高等学校试用教材

机床优化设计

大连理工大学 李秀英 滕弘飞 编

GAO DENG XUE XIAO JIAO CAI

机械工业出版社

前　言

本书是根据高等学校工科机械制造（冷加工类）专业教材编审委员会机床编审小组1982年西安会议规划及 1984 年 10 月在杭州召开的机床教材编审小组会议的精神编写的。

电子计算机技术、现代结构分析方法和数学规划理论的发展，为机床设计采用现代优化设计方法开辟了广阔的前景，为高效和优质设计提供了理论基础和实用方法。机床优化设计可以为复杂的机床设计问题，提供最佳的设计方案。机床优化设计的数学模型和方法也适用于其他机械结构的优化设计。

本书共分六章，第一章介绍了优化设计的基本概念；第二章介绍了机床传动和结构分析中常用的建立数学模型的原则和方法；第三章介绍了常用的数学规划法；第四章介绍了优化准则法；第五章介绍了人—机交互式结构修改法，用于较复杂的机床动态结构优化设计；第六章为优化设计实例，其中包括传动优化设计、机床零部件优化设计（主轴、床身、砂轮架部件等），整机优化以及液压元件系统数字仿真优化设计等，最后是两个附录。

机床优化设计的主要工作，一是建立机床分析和优化的数学模型；二是选择优化方法，并对计算结果进行工程处理。本书是围绕着这两方面内容编写的。第二章机床常用建模方法，试图为解决第一部分任务而开拓思路。它取材于国内外科研成果和文献资料，有的内容与其它书略有重复，但写的角度不同，介绍的深度和广度不同，这样处理有利于系统地、全面地掌握机床设计建模的方法和思路，以扩大知识面和视野；第三、四、五章是为完成第二部分任务而编写的。在选材和叙述上力求简明实用、深入浅出，不贪多求全，不着重于从数学的角度来介绍优化方法和公式推导，而着眼于应用这些数学方法和技巧解决实际问题。第六章是通过机床优化设计实例把数学模型和优化方法的选择及应用融为一体，使读者便于掌握和理解。本书可作为高等院校机械制造工艺和设备专业的高年级学生、研究生的选修课教材，也可供工程技术人员和科学研究人员参考。

本书由大连理工大学李秀英主编，并编写第一、二、五、六章和附录，滕弘飞编写第三、四章和第六章的第 4 节。在编写过程中得到了戴曙教授、冯辛安教授、袁景侠教授、刘能宏教授、赵德璧副教授、冯恩民副教授的指导和帮助，最后请冯辛安教授进行了初审。1986年 12 月由机床教材编审小组委托南京工学院潘新陆教授主审，并请葛巧琴副教授参加审稿。在此一并表示衷心的感谢。

限于编者的学术水平，书中错误和不妥之处在所难免，敬请读者指正。

编者

1988年 3 月

目　录

第一章 概 述

随着生产和科学技术的不断发展，机床设计方法也在不断地改进和不断地完善。

早期的机床设计，主要考虑满足加工零件的形状和机件不破坏的最起码要求，后来又提出机床几何精度的要求。这时的机床设计是在满足机床运动、机件强度和几何精度要求的前提下，根据经验或者类比法设计机床。

40 年代后，随着科学技术的发展和工艺水平的提高，特别是硬质合金刀具的出现，机床向高速、高效（大进给、大切深）、大功率方向发展。机床设计不仅仅要考虑静态问题，还要考虑动态问题，要解决运动精度、刚度、抗振性、耐磨、热变形、爬行、噪声等一系列基础理论问题，用类比法设计已不能满足生产要求，必须借助于性能试验（实物试验和模型试验），在一定的理论指导下进行设计，但仍处于弄清机理、说明现象的定性分析阶段，仍带有一定程度的经验设计。

