奇异摄动方法及其在大气科学中的应用

谢应齐

云南大学出版社

责任编辑: 吴玉树
封面设计: 丁群亚

奇异摄动方法及其在大气科学中的应用

谢应齐　编

*
云南大学出版社出版
(云南大学校内)
云南大学印刷厂印刷
*
开本: 787×1092/32　印张:10　字数: 207 千
1989 年 6 月第一版　　1989 年 6 月第一次印刷
印数: 0001-2000
*
ISBN 7-81025-003-5/P·1　　定价: 2.80 元

目　录

前　　言

我们知道，在自然科学的各个部门中，都提出了求解非线性微分方程、变系数微分方程的问题. 这些类型方程的精确解一般是难以找到的. 因此，不得不求助于找其渐近解或数值解，或者把二者结合起来求解. 于是，为了求得渐近解，相继出现了各式各样的摄动方法. 这些方法中的应变参数方法、Lighthill 方法、Temple 方法、重正化方法、平均法等等出现较早. 而作为这些方法推广的多尺度方法则出现在本世纪六十年代中期. 近十多年来，这种摄动方法已在包括气象科学在内的很多自然科学领域中得到了广泛应用，引起了人们的注意和兴趣.

但是，系统地、扼要地、以较少篇幅对各种摄动方法（特别是多尺度方法）加以介绍，在国内尚不多见. 本书正是以此为目的而编写的.

为了使读者范围广泛些，以便在国内更好地普及和推广奇异摄动方法，因而编写时在数学推导上力求详尽，而严格的理论论证有的从简，有的则略去. 相应却编写了足够数量的例子作为示范. 因此，读者不需要具备高深的数学知识和训练，而只要有一般大学理工科的高等数学知识和基本计算能力（主要是极限理论、无穷级数、常微分方程与偏微分方程等），便可顺利地阅读本书，逐步掌握各种摄动方法.

由于控制大气运动的基本方程，与数学物理其他分支的方程不同，它本质上是非线性的. 因此在动力气象中都很少有精确解. 于是，奇异摄动方法自然就成为了理论气象中寻

求渐近解的有效近似方法之一. 本书专门对最近十多年来国内外应用奇异摄动方法解决理论气象问题的动态作了简要介绍, 以期引起读者的兴趣, 使这种方法能在大气科学中得到推广和应用, 发挥它在大气科学基础理论研究方面的重要作用. 应该指出, 各种摄动方法, 包括多尺度方法在内, 在自然科学的其他分支, 诸如物理学、天体力学、固体力学、空气动力学、振动理论及应用数学等方面都有着广泛的应用. 因而, 从事这些学科学习和研究的工作者和大专院校的教师、研究生和本科生, 以及有关工程技术人员都能从本书中得到不少裨益.

本书第一章是予备知识, 特别着重介绍展开式均匀有效概念. 第二章扼要讲述常用的几种摄动方法.它们虽在具体做法上各有不同,但基本思想是一致的.第三章较详细地介绍了多尺度摄动方法,并特别对其关键问题——长期项的消除作了专门讨论. 这章中的例子几乎都是第二章中讨论过的, 这样便于比较方法间的差异.最后三章则对国内外近十多年来,在理论气象中应用奇异摄动方法的情况作了简要介绍.

要用很少篇幅介绍各种摄动方法以及它们在气象科学中的各种应用是很困难的.因而本书列举了有关的参考文献.

本书的编写, 是与中国科学院大气物理研究所朱抱真研究员的鼓励、帮助分不开的. 1979 年初稿编出后, 他曾进行过审阅, 提出了宝贵意见, 在此谨致谢忱. 这次书稿付印时, 编者又根据自己在云南大学的多次授课实践进行了认真的修改和增补. 但是, 由于编者水平有限, 挂一漏万是毫无疑问的, 缺点错误在所难免. 望读者不吝赐教.

