现代分析基础

2.5 Borel集和分析集

给定C是一个集，$D\subseteq C_2$，那末由可数个属于D的集的和集全体组成的集族记做D_σ，由可数个属于D的集的通集全体组成的集族记做D_δ。属于D_σ或D_δ的集合称做D_σ集或者D_δ集。

一个拓扑空间里的开集全体记做G，闭集全体记做F，紧致集全体记做K。

σ环和σ代数　给定C是一个集，$D\subseteq C_2$，如：

i) $a\in D$并且$b\in D \longrightarrow a\setminus b\in D$，

ii) $a_n\in D\ (n\in\omega) \longrightarrow \bigcup_{n\in\omega} a_n\in D$，

那末说D是一个σ环或者Boole σ环。特别，如果D是一个σ环并且$C\in D$，那末说D是一个σ代数或者Boole σ代数。

Borel σ代数B　给定X是一个拓扑空间，那末包含X的拓扑的最小的σ代数叫做X里的Borel σ代数，记做B。属于B的集叫Borel集。

张鸣镛 著

厦门大学出版社

现 代 分 析 基 础

张 鸣 镛 著

厦 门 大 学 出 版 社

1987·1

现 代 分 析 基 础

张鸣镛　　著

厦门大学出版社出版

福建省新华书店发行

三明市印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　6.5印张　138千字

1987年1月第1版　1987年1月第1次印刷

印数：1—2,000册

ISBN　7—5615—0000—9　　书号：13407·003

O·1　　定价：　1.10元

序

现在，分析已经是一个有很多分支的学科．这本书谈的是分析的各个现代分支所共同的基础．各个分支所特有的那些基础知识这里很少包括，因为这不是一本书所能包括的．此外大学各个分析课程的内容这里也尽量避免重复，本书的主要目的是填补大学课程和研究工作需要之间的空隙。

分析是怎么样的一个学科？近来流行一种说法，认为分析就是研究极限运算的数学．不过这不是准确的说法，实际上，分析既不研究单纯的代数运算，也不研究单纯的极限运算，任何一个分析运算都是两者的综合，换句话说，任何一个分析结构都是代数结构和拓朴结构的综合．因此分析基础不能不牵涉到一部分代数，也不能不牵涉到一部分拓朴，而且实际上还不能不牵涉到整个集论的公理系统．这是因为这个公理系统是现代数学最基本的命题，离开这个公理系统不能严格地建立任何数学理论，至少在目前是如此。

下面要对题目里的“现代”两个字做一点说明。

从十七世纪六十年代微积分发明算起，分析已经有三百多年的发展史．我们不妨把这个历史的前半段，即到十九世纪二十年代为止，称做古典期，这是微积分和微分方程的时期．在这个时期中，微积分的强大生命力不仅为整个数学园地带来空前的繁荣，而且又促进了力学、物理和其他技术科学的兴起．但是分析的这种蓬勃发展的过程到十八世纪末以

后遭遇到越来越多的严重障碍．微积分刚诞生的时候本来只是关于某些初等函数的运算法，但是当不能用初等函数表示的积分越来越多的时候，积分的定义问题就不能再置之不理了．它既然不是初等函数，那么应该是什么？还算不算函数？什么叫函数？显然，这些问题在当时是无法彻底解答的．不过，事实上当时需要彻底解决的还不是这样广泛的问题，因为，在积分表中除了代数函数以外，就是三角函数、指数函数和它们的反函数，这些反函数都是代数函数的积分．只要有圆满的代数函数的积分理论，微积分就可以摆脱主要的困难．这样，正如代数发现复数系统是它固有的地盘一样，分析也终于在复数领域里找到了广阔的天地．因此随着复变数函数论在十九世纪二十年代的兴起，分析就进入了一个新的发展阶段．这个新的复变数函数论的时期可以称做半古典期．大量高等函数的出现和它们的特点的深刻论述是这个时期的典型成果，这些成果使分析理论发展到了新的水平．最后，半古典期随着解析函数积分理论的最高成就——单值化定理——的完成而告终．接着，分析进入了现代期，这是抽象分析的时期．*Lebesgue* 积分理论对微积分基本定理的圆满论证揭开了这个新时期的序幕．现代分析的很大特点就是逻辑推理取代了古典分析中的那种求解运算．用数学史家的术语来说，到了现代期，分析的东方传统让位于古希腊的作风了．现代分析教科书几乎没有不采用“定义”“定理”“证明”这种欧几里德《原本》的格式的．分析领域的这种变革的历史渊源可以追溯到古典期末期的时候．那时候由于古典分析的困境，在分析以外的数学分支中古希腊的数学传统复苏了，于是代数领域中出现了抽象代数，综合几何也以解析几何为对立面重新兴起，这些动态促进了十九世纪末集