60 年代末，随着计算机科学技术、有限元方法和数学规划理论的发展，不仅有了强大的结构分析工具，而且有了现代设计方法和理论来改进设计和优化设计。使机床设计开始跨入计算机辅助设计和优化设计的新阶段。对于能够建立优化数学模型的设计问题，如机床零部件的参数设计，可借助于电子计算机，用数学规划等方法，使设计的问题在满足约束条件下，自动地达到优化方案和优化参数，称为自动设计。对于难以建立优化目标函数的设计问题或较复杂的设计问题，如机床整机和部件结构动态优化问题。由于机床结构十分复杂，它不仅仅是一个无限多自由度的振动系统，而且其中还包含有阻尼和刚度不易确定的结合面，因此完全用数学规划法自动优化设计是很困难的。一般是借助于电子计算机，进行系统性能分析，然后由设计者根据优化的目标要求进行修改，修改后，再由计算机进行重分析，经多次反复，直到满足设计要求为止，称为人-机交互式优化设计。

无论是自动优化设计，还是交互式优化设计，对提高机床设计质量，缩短设计周期，提高产品竞争能力都是大有益处的，它是有前途的现代的设计方法。

§1-1 优化设计的基本概念

一、目标函数和设计变量

一台机床或一个零部件设计的“好”与“坏”，总是以某一些指标来衡量的，如成本低，重量轻、体积小、性能好等，这个衡量设计“好”与“坏”的指标以数学形式直接或间接描述的函数称为优化设计问题的目标函数，又称为评价函数。如果设计要求多个指标优化，则称为多目标函数优化问题。

为了使系统或结构设计尽可能“优”，设计者往往要分析某些参数，并确定某些与目标函数关系较大的设计参数，通过调整这些设计参数来改进设计的结果，不断地使目标函数达到最优值。这个在优化过程中不断调整，并最后得到优化的参数称为设计变量。它与优化的目标是函数关系。如果 $f(\boldsymbol{X})$ 表示优化的目标函数，则 $\boldsymbol{X}$ 为设计变量，$\boldsymbol{X}=[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T$。

设计变量的个数，就是优化设计的维数，设计变量之间必须是互相独立的参数，所以又称为自变量，有一组设计变量$\boldsymbol{X}$，就唯一地确定了一个优化设计方案，不断地调整设计变量，就不断地改进和优化设计，直至优化到满意为止。这时的设计变量称为最优解，以$\boldsymbol{X}^*$表示，最优值为$f(\boldsymbol{X}^*)$。

例如，设计一个齿轮，要求在满足强度的条件下，体积最小。齿轮体积等价于以分度圆为底圆，齿宽为高的圆柱体体积，所以目标函数为$f(\boldsymbol{X})=\frac{\pi}{4}m^2z^2b$，式中$m$为模数，$z$为齿数、$b$为齿轮宽度。如果齿轮的材料已定，则设计变量为齿数$z$、齿宽$b$，即$\boldsymbol{X}=[z\quad b]^T$。一旦确定了齿数$z$和齿宽$b$为设计变量（自变量），那么用强度公式就可以算出模数，故模数m是因变量，因变量不能作设计变量。有一组z、b值，就确定一个齿轮设计方案，通过不断地改变z、b值，使目标函数达到最小值，这时的设计变量值称为最优解，以z^*、b^*表示，最优值为$f(z^*, b^*)$。因为有两个设计变量，所以叫二维优化设计问题。

优化设计中涉及的参数较多，如果把它们都作为设计变量，势必增加优化设计的维数，从而增加优化设计的难度，而在实际工程中也没有必要。设计者的首要任务就是把所有的设计参数按下面要求进行分析归类，从中确定设计变量。

1．独立参数

（1）设计常数　由设计者给定，如材料的许用应力等。

（2）设计变量(自变量)　优化中调整，待定的参数（$\boldsymbol{X}$），是独立的参数。

2．非独立参数（因变量）

非独立参数是独立参数的函数，有可能是显函数或者是隐函数。

设计者首先根据设计要求，确定那些参数是设计常量，那些是设计变量，这是设计者的艺术。如果设计变量定得过多，体现优化的效果好了，但由于维数的增加，使优化复杂化了。反之，设计变量定得过少，虽然优化简单了，但体现优化的效果差了。一般来说，对优化目标影响较大的参数，定为设计变量，而对优化目标影响不大的参数，根据经验和要求定为设计常量，有的常量可以在优化过程中修改，但可以不是设计变量。例如，为了使优化过程不致太复杂，往往将材料的许用应力定为常量，但优化过程中，发现材料选的不太合适，这时可以改变材料的许用应力，但它在优化过程中仍然是设计常量，而不是设计变量。