谢应齐

1988 年 5 月于云南大学

第一章 摄动展开的基础知识

今天，在工程、物理、理论气象以及应用数学等学科中，很多问题都难以求到精确的解析解. 这是因为控制方程的非线性、变系数、边界形状复杂或边界条件非线性等. 有时，即使问题的精确解可以找到，但从数学上或物理上进行解释，以及进行数值计算时则可能是无益的. 所以，为了要找到方程解的一些信息，就只好求助于已经为大家所熟知的近似解法（例如级数解法、小扰动以线性化方程的方法等）和数值解法，或是这两种方法的联合使用.

近似方法中最主要的是所谓摄动方法（或渐近方法、扰动方法）. 按照这种方法，解可用一个渐近展开式的前面有限项和加以表示，通常用多于两项的式子表示. 这种展开式可按照一个（小的或大的）参数（称为摄动量）进行展开面得出. 而这个作为摄动量的参数或者是在方程中自然出现的，或者是根据问题的特性人为地引进的. 这种展开式就是所谓的参数摄动. 有时，展开式也可按照一个坐标（小的或者大的）加以实现，这种展开式则叫坐标摄动.

为了了解和掌握摄动方法，我们将在本章中对有关的基础知识加以扼要叙述.

§ 1.1 参数摄动与坐标摄动

一、参数摄动的基本概念

很多包含未知函数 $u(x, \varepsilon)$ 的问题，从数学上均可用

微分方程

$$L(u;x,\varepsilon)=0$$

及边界条件

$$B(u;\varepsilon)=0$$

表示．这里 x 可以是标量也可以是矢量自变量，ε 是一个参数．而 $L(u;x,\varepsilon)=0$ 可以是常微分方程，也可以是偏微分方程。

一般情况下，上述问题不可能求得其精确解．但是，如果存在一个 $\varepsilon=\varepsilon_0$（显然取 $\varepsilon_0=0$ 是不失一般性的），使当 $\varepsilon=\varepsilon_0$ 时上面的问题可以精确地求解或者至少求出解析解较为方便，则可能求如下形式的按 ε 的方幂展开的解，即

$$u(x;\varepsilon)=u_0(x)+\varepsilon u_1(x)+\varepsilon^2 u_2(x)+\cdots \tag{1.1}$$

其中 $u_n(x)$ 是不依赖于 ε 的．$u_0(x)$ 是当 $\varepsilon=0$ 时问题的解，自然认为它已经求得．

这样一来，将（1.1）代入方程 $L(u;x,\varepsilon)=0$ 和边界条件 $B(u;\varepsilon)=0$，并按 ε 的方幂进行合并整理，再比较等式两端同次方幂系数，即知参数 ε 的各次方幂项的系数必须为零．于是得到一系列的关于确定 $u_n(x)(n=0,1,2,\cdots)$ 的方程式．一般，是有可能方便地求它们的解的．依次确定出 $u_n(x)$ 后，代入（1.1）式，即得到 $u(x;\varepsilon)$．显然，这实际上就是已知的微分方程的级数解法．

例 1．考虑所谓凡德坡（Van der pol）方程

$$\frac{d^2u}{dt^2}+u=\varepsilon(1-u^2)\frac{du}{dt} \tag{1.2}$$

当$\varepsilon=0$时,上式简化为

$$\frac{d^2u}{dt^2}+u=0 \tag{1.3}$$

根据微积分学知,其通解为

$$u = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

其中 c_1, c_2 是两个独立的任意常数. 为了显示出解的物理意义, 令

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}},$$

$$\sin\varphi = \frac{-c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}},$$

则 (1.3) 的通解形式为

$$u = a\cos(t + \varphi) \tag{1.4}$$

其中 a 和 φ 为常数. 根据参数摄动的方法, 在求到了当 $\varepsilon = 0$ 时 (1. 2) 的解 (1. 4) 之后, 即可寻求到如下的摄动展开式:

$$u(t;\varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \cdots \tag{1.5}$$

