[苏]Ю. А. 德洛兹德　В. В. 基里钦柯　著

有限维代数

刘绍学　张英伯　译

北京师范大学出版社

有 限 维 代 数

〔苏〕Ю. А. 德洛兹德
B. B. 基里钦柯 著
刘绍学 张英伯 译

北京师范大学出版社

有 限 维 代 数

〔苏〕Ю.А.ДРОЗД
В.В.КИРИЧЕНКО

刘绍学　张英伯　译

*

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
西 安 新 华 印 刷 厂 印 刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：9　字数：186千
1984年8月第1版　1984年8月第1次印刷
印数：1—10,000
统一书号：13243·38　定价：1.20元

译 者 的 话

这是一本关于有限维结合代数的书，它不仅介绍了半单代数论的基础，也介绍了非半单代数论的基础．书中系统地使用了模论方法．在较具体的对象——有限维代数上学习近代代数方法，对初学者来说该是非常有益的，对于进一步学习近代有限维代数以及近代环论都是很有好处的．

这本薄薄的书涉及的内容还是较广泛和较深入的．叙证上很精练．作者说了该解释的话，虽然读者常需要补充一些推证和考虑一些细节．我们在赞赏细致叙证风格的同时也喜爱这种风格．它常能给细心的读者带来额外的收获和意外的愉快．

我们是怀着极大兴趣把这本苏联代数工作者的著作介绍给我国年青的代数爱好者的．

于北京师范大学

1983.2.6.

序　言

有限维代数的理论是近世代数最古老的分支之一。它的兴起首先要联系到Hamilton和Cayley的工作，前者提出了著名的四元数代数，后者对矩阵论进行了研究。以后，有许多数学家都来考察有限维代数的结构。在他们当中，应当提出的有：P.Peirce，K.C.Peirce，Clifford，Weierstrass，Dedekind，Jordan，Frobenius. 十九世纪末，Ф.Молин，E.Cartan 描述了复数域和实数域上的半单代数，并对非半单代数进行了初步的探讨。

Wedderburn开创了有限维代数理论发展的新阶段，这一理论的基本结果都是他提出来的，这些结果包括：对任意域上半单代数的刻划，商代数关于根的提升定理等等。在以Noether，Artin，Brauer 为首的德国学派的代数学家的工作中，半单代数的理论取得了近代形式，并且其中大部分结果被移置到有极小条件的环（Artin环）上。此外，在这些工作当中，模（或表示）的概念发挥了主导作用。

有限维代数理论的进一步发展基本上沿着两个方向进行。一是建立无限维代数（以及没有链条件的环）的理论，这方面的结果集中体现在Jacobson“环的结构”一书中。另一个方向是研究非半单代数的结构，这一工作碰到了相当大的困难，其中大部分问题至今未能解决。因此，在这一领域当中，划分出一些“自然的”代数类并对它们进行描述，就

成了占据主要地位的工作。这一方向是从Köthe， Asano，Nakayama对主理想代数及其推广的研究开始的。

在全部历史进程中，有限维代数的理论与各个不同的数学分支有着紧密的联系，从它们当中汲取新的思想和方法，同时也对它们的发展产生了一些本质的影响。最初，这一理论与线性代数，群及其表示论，Galois理论的联系是最深远的，近来，特别由于对非半单代数的探讨，同调代数，范畴论，代数几何的方法开始表现出重要的作用。

本书的设想是作为有限维代数理论方面的现代教科书。在这本书中，模论（或表示论）的方法是基本的研究工具。我们认为，利用模论的方法能够最简单明确地达到目的，得出无论是经典的，还是现代的有关结果。自然，我们无法对有限维代数的各个方向都进行相同程度的阐述，因而在我们的书中，结构理论，即对代数结构的讨论占主要地位，而目前正处于高潮阶段的代数表示理论却几乎没有涉及。无疑地，专家们还会指出近期兴起的一些其它分支亦未能在本书中得到反映。尽管如此，我们仍然希望这本书为读者提供如下可能：一是便于掌握经典代数理论的基本结果，二是为了解近代研究成果作好充分的准备。

本书大部分内容所要求的预备知识在高等院校的高等代数和线性代数标准教学大纲内都有，大学二、三年级的学生完全能够掌握。此外，我们还假设读者不具备模论和环论方面的初步知识（不仅如此，“环”这个词在书中几乎没有出现）。当然，讨论群表示和Galois理论的章节要求读者了解群的基本理论（例如不超出 A.И.Кострикин “代数学引论”的范围）。在每章的最后，附有复杂程度不等的习

题．这些习题当中，有一些是帮助消化课文内容的例子，也有一些是在基本课文中未能反映的理论片断．我们奉劝读者（特别是初学者），在第一次阅读时要多做练习，习题当中最困难的部分附有相当详细的提示．

