高等数学客观型习题集

富景隆 主编

哈尔滨工业大学出版社

高等数学客观型习题集

富景隆　主编

哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

高等数学客观型习题集，是按照国家教委研究生司所颁布的数学复习大纲而编写的，内容包括函数、极限、连续；一元函数微分学；一元函数积分学；多元函数微分学；多元函数积分学；级数；微分方程等共七章。书中附有习题答案、提示或题解。

本习题集供报考硕士研究生的本科生系统复习高等数学之用，也可供工科及经济类院校的在校生学习参考，并可作为各类电大、业大、函大学员及参加自学考试人员的自学参考材料。

高等数学客观型习题集

富景隆 主编

*

哈尔滨工业大学出版社出版

新华书店首都发行所发行

长春市第四印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张18.125 字数406 000

1987年11月第1版 1987年11月第1次印刷

印数 1—10 000

书号13341·29 定价3.95元

ISBN 7-5603-0028-6/O·8

前　言

在国家教委统一领导下，硕士研究生招生改革工作正在有计划、有步骤地顺利展开，其中数学考试的改革方向也已逐渐明确。概括地说，从考试内容上看，正在向大题量、宽覆盖面的方向发展；从考题的类型上来说，则正在从单纯知识型与主观型试题为主的情况，逐步增加能力型与客观型试题的比重。其目的是更好地为选拔高质量的人材服务。

能力型试题是指考题的目的不单纯是测量考生是否掌握了某些知识或结论，而着重于测量考生用所掌握的知识来解决问题的能力。

客观型试题大致可分为填空题、是非题与选择题三种，这些试题的优点就在于它不仅能满足大题量、宽覆盖面的考试要求，而且具有使评分更客观化、合理化以及能够为今后用电脑评卷奠定必要的基础，同时客观型试题还能在强化要求考生概念清楚、计算准确方面，起着有力的推动作用。这些优点正是客观型试题生命力之所在。因此，它将逐渐为人们所接受，并在试卷中所占的比重亦必将逐渐加大。

本习题集是按国家教委研究生司所颁布的数学复习大纲的内容与要求，收集、加工编纂了近 1000 个高等数学客观型习题，并给出了答案，对其中具有代表性的或具有一定难度的题目还给出了提示或全部解答过程，其目的是为了帮助广大有志于报考（工学、经济学类）硕士研究生的学生逐渐适应客观型试题，并掌握客观型试题的基本分类及回答客观型试题的一些基本方法、技巧与步骤。总之，希望通过它能对考生有所裨益。

为了帮助读者熟悉考试要求及考试中应注意的事项，本习题集附有1987年全国攻读（工学、经济学类）硕士学位研究生入学考试数学试题、参考解答及评分标准，供读者参考。

本习题集也可作为工科与经济学科各类院校的在校生及各类电大、业大、函大以及有志于参加自学考试的广大学员的学习参考材料。

本习题集由白富多、王维生、万复生、荆成铭分工编写，由富景隆审阅并担任主编。

由于时间急促以及水平所限，不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

1987.6于哈尔滨

目　录

绪　　论

目前在我国流行的客观型习题，大体可分为三类：填空题、是非题与选择题.

填空题是指在一个正确命题中，留有一些关键性的空白部分，并用横线来表示，考生只需在横线的上方填写适当的内容（数学名词、数值、算式、……），使其成为一个正确的命题．例如：

1° 函数 $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$它的定义域是____.

2° 若已知函数 $y=a^x$ 是单调上升的，则必有a____1.

3° $\int x^2\sin 2x\,dx=$ ____________.

4° $y'+(\operatorname{tg}x)y=\cos x$ 的通解是____________.

5° 若 $f(x)$ 可导，则 $y=f(x)$ 的微分$dy=$ ________，且 $f(x)$ 可微的________条件是 $y=f(x)$ 可导.

6° 微分学中洛尔定理的条件是①____________，②____________，结论是________________.