二、约束条件

设计者虽然对设计变量可以进行修改和调整，但这种修改和调整是受到各种条件的限制，例如，材料强度的限制，齿轮不产生根切的限制等。因此在设计过程中，为得到可行的设计方案，必须根据设计要求，对设计变量的取值加以限制，这些限制统称为约束条件。其函数称为约束函数。

1．不等式约束和等式约束

在工程设计中，不等式约束较多，表达式为

$$\left.\begin{aligned} &g_i(\boldsymbol{X})=g_i(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)>0 \\ \text{或}\quad &g_i(\boldsymbol{X})=g_i(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)<0 \end{aligned}\right\}\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{1-1}$$

式中　n——设计变量的个数，即优化的维数；

m——不等式约束条件的个数。

例如，齿轮根切约束条件，$g_i(\boldsymbol{Z})=z_i-17>0$

等式约束表达式为

$$h_j(X)=h_j(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=0$$
$$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ p;\ \ p<n) \tag{1-2}$$

式中　p——等式约束条件的个数。

例如，在同一传动组中，两对标准齿轮啮合的中心距约束条件为 $h_j(z_i)=\frac{m}{2}(z_1+z_2)-\frac{m}{2}(z_3+z_4)=0$，式中 m 为模数，z_1 和 z_2 为一对啮合齿轮的齿数，z_3 和 z_4 为同一传动组另一对啮合齿轮的齿数。

有一个等式约束，就有从优化问题中消去一个设计变量的可能，如 $h(x_1,\ x_2,\ x_3)=0$，等价于 $x_3=\varphi(x_1,\ x_2)$，目标函数 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 可变为 $f[x_1,\ x_2,\ \varphi(x_1,\ x_2)]$，约束函数则为 $h[x_1,\ x_2,\ \varphi(x_1,\ x_2)]$，于是把三维优化问题转化为二维优化问题。但对复杂的等式约束函数，这样处理有时是很困难的，往往不采用消除设计变量的办法处理，而直接用等式约束函数。

2. 边界约束和性能约束

边界约束又称为区域约束，是设计变量的取值范围，可以直接由设计变量写出，往往是以显函数形式出现，比较容易处理，例如，齿轮齿数的约束，$17\leqslant z_i\leqslant 80(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，其约束函数为 $g_1(Z)=17-z_i\leqslant 0$；$g_2(Z)=z_i-80\leqslant 0$。

性能约束，又称为性态约束，由设计性能决定的约束条件，如齿轮的强度、轴的刚度等限制。对于简单的设计，其性能约束可以是显式函数。但在一般情况下，结构的性态约束往往都是以隐式依赖于设计变量，其函数关系是通过求解结构静力学或动力学方程而得，这需要大量的结构分析，是结构优化设计中的最大困难之一。因此，对复杂的结构设计，如有限元优化，往往采用近似重分析等处理方法，以减少重分析的计算工作量（见§6-3二）。

3. 约束条件的规范化

约束条件的规范化有以下两重含义：

（1）为了判断约束条件是否满足要求，必须将约束函数规范化，也就是将所有的不等式约束条件都规范化为大于零或小于零的函数，将等式约束都规范化为等于零的函数的标准形式，见式（1-1）和（1-2）。这样，在优化过程中，当设计变量调整取某值时，就不难判断它是否满足约束条件。当按式（1-1）和式（1-2）计算的约束函数值大于零（不等式约束规范化为大于零的函数）或小于零（不等式约束规范化为小于零的函数）或等于零（等式约束规范化为等于零的函数）时为满足约束条件，否则为不满足约束条件。

（2）约束条件变化的数量级要与设计变量变化的数量级相当。例如，约束函数 $g_1(X)=x_1\geqslant 0.01$，$g_2(X)=x_2\geqslant 10000$，按式(1-1)规范化为 $g_1(X)=x_1-0.01\geqslant 0$，$g_2(X)=x_2-10000\geqslant 0$，或 $g_1(X)=0.01-x_1\leqslant 0$，$g_2(X)=10000-x_2\leqslant 0$，如果按前者大于零的形式规范化，则