全书的内容可以分成三大部分．第一部分由第一章到第三章组成，其中包括代数理论的基本概念，半单代数和根的经典定理．第三章的最后几节用于讨论代数的格式，可以认为是现代研究方法的引论．第二部分由第四章到第六章组成，可将它称之为“半单代数的精细理论”．这一部分基于张量积和双模的技巧叙述了中心单代数，Galois域论初步，Brauer群的概念和分离代数理论．最后，第三部分由第八章到第十章组成，用于讨论更现代的一些结果：关于模范畴等价性的Morita定理，拟Frobenius代数，单序列代数，继承和广义单序列代数的理论．这部分的某些结果该是只能在杂志的论文中才能找到．第七章有一些独特之处，在这一章中，根据已得的半单代数理论叙述了群表示论，直到整性定理和Burnside关于p^aq^b阶群的可解性定理．

自然，我们在任何地方都没有追求叙述和证明最一般性的结果，不仅如此，还处处利用了有限维的特点．按照我们的看法，这样可以使叙述简单化．有经验的读者会发现，书中的许多结论对于其它的代数系统，例如Artin环也是成立的，但是，如所周知，这种推广通常都几乎是自动完成的．而在一些不是这样的场合，则必将引起相当复杂的新考虑，在我们看来，这会给初学者阅读本书带来较大的困难．

我们没有给出关于有限维代数的文献的全面介绍，因为即使关于书中涉及的问题，其文献数量之大亦可与此书本身

页数相比。我们仅列出了一些俄文教科书和文献，读者可以从中了解到环与代数理论的另外一些体系和风格。〔1,3-9〕.半单代数的算术问题可以从书籍〔2〕或M.Denriug的经典教科书中去了解。可惜的是，后者至今尚未译成俄文。

在本书中，我们沿用通行的符号。特别是字母Q、R、C分别代表有理数域、实数域和复数域。我们对书中论断按节编序，例如“定理Ⅳ。6.5”指第四章中号码为6.5的定理（即第6节的第5个定理）。在第四章内，就把这个定理编号为定理6.5。

目　　录

第一章　引　　论

§1　基本概念　例

域K上的**代数**或K-代数，是一个域K上的向量空间A，并在其中定义了双线性结合乘法。这就是说，从向量空间A中任取两个有序元素a和b，有A中唯一确定的元素与之对应，称为a、b的积，记作ab，并且$\forall a,b,c\in A$，$\alpha\in K$(纯量)满足下述公理：

1) $a(b+c)=ab+ac$；

2) $(b+c)a=ba+ca$；

3) $(\alpha a)b=a(\alpha b)=\alpha(ab)$；

4) $(ab)c=a(bc)$。

代数A叫作**有限维**或**无限维**代数，取决于A作为向量空间是有限维或无限维的。我们基本上研究有限维代数，尽管在某些章节中不得不遇到一些无限维代数的问题。

向量空间A的维数叫作代数A的**维数**，记作$[A:K]$。

从乘法的双线性易知，如果在向量空间A中取定一组基$\{a_1,\cdots,a_n\}$，则乘法由基向量的乘积$b_{ij}=a_ia_j$唯一确定。事实上，若$a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ia_i$，$b=\sum_{j=1}^{n}\beta_ja_j$，则

$$ab=\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,a_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}\beta_j\,a_j\Big)$$

$$= \sum_{i,\ j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \left(a_i a_j\right)$$

$$= \sum_{i,\ j=1}^{n} \alpha_i \beta_j b_{ij}.$$

将b_{ij}用基向量线性表出：$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{i\ j}^{\ k} a_k$。我们看到，取定$A$的一组基，则向量空间$A$的代数结构由域$K$上的$n^3$个元素$\gamma_{i\ j}^{\ k}$ $(i, j, k = 1, \cdots, n)$唯一决定。这些元素叫作A的**结构常数**。

向量b_{ij}（从而结构常数$\gamma_{i\ j}^{\ k}$）不能随意指定。尽管按公式$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j\right) = \sum_{i,\ j,\ k=1}^{n} \alpha_i \beta_j \gamma_{i\ j}^{\ k} a_k$定义的乘法是双线性的（即满足公理1)—3)），但并不能保证结合律成立。基元素乘法的结合性使结构常数有所限制。事实上，

$$(a_i a_j) a_k = \sum_{l=1}^{n} \gamma_{i\ j}^{\ l} a_l a_k$$

$$= \sum_{l,\ m=1}^{n} \gamma_{i\ j}^{\ l} \gamma_{l\ k}^{\ m} a_m,$$

$$a_i (a_j a_k) = a_i \sum_{l=1}^{n} \gamma_{j\ k}^{\ l} a_l$$

$$= \sum_{l,\ m=1}^{n} \gamma_{j\ k}^{\ l} \gamma_{i\ l}^{\ m} a_m,$$

从而推出，对任意i, j, k,

$$\sum_{l=1}^{n} \gamma_{i\ j}^{\ l} \gamma_{l\ k}^{\ m} = \sum_{l=1}^{n} \gamma_{j\ k}^{\ l} \gamma_{i\ l}^{\ m}. \tag{1}$$