从以上几个例子可以看到，填空题从形式上可分为单填空型（例如1°—4°）与多填空型（例如5°与6°）；从内容上看又可分为概念型、计算型与知识型三种．例如1°、2°、5°属于概念型；3°，4°属于计算型，6°属于知识型．当然，这种分类并不是绝对的，如4°中也不单纯只是计算，其中也包含着微分方程的分类以及通解的概念．另外概念与知识也不能截然分开，它们之间也是互相渗透、互相包含的．

对于概念型和知识型的填空题，主要是要求考生概念清楚，并能全面而且完整地掌握所学知识，在回答这类考题

时，关键在于要仔细审题，经过周密的考虑之后，再给出准确的答案。对于计算型的填空题，则切忌潦草马虎，要求计算熟练、准确，不能出现一点错误，否则将丢掉全部分数，而这一点也正是培养一个工程技术人员所必需的，因此，并不算过于苛求。

是非题则是给出一个完整的命题，要求考生判断其是否正确。例如：

7° 若 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则 $f(x)$ 在 x_0 点一定连续。

8° $\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2}\,dx=\int_{-1}^{1}x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1}=0$

9° 方程 $y''-5y'+6y=e^{2x}$ 有一特解呈 $y^*=Axe^{2x}$ 型。

10° 设 $f(x,\ y)$ 为任意连续函数，则必有

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,\ y)dy=\int_a^b dy\int_c^d f(x,\ y)dx$$

11° 若区域 (σ) 为 $x^2+y^2\leqslant a^2$，则

$$\iint_{(\sigma)}(x^2+y^2)d\sigma=\iint_{(\sigma)}a^2d\sigma=a^2\iint_{(\sigma)}1d\sigma$$

$$=a^2\pi a^2=\pi a^4$$

对于这类题，考生若认为命题是正确的，则只需答“是”；否则只需答“非”。由此可见，是非题是一种选择题，它只有“是”与“非”两个答案供考生选择。

从以上所举几个例子的内容可以看到，是非题多是与一些基本概念或基本理论有关的，特别是这类题多出在容易忽略或混淆不清的地方。由此可见，是非题对于考生的要求较高，且在以往的考题或习题集里也比较少见，因此，希望考生对于是非题要给予充分地注意。

选择型习题的类型与形式是比较繁杂的，但大体上可分

为两类：第一类，称为单目标选择题．这类题是在一个确定的前提下，给出以（A）、（B）、（C）、（D）、… 为代号的多个结论，但这些结论中，只有一个是正确的（单目标），其余都是错误的，要求考生指出唯一正确结论的代号．例如：

12° 若$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$

则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的

（A）连续点；（B）第一类间断点；

（C）无穷间断点；（D）振荡间断点．

13° $\int_{-1}^{0}\dfrac{dx}{x^2+2x+2}$之值为

（A）$-\dfrac{\pi}{4}$ （B）$\ln\dfrac{1}{2}$

（C）$\dfrac{\pi}{4}$ （D）e^{-1}

14° 曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 在$x=1$点处的曲率是

（A）$\dfrac{6}{5\sqrt{5}}$ （B）$\dfrac{1}{5\sqrt{5}}$

（C）6 （D）1

15° 垂直于平面 $5x-y+3z-2=0$ 且与它的交线在xoy平面上的平面方程为

（A）$3x-y+2z+8=0$ （B）$6x-2y+3z+5=0$

（C）$15x-3y-26z-6=0$ （D）$7x+14y-21z+5=0$

例12° 这是属于概念性的选择题，可按连续点的定义来

考虑，这时只需指出

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\neq f(0)$$

即得知 $x=0$ 不仅是 $f(x)$ 的间断点，而且是第一类间断点，因此，答案应取（B）。这个例子也说明对于概念性的选择题，要按所学过的概念或理论去判断，并决定应选择的结论。

例13° 是属于计算性的选择题，这时应先化原式为

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{(x+1)^2+1}d(x+1)=\operatorname{arctg}(x+1)\Big|_{-1}^{0}$$

至此，即可断定（B）与（D）两个结论决非所求，这种逐步排除一些结论的方法，称之为逐步排除法。其实再进一步将积分上限与积分下限代入并作差式，即得

$$\operatorname{arc\,tg}(x+1)\Big|_{-1}^{0}=\operatorname{arc\,tg}1-\operatorname{arc\,tg}0=\frac{\pi}{4}$$