论、拓朴、数学逻辑的发展，最后终于使分析获得新的动力，顺利地克服了古典分析未能超越的障碍。随着Lebesgue的先驱理论，在本世纪头四十年时间里，线性拓朴空间和线性算子理论相继出现，于是现代抽象分析的基本理论体系就大体完成了。四十年代以后，这种抽象分析方法，开始从基础领域深入到各个分析分支甚至于分析以外的分支去。因此作为现代分析基础，这书要介绍的主要是本世纪头四十年的成果。

我们用“现代”这个词一方面当然是为了区别于古典，但同时也是为了区别于未来。上面已经说过，抽象分析的思潮正在分析的各个领域中继续高涨，这个现代期并没有结束，但是未来分析已经萌芽，这里指的是在“非阿几米德分析”“非标准分析”等名目下出现的某些新思想。未来是属于未来分析的。跟古典分析比较起来，未来分析跟现代分析的距离将要大得多，目前要详细议论显然还是过早的，所以本书不谈。

内 容 简 介

本书对集论和一般拓扑的主要基本概念和内容作了系统和详尽的介绍，这些内容是现代分析必不可少的基础。书中有许多例题说明基本概念，为了帮助读者掌握本书内容，本书还配有适量习题。

本书可作为数学系高年级和研究生的教材，也可供大专院校数学系师生及有关的专业工作者参考。

目　录

第一章 集　论

集论是 *G. Cantor* 在十九世纪七十年代开创的。当初，他所谓集指的无非是集体的意思，是一个日常用语而不是一个严格的数学名词。但是他利用集的概念，通过严密的逻辑推理获得了一些用常规数学方法所不能获得的重大成果。例如他令人信服地证明了超越数不仅存在，而且比代数数多得多。这使集论风靡了整个数学界，也使集论的语言流行于数学的各个分支，大家逐渐习惯于用集来为其他数学概念下定义，久而久之，一些原先并非“集体”的概念也用集来代替。

现在，“集”和“属于”已经成了最基本的数学概念。其他一切数学概念都可以用这两个概念定义，一切数学命题（*proposition*）都可以表示做关于这两个概念的逻辑式子。因此，集论成了整个数学的最基础的部分，分析当然也建立在这个基础上。所以分析基础要从集论讲起。

但是充当数学基础以后，集论却一再暴露严重的逻辑缺陷。首先是定义问题。“集”和“属于”可以用来说明其他数学概念，但按照传统定义方式，它们本身当然不能用自已定义。*Cantor* 是用非数学的语言说明集这个概念的，不过他的定义经不起精密推敲。大家不久就发现，他的含糊的定义引起不能容许的混乱。

Hilbert 根据他确立几何基础的成功经验，倡议用公理系统代替集的定义，接着，1908年 *Zermelo* 提出了第一个公

理系统。于是集论进入公理化的时期。公理化的根据可以概括如下：集论定理并非每个都需要从集和属于的定义出发来证明，事实上只有少数最基本的定理才这样，其他定理都可以从这些基本定理推理得到。因此只要假设这少数最基本的定理成立，全部集论的定理就都可以得到证明了，这少数最基本的定理就是公理，公理本身做为假设当然没有必要证明。不但这样，“集”和“属于”的定义也变做不必要了，因为“公理系统”已经起着定义的作用：凡是满足这些公理的才是集，不满足的就不能算集。公理化集论就是用这种方式避免了传统定义法的缺点的。

