E^2 - 4CF}{4C^2} = Q^2 - \frac{F}{C} \quad (2-4)$$

若 $A \neq 0$ ，也可将(2-1)式就 x 解出，得到类似于(2-3)的方程，因此，只要 A 、 C 不同时为零，总可以将(2-1)就 y 或 x 解出表为(2-3)或类似于(2-3)的形式。(2-3)式称为圆锥曲线的显式方程。

对于显式方程(2-3)，判别式 Δ 可用 R 替换。

2. 设 $A^2 + C^2 = 0$

这时 $B \neq 0$ ，因此方程(2-1)变成

$$Bxy + Dx + Ey + F = 0 \quad (2-5)$$

方程(2-5)不能用 P 、 Q 、 R 、 S 、 T 表成(2-3)那种显式形式。将它就 y 或 x 解出，得显式方程为

$$y = -\frac{Dx + F}{Bx + E} \quad \text{或} \quad x = -\frac{Ey + F}{By + D} \quad (2-6)$$

这时，圆锥曲线(2-5)是以直线 $x = -\frac{E}{B}$ 和 $y = -\frac{D}{B}$ 为渐近线的双曲线。

在外形设计中，通常将圆锥曲线的一般方程表成显式形式。这样做有如下的好处：它可使计算公式统一，便于编制计算程序，并且(2-3)中系数 P 、 Q 、 R 、 S 、 T 有明显的几何意义。下面我们就来看 P 、 Q 、 R 、 S 、 T 的几何意义。

将(2-3)式分解为两部分的和：

$$y = y_1 + y_2$$

其中

$$y_1 = Px + Q \quad (2-7)$$