将 (1.5) 代入 (1.2) 中, 有

$$\begin{aligned}\frac{d^2u_0}{dt^2} + u_0 + \varepsilon\left(\frac{d^2u_1}{dt^2} + u_1\right) + \varepsilon^2\left(\frac{d^2u_2}{dt^2} + u_2\right) + \cdots \\ = \varepsilon[1 - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots)^2]\left[\frac{du_0}{dt} + \varepsilon\frac{du_1}{dt}\right. \\ \left. + \varepsilon^2\frac{du_2}{dt} + \cdots\right]\end{aligned} \tag{1.6}$$

按 ε 同次方幂合并整理得到

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2u_0}{dt^2} + u_0\right) + \varepsilon\left(\frac{d^2u_1}{dt^2} + u_1\right) + \varepsilon^2\left(\frac{d^2u_2}{dt^2} + u_2\right) + \cdots \\ = \varepsilon(1 - u_0^2)\frac{du_0}{dt} + \varepsilon^2\left[(1 - u_0^2)\frac{du_1}{dt} - 2u_0u_1\frac{du_0}{dt}\right] \\ + \cdots\end{aligned} \tag{1.7}$$

由于 u_n 是与 ε 无关的，(1.7) 对 ε 的任何值均应成立．因而上式两端 ε 同次方幂系数应该相等，亦即 ε 同次方幂的系数都应为零．于是有

$$\frac{d^2u_0}{dt^2}+u_0=0 \tag{1.8}$$

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}+u_1=(1-u_0^2)\frac{du_0}{dt} \tag{1.9}$$

$$\frac{d^2u_2}{dt^2}+u_2=(1-u_0^2)\frac{du_1}{dt}-2u_0u_1\frac{du_0}{dt} \tag{1.10}$$

$$\cdots\cdots$$

易见，(1.8)正是(1.3)的形式，因而其通解为(1.4)，即

$$u_0=a\cos(t+\varphi) \tag{1.11}$$

把 u_0 代入 (1.9) 给出

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}+u_1=-[1-a^2\cos^2(t+\varphi)]a\sin(t+\varphi)$$

注意到

$$\sin 3(t+\varphi)=3\sin(t+\varphi)-4\sin^3(t+\varphi)$$

则重写关于 u_1 的方程为

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}+u_1=\frac{a^3-4a}{4}\sin(t+\varphi)+\frac{1}{4}a^3\sin 3(t+\varphi) \tag{1.12}$$

其特解是

$$u_1=-\frac{a^3-4a}{8}t\cos(t+\varphi)-\frac{1}{32}a^3\sin 3(t+\varphi) \tag{1.13}$$

由于 u_0 和 u_1 已求得，(1.10) 的右端已知．类似地即可求解此方程得到 u_2．在求解 u_2 时并不会增加新的困难，只不过运算较前复杂些。继续这样做下去，可以求出

摄动展开式（1.5）中的各个 u_n.

二、 坐标摄动的基本概念

如果一个工程、物理问题在数学上用微分方程 $L(u,x)=0$ 表出，并服从于边界条件 $B(u)=0$. 其中 x 是一个标量，u 是未知函数．当 $x\to x_0$（当然 x_0 可考虑成 0 或 ∞，这并不失一般性）时，可找到 $u(x)$ 取已知形式 u_0. 则同样可以去寻求按 x 的方幂（在 $x_0=0$ 时）或按 x^{-1} 的方幂（在 $x_0\to\infty$ 时）表示的 u 的摄动展开式．具体做法与参数摄动相同．

例2. 我们来考虑

$$\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{x} \tag{1.14}$$

对于大的x值的解.