公理系统比起传统的定义显然精密得多，但是否足够成为集论的逻辑基础却依旧是有疑问的。一个公理系统要成为一切推理的逻辑出发点至少应该具备相容性和完备性。相容性就是不会推出自相矛盾的结论，就是不会既可以证明某个命题对，又可以证明这同一个命题错。完备性就是不会对任何命题不置可否，即不会既不能判断某个命题对又不能判断这同一个命题错。*Zermelo* 公理系统提出后二十多年，*Gödel* 证明：任何一个公理系统如果相容，那么从这系统出发是不可能证明它是相容的。这是对公理论的一个几乎致命的打击。到了60年代，*P. J. Cohen* 证明经过改进的*Zermelo*公理系统依然是不完备的，因为他证明 *Cantor* 连续统假设是这个系统不可能置可否的。实际上，这就是这个公理系统不能判断有的概念究竟是不是集。因此，当一个定理说“任何一个集怎样怎样”就变得没有合法的根据了。所以，现行的公理系统并没有为集论提供结实的基础。

不过下面还是要按照这个公理系统来讲集论。这只是因为到目前为止我们还没有发现集论基础的缺陷威胁到常规数

学的成立。

在讲公理系统之前，先回顾一下由集的古典定义所引起的问题。

1.1 集的基本概念

1.1.1 Cantor 定义和 Russell 悖论

Cantor 对集所下的定义可以分成下面四点内容：

一些东西的全体叫做**集**，这些东西中的每一个都叫做这集的或者这个集里的**元素**。

此外，如果某种东西只有一个，这个东西假定记做 a，那末说这个东西的全体集是$\{a\}$。a 是$\{a\}$的唯一的元素。

此外，如果某种东西不存在，我们也说这种东西的全体是**空集**，规定任何空集都只是同一个集，记做$\varnothing$。任何东西不是$\varnothing$的元素。

最后，每一个集都是一个东西。

注意，$\{a\}$和 a 一般是不同的概念，比方$\{\varnothing\}$有一个唯一的元素$\varnothing$，但是$\varnothing$没有元素。

属于　假定 a 是集A的元素，我们记成

$$a\in A \text{ 或者 } A\ni a.$$

"$\in$"读做"**属于**"，"$\ni$"读做"**包含**"。假定 a 不是A 的元素，我们记成

$$a\,\overline{\in}\,A \text{ 或者 } A\,\overline{\ni}\,a.$$

"$\overline{\in}$"读做"不属于"，"$\overline{\ni}$"读做"不包含"。

定义的注释　在前面写的集的定义中使用了未加定义的词汇，如"一些"、"东西"等等，为了消除定义上的模

糊，做必要的注释如下：

i) $\in$和$\bar{\in}$是彼此相否定（非）的，换句话说，假定a是一个东西，A是一个集，那末

$$a \in A \text{和} a \bar{\in} A$$

不能都成立，也不能都不成立。

ii) 假定A和B都是集，任何一个东西属于A一定也属于B，属于B一定也属于A，那末A和B是同一个集，记作$A=B$。

集的例子、正整数 假定有一些东西，全部都写出来是a，b，c，…，那末由定义，它们的全体是一个集，这个集可以记成$\{a, b, c, \cdots\}$。由注释ii)，在这种记号里，元素符号的次序和重复都无关实质，比方$\{a, b\}=\{b, a\}=\{a, b, a\}$。

为了避免过多的未加定义的概念，现在严格按照定义举例。由定义，$\varnothing$是一个集，而集是一个东西，所以下列的东西都是集：

$$\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}, \varnothing\}, \{\{\{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\}.$$

在§1.2里要证明任何一个集都可以用象上面这种形式的由$\varnothing$"繁殖"出来的集来代表。所以在集论里，除了$\varnothing$和集以外，不用别的"东西"也够了。不但这样，其他数学概念也都可以不用$\varnothing$和集以外的"东西"来定义。例如，正整数和0可以定义如下：

$$0=\varnothing,$$
$$1=\{0\}=\{\varnothing\},$$
$$2=\{0, 1\}=\{\varnothing, \{\varnothing\}\},$$
$$3=\{0, 1, 2\}=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\},$$
$$4=\{0, 1, 2, 3\}\text{等等。}$$