于是又排除了结论（A），从而得出正确的结论应为（C）。

例14° 也属于计算性的选择题，则应直接计算到底。如此时应算得

$$y'\Big|_{x=1}=-\frac{2}{x^3}=-2$$

$$y''\Big|_{x=1}=\frac{6}{x^4}=6$$

$$k=\frac{6}{(1+4)^{3/2}}=\frac{6}{\sqrt{125}}=\frac{6}{5\sqrt{5}}$$

由上便知，正确的结论为（A）。

例15° 是属于计算与概念混合型的，它可以按正常的解法去做（详见4.108题解），也可以用逐步排除法来解，这

时只要依次检验（A）、（B）、（C）、（D）中四个平面与所给平面是否垂直的条件，而由

$$3\cdot5+(-1)(-1)+2\cdot3=22\neq0$$

$$6\cdot5+(-2)(-1)+3\cdot3=41\neq0$$

$$15\cdot5+(-3)(-1)+(-26)(3)=0$$

$$7\cdot5+(14)(-1)+(-21)\cdot(3)=-42\neq0$$

便知只有结论（C）应为所求。

对于各类选择题的做法，不外乎就是两种：①正常解法，②逐步排除法，前者是基本的，后者是辅助的。这是因为后一种方法终究是一种试探性的方法，并不一定能解决所有问题，只是对某些问题如运用得当，常可收到事半功倍之效，如运用不当，甚至可能浪费很多时间，最终还得应用正常解法，正因如此，本习题集对各题的解答皆是按正常解法给出的，供读者参考。而每个题能否用以及怎样用逐步排除法来解决，留给读者自己去思考。

选择题的第二种类型是多目标选择题。这种题是在一个确定的前提下，给出以（A）、（B）、（C）、（D）、…为代号的多个结论，但这些结论中可能不止一个是正确的（多目标），也可能一个也不正确（零目标或无目标），要求考生把所有正确结论的代号全部指出来，或者指出所给的结论皆不对。例如：

16° 若 $y=f(x)$ 在x_0点处有二阶导数，则

（A） $f'(x)$在x_0点存在； （B） $f(x)$ 在x_0点连续；

（C） $f''(x)$在x_0点连续； （D） $(x_0,f(x_0))$是$f(x)$的拐点。

显然，这个题只有结论（A）与（B）正确，而（C）与（D）是错误的，答题时则只需在答的后面写出（A）、（B）

即可。

17° 上底为 6 米，下底为 2 米，高为 4 米的一个梯形水闸门，水表面距上底为 1 米，则此水闸门所受的总压力 P 为

(A) $P=\int_1^4\left(-\frac{1}{2}x+3\right)dx$ 吨·米

(B) $P=2\int_1^4 x\left(-\frac{1}{2}x+3\right)dx$ 吨·米

(C) $P=2\int_0^4 (x-1)\left(-\frac{1}{2}x+3\right)dx$ 吨·米

(D) $P=2\int_0^4 x\left(-\frac{1}{2}x+3\right)dx$ 吨·米

显然，这里给出的四个结论均不对，其正确答案应为

$$P=2\int_1^4 (x-1)\left(-\frac{1}{2}x+3\right)dx \text{ 吨·米}$$

因此，答题时只需在答的后面写出 (A)、(B)、(C)、(D) 均不对即可。

多目标选择题较单目标选择题不仅复杂得多，而且要求考生考虑的问题也更深入、更全面，从评分上看多目标选择题也较复杂。不难看出，多目标选择题也均可化为单目标选择题或是非题。正是基于这些原因，使得多目标选择题目前还没有被人们所普遍接受，因此，本习题集只收入单目标选择题供读者练习也就足够了。

第一部分　客观型习题集

第一章　函数、极限、连续

一、是非题

1·1. 函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$　$(a>0, a\neq 1)$ 是偶函数。

1·2. 函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$　$(a>0, a\neq 1)$ 是奇函数。

1·3. $y=f(x)=\sin^2 x$ 是周期函数，且其最小周期为 2π.