设有形式如下的解:

$$y=\sum_{m=1}^{\infty}a_m x^{-m} \tag{1.15}$$

将此展式代入 (1.14)，有

$$-\sum_{m=1}^{\infty}ma_m x^{-m-1}+\sum_{m=2}^{\infty}a_m x^{-m}+(a_1-1)x^{-1}=0$$

在第二个和式中用 $m+1$ 代 m，则可重新将上式写成形式:

$$(a_1-1)x^{-1}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_{m+1}-ma_m)x^{-m-1}=0$$

由于此方程是 x 的恒等式，每个 x^{-m} 的系数都必须恒等于零，即有

$$a_1=1$$

$$a_{m+1} = m a_m \quad (m \geqslant 1)$$

于是

$$a_2 = 1, \quad a_3 = 2!, \quad a_4 = 3!, \quad a_n = (n-1)!$$

从而（1.15）成为

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \frac{3!}{x^4} + \cdots + \frac{(n-1)!}{x^n} + \cdots \quad (1.16)$$

由于这个无穷级数第 n 项与第 $n-1$ 项的比值是 $(n-1)x^{-1}$，因而根据级数收敛的比值判别法知：级数（1.16）对 x 的所有取值均是发散的．但是，后面将会看到，（1.16）是一种称为渐近级数的发散级数．即使它是发散的，但对于方程（1.14）的数值计算却是有用的．

§ 1.2 阶数符号与标准函数

为了介绍参数摄动展开或坐标摄动展开的重要特性——均匀有效性，必需引入阶数符号和标准函数的概念．

为简便计，我们假设讨论限定在实参数 ε 的函数范围内，记成 $f(\varepsilon)$．并且，只考虑当 $\varepsilon \to 0$ 时的情况，即考虑 $\varepsilon \to 0$ 时 $f(\varepsilon)$ 的极限．显然这个极限包含了当 ε 小于零而趋于零和大于零而趋于零的情形．如果 $f(\varepsilon)$ 的极限存在（注意，这意味着 $f(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon = 0$ 上不具有实质性的奇点．例如 [illegible] 此列），则存在三种可能性：

$$\left.\begin{array}{l} \text{极限为零：} f(\varepsilon) \to 0, \\ \text{极限有界：} f(\varepsilon) \to A(0 < A < +\infty), \text{当} \varepsilon \to 0 \text{时}, \\ \text{极限无界：} f(\varepsilon) \to \infty \end{array}\right\} \quad (1.17)$$

为了看出当 $\varepsilon \to 0$ 时 $f(\varepsilon)$ 所趋极限的情形，经常是选择一些形式特殊而性质明显的所谓标准函数和 $f(\varepsilon)$ 相比，而根据其比值极限来显示 $f(\varepsilon)$ 的极限情况．最简单、最常用的标准函数是:

$$\cdots,\ \varepsilon^{-n},\ \cdots,\ \varepsilon^{-2},\ \varepsilon^{-1},\ 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^{2},\ \cdots,\ \varepsilon^{n},\ \cdots$$

还有

$$\log \varepsilon^{-1},\ \sin \varepsilon,\ \mathrm{tg}\, \varepsilon,\ \mathrm{sh}\, \varepsilon,\ \cdots.$$

而形如 ε^n 的标准函数则是最重要的．因为一般情况下，都是按 ε 的方幂去进行摄动展开的．

一个函数 $f(\varepsilon)$ 与一个标准函数 $g(\varepsilon)$ 的比值（当 $\varepsilon \to 0$ 时）的性质，可利用符号："O" 与 "o" 之一表示．这两种符号在高等数学讨论无穷小量与无穷大量的阶数时已见过。这两种表征阶数（量级）的符号又称朗道（Landan）符号．

符号O（大写）：

如果存在一个与 ε 无关的正数 A 和一个 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于所有满足 $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ 的 ε 值，有

$$|f(\varepsilon)| \leqslant A|g(\varepsilon)| \tag{1.18}$$

成立，则记

$$f(\varepsilon) = \mathrm{O}[g(\varepsilon)], \qquad 当\varepsilon \to 0时. \tag{1.19}$$

易见，根据函数根限的《$\varepsilon - \delta$》叙述法，条件 (1.18) 成立，也就表明当 $\varepsilon \to 0$ 时，函数 $\left|\frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}\right|$ 的极限存在，即

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left|\frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}\right| < +\infty \tag{1.20}$$