族 族是集的同义词，在某些情况，比方一个集A的元素都是集的时候，为了避免混淆，也把A叫做一个**族**或者一个**集族**。

虽然在近代集论模型中，任何一个集的元素都是集（因为不考虑非集的“东西”），但是有时候使用“族”这个称呼仍旧可以表达得更清楚。

族有时候也可以当量词用，例如把属于一个集族的全部集说成“一族集”．

Russell 悖论（Paradox）

上面已经用例子说明怎样可以列举元素的办法来表示一个集．但是当一个集的全部元素无法列举的时候，这个集应该怎样表示呢？在集论发展的初期，流行的习惯是把一个集说成是“所有的满足某条件的东西的全体”．如果把“某个东西x满足某条件”这句话表示成一个逻辑公式$P(x)$，那么按照所说的这种习惯表示法，一个集可以记作$\{x|P(x)\}$（所有的使$P(x)$成立的x的全体）．一般往往认为只要所说的条件是明确的，也就是对任何x，$P(x)$和$\sim P(x)$（$P(x)$的否定）有一个并只一个成立，那末这种表示法是没有问题的。可是实际上并不如此。下面举著名的*Russell*悖论当例子。

设$z=\{x|x\overline{\in}x\}$，如果z是集，那末z也是东西，因此$z\in z$和$z\overline{\in}z$不能都不成立。假定$z\in z$，那末z应该满足所说的条件$x\overline{\in}x$，因此$z\overline{\in}z$，自相矛盾。假定$z\overline{\in}z$，那末z已经满足所说的条件$x\overline{\in}x$，因此$z\in z$．又自相矛盾．这就叫*Russell*悖论。

由集的定义的注释 i)，z不是集。因此悖论实际上是错误的假设“z是集”引起的。除了这个形式逻辑上的理由以

外，对这悖论还可以做更深入的解释（见1.1.4 划分公理）。但是这悖论提出了一个更加广泛得多的问题不好解决。既然$\{x|x \overline{\in} x\}$不是集，那末别的$\{x|P(x)\}$可以算集吗？

这是集的古典定义所无法回答的。因此近代集论改用公理系统来代替古典定义。这种公理系统除了一些显然包含在古典定义中的论点以外，实际上就是规定怎样的条件 $P(x)$ 可以用做集的定义条件。

目前集论公理系统有两种形式，一种是*E. Zermelo* 在1908年最初提出后来经过 *A. Fraenkel*, *P. J. Cohen* 等人修订的，可以称做*ZFC*。另一种是*P. Bernays*, *J. von Neumann*, *K. Gödel* 等人制订的，可以称做*BNG*。这两种实质上是一样的，这里采用*ZFC*。

ZFC 包括九个公理。有三个显然包含在前面集的定义和定义的注释中，以后不再提。这三个是

外延公理　（就是注释ii）

空集公理　（存在一个不包含任何元素的集）

配对公理　（对任何东西 x 和 y，存在一个集$\{x, y\}$，$\{x, y\}$的仅有的元素是 x 和 y）.

注意，这里用了“东西”这个词。*ZFC* 的本来形式是针对集论模型说的，而在集论模型里没有不是集的“东西”，因为正如上面集的例子里所说那样，集论可以不牵涉到非集的“东西”. 因此，严格用 *ZFC* 的话，“东西”应该改做集。*ZFC*的第四个公理是：

正则公理　任何一个不空的集A一定包含一个元素 a，A 的任何一个元素都不是 a 的元素。

由正则公理可以知道对任何集 a，a 和$\{a\}$是不同的。因为如果 $a=\{a\}$，那末$\{a\}$就不符合正则公理。

ZFC 的其余五个公理是**替换公理**、**幂集公理**、**并集公理**、**无穷性公理**、**选择公理**，从1.1.3节起将一一详细说明。

以上介绍了公理系统。但是为了防止这种用通常语言的说明方式给公理化集论带来类似的困难，1.1.2节要先用形式语言对公理化集论作完整的描写。

习　　题

根据配对公理和正则公理证明：对任何 x、y，$x\in y$ 和 $y\in x$ 不能都成立。

1.1.2　公理化集论

Ⅰ．符号和形式

1）基本符号

Y（或非）　$\forall$（对所有）　=（等于）　（　）（括号）

□（空位）　x（变元）　c（常元）　$\varnothing$（空集）

$\in$（属于）

注：各个符号后面注的只是名称，名称的通常含意不能看做符号的定义。符号的意义完全由下面那些规定它们的用法的条文决定。

一个变元 x 不够用的时候，用 x'，x''，y，z，u，v，w，r，s，t 或再带上“′”当变元。

一个常元c不够用的时候，用c'，c''，a，b 或再带“′”当常元。在集论里，常元都表示集。$\varnothing$和其他的表示特殊的集的记号都称常元。