反之，从关系式（1）知基元素的乘法满足结合律，从而易验，对代数的任意元素，乘法结合律成立。

令$\{\widetilde{a_1}, \cdots, \widetilde{a_n}\}$是向量空间$A$的另一组基，从原来的基到新基的过渡矩阵$S=(s_{ij})$。这时

$$\begin{aligned}
\widetilde{a_i}\,\widetilde{a_j} &= \Big(\sum_{l=1}^{n} s_{il}\, a_l\Big)\Big(\sum_{r=1}^{n} s_{jr}\, a_r\Big) \\
&= \sum_{l,\, r=1}^{n} s_{il} s_{jr} (a_l a_r) \\
&= \sum_{l,\, r,\, m=1}^{n} s_{il} s_{jr} \gamma_{l\ r}^{\ m} a_m \\
&= \sum_{k,\, l,\, r,\, m=1}^{n} s_{il} s_{jr} \gamma_{l\ r}^{\ m} s'_{mk}\, \widetilde{a_k},
\end{aligned}$$

此处s'_{mk}是逆矩阵S^{-1}的元素。这样，与新基对应的结构常数形如

$$\widetilde{\gamma}_{i\ j}^{\ k} = \sum_{l,\, r,\, m=1}^{n} s_{il} s_{jr} s'_{mk} \gamma_{l\ r}^{\ m},$$

也就是说，元素$\gamma_{i\ j}^{\ k}$可以看作三阶张量的坐标（二阶协变，一阶逆变）。

代数 A 的元素 e 叫作代数的**单位元**，如果对任意元素$a \in A$，$ae = ea = a$。今后我们总是假定，在代数A中有单位元。代数的单位元e是唯一的，如果e'是另一个单位元，则$e = ee' = e'$。

单位元的存在性是普遍而没有限制的。如果代数A没有单位元，那么它总可以嵌入到一个有单位元的代数中。构造代数$\widetilde{A}$，$\widetilde{A}$由有序对(a,α)组成，此处$a\in A$，$\alpha\in K$，加法和纯量乘法按坐标进行，乘法按下述公式定义：

$$(a,\alpha)(b,\beta)=(ab+\alpha b+\beta a,\alpha\beta)。$$

易验$\widetilde{A}$是代数，元素$(0,1)$是它的单位元。事实上，代数A与$\widetilde{A}$的性质完全相同，我们将在习题中阐明这一点。

例 1　域K上的n阶方阵的集合对于通常的矩阵运算组成n^2维有限代数，称之为全矩阵代数，记作$M_n(K)$。

例 2　域K上的单变元多项式组成无限维代数$K[x]$。

例 3　V是域K上的向量空间，则V的线性算子组成代数$E(V)$，这个代数是有限维或无限维代数，取决于V是有限维还是无限维向量空间。

例 4　实数域R上以$\{e,i,j,k\}$为基的四维向量空间，依下表定义乘法：

	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	$-e$	k	$-j$
j	j	$-k$	$-e$	i
k	k	j	$-i$	$-e$

（乘积ab写在a行b列的交叉处）。

易验，这样得到了一个域R上的代数H，有单位元e.这

个代数叫作四元数代数．它实际上是例 1 中代数的一种．

例 5　域K的任意扩张L，即以域K为子域的域，也可以看作域K上的代数．如果这个代数是有限维的，则称扩张为有限的，反之称扩张是无限的．

例 6　给出群G，把这个群的元素看作向量空间的基，即研究集合KG，由形如$\sum\limits_{g\in G}\alpha_g g$的形式和组成，此处$\alpha_g\in K$，仅有有限个非 0．群元素（我们的基！）的乘法建立了向量空间KG的代数结构．这个代数叫作群G在域K上的**群代数**，它在群表示论中有重要作用．

例 7　域K上的n元数组空间，即$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$的集合，$\alpha_i\in K$，加法和纯量乘法按坐标进行，乘法也依坐标定义为：

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1\beta_1,\cdots,\alpha_n\beta_n),$$

它显然成为域K上的代数，记作K^n．

例 8　设$A_1,\cdots,A_n$是域K上的代数，研究它们的卡氏积A，即$(a_1,\cdots,a_n)$的集合，其中$a_i\in A_i$，按坐标定义运算：

$$(a_1,\cdots,a_n)+(b_1,\cdots,b_n)=(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n),$$

$$\alpha(a_1,\cdots,a_n)=(\alpha a_1,\cdots,\alpha a_n),$$

$$(a_1,\cdots,a_n)(b_1,\cdots,b_n)=(a_1b_1,\cdots,a_nb_n).$$

显然，A成为域K上的代数，称为$A_1,\cdots,A_n$的**直积**，记作$A_1\times\cdots\times A_n$或$\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$．代数$A_1,\cdots,A_n$叫作代数$A$的直因子．最后，上例是此例在$A_1=\cdots=A_n=K$时的特殊情况．