通常，当

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = A$$

而 $0<|A|<+\infty$ 时，则记

$$f(\varepsilon)=\mathrm{O}[g(\varepsilon)],\quad 当\varepsilon\to 0时.$$

例如，当$\varepsilon\to 0$ 时，

由于 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right|=1<+\infty$，有 $\sin\varepsilon=\mathrm{O}(\varepsilon)$;

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{\sin 3\varepsilon}{\varepsilon}\right|=3<+\infty$,有 $\sin 3\varepsilon=\mathrm{O}(\varepsilon)$;

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{\sin\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\right|=1<+\infty$，有$\sin\varepsilon^2=\mathrm{O}(\varepsilon^2)$;

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{\cos\varepsilon}{1}\right|=1<+\infty$,有$\cos\varepsilon=\mathrm{O}(1)$.

同理,注意到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon^2}\right|=\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{2\sin^2\varepsilon/2}{\varepsilon^2}\right|=\frac{1}{2},$$

所以有

$$1-\cos\varepsilon=\mathrm{O}(\varepsilon^2).$$

进一步，当f 是 x 和 ε 的二元函数$f(x,\varepsilon)$ 时，相应的标准函数取为 $g(x,\varepsilon)$. 类似有定义：当 $\varepsilon\to 0$ 时，如果存在一个与 ε 无关的正数 A 和一个 $\varepsilon_0>0$，使得对于一切满足$|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ 的 ε 值成立

$$|f(x,\varepsilon)|\leqslant A|g(x,\varepsilon)| \tag{1.21}$$

则记

$$f(x,\varepsilon)=\mathrm{O}[g(x,\varepsilon)],\quad 当\varepsilon\to 0时 \tag{1.22}$$

这里的 A 和 ε_0 都不依赖于变数 x 时,(1.22) 式称为均匀成立或一致成立. 易见，这正类似于高等数学中函数在某区间

上一致连续以及在某区间上级数均匀收敛的概念．

显然，当函数含有变数 x 时，一般而论，上述 A 和 ε_0 是 x 的函数，因而对于不同的 x 值所找到的 A 和 ε_0 是不同的．如在我们所考虑的范围内，能找到一个共同的 A 和 ε_0，普遍适用于（1.21）式，此时（1.22）就是均匀成立．否则就是非均匀成立．

例如，易见

$$\sin(x+\varepsilon)=O(1)=O[\sin x]$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时就是均匀成立的．但是，当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$e^{-\varepsilon t}-1=O(\varepsilon)$$

和

$$\sqrt{x+\varepsilon}-\sqrt{x}=O(\varepsilon)$$

则不是均匀的．

事实上，对于函数 $f(t,\varepsilon)=e^{-\varepsilon t}-1$，$t$ 可取一切实数值．由于

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{e^{-\varepsilon t}-1}{\varepsilon}\right|=\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{-te^{-\varepsilon t}}{1}\right|=|t|$$

此式表明，只要 t 值取定，总能找到一正数 A

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{e^{-\varepsilon t}-1}{\varepsilon}\right|<A \tag{1.23}$$

因而 $e^{-\varepsilon t}-1=O(\varepsilon)$ 成立．但是，由于 t 在其可取值范围内，找不到一个上界值 A，使（1.23）对所有 t 值都同时成立．这即表明 $e^{-\varepsilon t}-1=O(\varepsilon)$ 不是均匀的．

至于

$$\sqrt{x+\varepsilon}-\sqrt{x}=O(\varepsilon)$$

的非均匀性，读者不难自证．

显然，(1.22) 成立，但它不一定均匀成立；均匀成立则必定对一切 x 值都成立．

符号o:

如果对于每个与 ε 无关的正数 δ，存在一个 $\varepsilon_0 > 0$，使当 $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ 时有

$$|f(\varepsilon)| \leqslant \delta |g(\varepsilon)| \quad , \tag{1.24}$$

成立，则记

$$f(\varepsilon) = \mathrm{o}[g(\varepsilon)], \quad 当\ \varepsilon \to 0\ 时. \tag{1.25}$$