当　　$x_1=0.01$　　$g_1\geqslant 0$

　　　$x_2=10000$　　$g_2\geqslant 0$

当设计变量以倍数增加时

$x_1=0.02$　　$g_1\geqslant 0.01$；　　$x_1=0.03$　　$g_1\geqslant 0.02$

$x_2=20000$　　$g_2\geqslant 10000$；　　$x_2=30000$　　$g_2\geqslant 20000$

显然，设计变量变化的量级，与约束函数变化的量级相差较大，这对优化是不利的，为此将约束函数再进一步规范化，使两者变化的量级相当。即

$$g_1(X)=\frac{x_1}{0.01}-1>0\text{；}\quad g_2(X)=\frac{x_2}{10000}-1>0$$

这时，当设计变量以倍数增加时，则

$$x_1=0.02 \quad g_1\geqslant 1\text{；}\ x_1=0.03 \quad g_1\geqslant 2$$

$$x_2=20000 \quad g_2\geqslant 1\text{；}\ x_2=30000 \quad g_2\geqslant 2$$

（3）各设计变量的量级要相当，当各设计变量 X 相差较大时，例如 $x_1>0.01$，$x_2>10000$，为加快优化的收敛速度和提高优化效果，采用设计变量代换方法，使设计变量的量级相当。

如果

$$\left.\begin{aligned}&\min f(X),\ X=[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T\\ \text{满足于}\quad &g_i(X)>0\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\\ &h_j(X)=0\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ p;\ p<n)\end{aligned}\right\}\tag{1-3}$$

令

$$Y=\frac{X}{X^{(0)}},\ Y=[y_1\ y_2\ \cdots\ y_n]^T\tag{1-4}$$

式中 $X^{(0)}$ 为设计变量 X 的初始值。用变量 Y 代换设计变量X，则式（1-3）转换为

$$\left.\begin{aligned}&\min f(X^{(0)},Y)\quad Y=[y_1\ y_2\ \cdots\ y_n]^T\\ \text{满足于}\quad &g_i(X^{(0)},Y)>0\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\\ &h_j(X^{(0)},Y)=0\quad(j=1,\ 2,\cdots,p;\ p<n)\end{aligned}\right\}\tag{1-5}$$

最优解为 Y^*，代入式（1-4）得设计变量 X 的最优解为 $X^*=Y^*X^{(0)}$，最优值为 $f(X^*)$。

约束条件和目标函数可以互相转化，例如，对设计的产品有成本低、重量轻、体积小、性能好等几方面要求。设计者可以根据设计要求，取重要的一个指标作为目标函数，则其他的要求指标可作为约束条件加以限制。它们之间可以根据要求，互相转化。

三、优化设计的数学模型

综上所述，优化设计可以归结为：在满足约束条件下，寻求设计变量的最优解，使目标函数达到最优值。用数学模型表示

设有 n 个设计变量，

$$X=[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T$$

在满足 $g_i(X)=g_i(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\leqslant 0\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$

$h_j(X)=h_j(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=0\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ p;\ p<n)$

约束条件下，使目标函数 $f(X)=f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 最小，或简记为

$$\left.\begin{aligned}&\text{求设计变量 }X,\ X=[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T\\ &\min f(X)\\ \text{s.t.}^{\ominus}\quad &g_i(X)\leqslant 0\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\\ &h_j(X)=0\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ p;\ p<n)\end{aligned}\right\}\tag{1-6}$$

如果要求在满足约束条件下，使目标函数达到极大值，则目标函数的模型为

㊀ s.t.表示满足于约束。

$$\min[-f(X)] \quad X\in R^n$$

式中　R^n——n 维欧氏空间。

〔例1-1〕　内燃机气门弹簧的优化设计

设计要求：大批量生产；气门完全开启时弹簧最大变形量 $\lambda=16.59$mm；工作载荷 $F=680$N；工作频率 $f=25$Hz；材料 50CrVA 钢丝。

结构要求：钢丝直径 $d=2.5\sim9.5$mm；外径 $D=30\sim60$mm；工作圈数 $n\geqslant3$；弹簧指数 $c\geqslant6$。

传统的设计方法是根据 F、λ 及结构要求，确定弹簧中径 D_0，钢丝直径 d，工作圈数 n，然后验算强度、刚度及其他性能，如果不满足要求，修改参数，要经过多次试算，才能确定出较好的设计方案。