1·4. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$是周期函数。

1·5. 若 $\varphi(x)$、$\psi(x)$、$f(x)$ 在其公共定义域 Z 上都是单调增加函数，且 $\varphi(x)\leqslant\psi(x)\leqslant f(x)$，若设 $\varphi(\varphi(x))$、$\psi(\psi(x))$、$f(f(x))$亦均有意义，则必有

$$\varphi(\varphi(x))\leqslant\psi(\psi(x))\leqslant f(f(x))$$

成立。

1·6. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

1·7. 数列$\{a_n\}_{n=1,2,3,\cdots,n,\cdots}$对每一个自然数 k 均存在一个自然数$N(k)$，且当$n>N(k)$ 时，恒有

$$|a_n - a| < \frac{1}{k} \qquad a\text{为常数}$$

成立，则必有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

1·8． 当$0<a<1$ 时，有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$

1·9． 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = 0$

1·10．若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = a$

1·11． 若$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A > 0$，则必存在 $M>0$，使当 $x<-M$时恒有

$$\frac{A}{2} < f(x) < \frac{3}{2}A$$

1·12． 设x为任意给定的实数．

$$y_n(x) = \underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n\text{个}} x$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$ 一定存在．

1·13． 对1·12题中的$y_n(x)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = \sin^n x$．

1·14． 设 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$，（$x\geqslant 0$）则 $f(x)$ 亦可表达为

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1 \text{ 时} \\ x & \text{当 } 1<x\leqslant 2 \text{ 时} \\ \frac{x^2}{2} & \text{当 } x>2 \text{ 时} \end{cases}$$

1·15. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $[a, b]$ 上亦连续。

1·16. 若 $|f(x)|$ 为连续函数，则 $f(x)$ 必为连续函数。

1·17. $\max\{f(x), g(x)\} = \dfrac{1}{2}\left(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\right)$

1·18. $\min\{f(x), g(x)\} = \dfrac{1}{2}\left(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\right)$

1·19. 若函数 $f(x)$、$g(x)$ 均在 $[a、b]$ 上连续，则 $\max\{f(x), g(x)\}$ 也在 $[a, b]$ 上连续。

1·20. 若函数 $f(x)$，$g(x)$ 均在 $[a, b]$ 上连续，则 $\min\{f(x), g(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上却不一定是连续的。

1·21. 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内必定是有界的。

1·22. 方程 $x^5 - 3x + 1 = 0$ 在区间 $(1, 2)$ 内至少有一个实根。

1·23. 若 $F(x)$ 与 $G(x)$ 均在 $[a, b]$ 上连续，且 $F(a) > G(a)$ $F(b) < G(b)$，则在 (a, b) 内至少存在一点 c，使得 $F(c) = G(c)$。

二、填空题

1·24. $y = \sqrt{\sin x}$ 的定义域是________________。

1·25. $y = \sqrt{x^2(x-1)}$ 的定义域是________________。

1·26. $y=\sqrt{\cos x-1}$ 的定义域是________________.

1·27. 若 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+3$，则$f(x)=$__________.

1·28. 若 $z=x+y+f(x-y)$，且知当 $y=0$时，$z=x^2$，则 $f(x)=$__________________.

1·29. 若 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$，且已知当$y=1$时，有$z=x$，则 $f(x)$ 的表达式为__________________.

1·30. 若 $\varphi(x)=\begin{cases} x & x\leqslant 0 \\ -x & x>0 \end{cases}$ 而 $f(x)=\sqrt{\varphi^2(x)}$

则

$$\varphi[f(x)]=\begin{cases} \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}.$$

1·31. 若$f(x)=\begin{cases} 1-x & 0<x<1 \\ 1 & x=1 \\ \ln x & 1<x<2 \end{cases}$

$$\varphi(x)=\begin{cases} 2^x & 0<x<1 \\ 1 & x=1 \\ x-1 & 1<x<2 \end{cases}$$

则 $$f[\varphi(x)]=\begin{cases} \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}.$$

1·32. $y=\dfrac{1-x}{1+x}$的反函数是__________________.

1·33. $y=10^{x+1}$的反函数是__________________.

1·34. $y=x^2-2x$的反函数是__________________.

1·35. $y=\cos x$，$x\in[\pi,\ 2\pi]$的反函数是____________.

1·36. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)\cos n=$ ________.

1·37. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=$ ________.

1·38. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(\sin n!)\left(\frac{n-1}{n^2+1}\right)^{10}-\left(\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right)\frac{2n^2+1}{n^2-1}\right]=$ ________.

1·39. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=$ ________.

1·40. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

$=$ ________.

1·41. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+a)-\ln a}{x}=$ ________.

1·42. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=$ ________.

1·43. $\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)=$ ________.

1·44. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)=$ ________.

1·45. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$ ________.

1·46. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}=$ ________.