同前，条件 (1.24) 等价于

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left| \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} \right| = 0. \tag{1.26}$$

于是，根据极限理论，在 $\varepsilon \to 0$ 时有

$\sin \varepsilon = \mathrm{o}(1)$，　$\sin \varepsilon^2 = \mathrm{o}(\varepsilon)$，

$\cos \varepsilon = \mathrm{o}(\varepsilon^{-1/2})$，　$1 - \cos 3\varepsilon = \mathrm{o}(\varepsilon)$，

$\operatorname{ctg} \varepsilon = \mathrm{o}[\varepsilon^{-(n+1)/n}]$，　（对正的 n 值），

$e^{-1/\varepsilon} = \mathrm{o}(\varepsilon^n)$　（对所有的 n）．

最后两个式子成立，是由下面两个极限看出的：

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left| \frac{\operatorname{ctg} \varepsilon}{\varepsilon^{-(n+1)/n}} \right| = \lim_{\varepsilon \to 0} \left| \frac{\varepsilon^{1+1/n}}{\operatorname{tg} \varepsilon} \right|$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right) \varepsilon^{1/n} \cos^2 \varepsilon \right| = 0;$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left| \frac{e^{-1/\varepsilon}}{\varepsilon^n} \right| = \lim_{\varepsilon \to 0} \left| \frac{n \varepsilon^{-n+1}}{e^{1/\varepsilon}} \right| = 0.$$

如果 $f = f(x, \varepsilon)$，标准函数 $g = g(x, \varepsilon)$，则当 δ 和 ε_0 都与 x 无关时，称 (1.25) 是均匀成立的．

例如，当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$\sin(x+\varepsilon)=o(\varepsilon^{-1/3})$ 是均匀成立的;

$e^{-\varepsilon x}-1\ =o(\varepsilon^{1/2})$ 是非均匀成立的;

$\sqrt{x+\varepsilon}-\sqrt{x}=o(\varepsilon^{3/4})$ 是非均匀成立的.

事实上,对于任意给定的 $\delta>0$,有

$$\left|\frac{\sin(x+\varepsilon)}{\varepsilon^{-1/3}}\right|\leqslant|\varepsilon|^{1/3}$$

故只要取 $\varepsilon_0=\delta^3$(它与 x 无关),则当$|\varepsilon|<\varepsilon_0$ 时,对于任何 x 值均有

$$\left|\frac{\sin(x+\varepsilon)}{\varepsilon^{-1/3}}\right|\leqslant\delta,$$

亦即

$$|\sin(x+\varepsilon)|\leqslant\delta|\varepsilon^{-1/3}|.$$

这即表明,当 $\varepsilon\to0$ 时,$\sin(x+\varepsilon)=o(\varepsilon^{-1/3})$ 均匀成立.

但是,注意到

$$\left|\frac{\sqrt{x+\varepsilon}-\sqrt{x}}{\varepsilon^{3/4}}\right|=\left|\frac{\varepsilon^{1/4}}{\sqrt{x+\varepsilon}+\sqrt{x}}\right|\leqslant\frac{\varepsilon^{1/4}}{2\sqrt{x}}$$

于是对于任意给定的 $\delta>0$,只能选取

$$\varepsilon_0=16x^2\delta^4.$$

而当$|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$时,有

$$\left|\frac{\sqrt{x+\varepsilon}-\sqrt{x}}{\varepsilon^{3/4}}\right|\leqslant\delta,\quad 即\quad\left|\sqrt{x+\varepsilon}-\sqrt{x}\right|\leqslant\delta|\varepsilon^{3/4}|.$$

但这里的 ε_0 与 x 有关,显然不存在一个共同的(最小的)ε_0.这即表明,$\sqrt{x+\varepsilon}-\sqrt{x}=o(\varepsilon^{3/4})$的成立是非均匀的.

$e^{-\varepsilon x}-1=o(\varepsilon^{1/2})$的非均匀性可仿此得证.