用优化设计方法，先建立数学模型，然后选择合适的优化方法，借助于电子计算机，自动寻求优化设计参数。

1. 目标函数

以节省材料为出发点，确定以质量最小为优化的目标函数。

$$f(X)=\frac{\pi}{4}d^2\pi D_0(n+n_0)\rho$$

式中　D_0——弹簧中径，单位为 mm；

n_0——弹簧死圈数（支承圈数），一般取 $n_0=1.5\sim2$；

ρ——弹簧钢丝密度，$\rho=7.6\times10^{-6}$kg/mm^3。

2. 设计变量

$$X=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}d\\D_0\\n\end{Bmatrix}=[d\quad D_0\quad n]^T$$

其他参数定为设计常数。

3. 约束条件

强度约束

$$\tau=K\frac{8FD_0}{\pi d^3}\leqslant[\tau]$$

式中　K——弹簧补偿系数，$K\approx\dfrac{1.6}{(D_0/d)^{0.14}}$；

$[\tau]$——弹簧的许用剪应力，单位为 N/mm^2。

代入上式得

$$\frac{2767.6D_0^{0.86}}{d^{2.86}}-[\tau]\leqslant0$$

刚度约束

$$|k_1-k_2|\leqslant k_1/100$$

式中　k_1——设计要求的弹簧刚度；

$$k_1=\frac{F}{\lambda}=\frac{680}{16.59}\text{N/mm}\approx41\ \text{N/mm}$$

k_2——实际弹簧刚度；

$$k_2=\frac{Gd^4}{8D_0^3n}$$

G——切变模量。

代入上式得

$$\left|41-\frac{Gd^4}{8D_0^3n}\right|-0.41\leqslant 0$$

稳定性约束

两端固定式的弹簧稳定性条件为

$$\frac{H_0}{D_0}\leqslant 5.3,\quad H_0=(n+n_0-0.5)d+\lambda_b$$

式中 H_0——自由高度；

λ_b——完全并紧时极限变形量，$\lambda_b=1.1\lambda$。

代入上式得

$$\frac{(n+n_0-0.5)d+18.25}{D_0}-5.3\leqslant 0$$

无共振约束

$$f_0\geqslant 10f$$

式中 f_0——弹簧固有频率，$f_0=3.56\times 10^5\dfrac{d}{D_0n}$，单位为 Hz。

代入上式得

$$250-3.56\times 10^5\frac{d}{D_0^2n}\leqslant 0$$

结构参数约束：

$$c\geqslant 6 \quad 即 \quad 6-D_0/d\leqslant 0$$

$$n\geqslant 3 \quad 即 \quad 3-n\leqslant 0$$

$$2.5\leqslant d\leqslant 9.5\begin{cases}2.5-d\leqslant 0\\ d-9.5\leqslant 0\end{cases}$$

$$30\leqslant D_0+d\leqslant 60\begin{cases}30-(D_0+d)\leqslant 0\\ D_0+d-60\leqslant 0\end{cases}$$

弹簧优化设计的数学模型归结为

$$\boldsymbol{X}=[d \quad D_0 \quad n]^T$$

$$\min f(\boldsymbol{X})=\frac{\pi}{4}d^2\pi D_0(n+n_0)\rho$$

满足规范化后的约束条件为

（1）强度 $$g_1(\boldsymbol{X})=\frac{2767.6D_0^{0.86}}{d^{2.86}[\tau]}-1\leqslant 0$$

（2）刚度 $$g_2(\boldsymbol{X})=\frac{\left|41-\dfrac{Gd^4}{8D_0^3n}\right|}{0.41}-1\leqslant 0$$

显然，设计变量变化的量级，与约束函数变化的量级相差较大，这对优化是不利的，为此将

（3）稳定性　$g_3(X)=\dfrac{Gd^5(n+1.5)+5984D_0^3n}{5.3GD_0d^4}-1\leqslant 0$

（4）无共振　$g_4(X)=1-3.56\times10^4\dfrac{d}{25D_0^2n}\leqslant 0$

（5）结构参数　$g_5(X)=1-D_0/6d\leqslant 0$

$g_6(X)=1-n/3\leqslant 0$

$g_7(X)=1-d/2.5\leqslant 0$

$g_8(X)=d/9.5-1\leqslant 0$

$g_9(X)=1-(D_0+d)/30\leqslant 0$

$g_{10}(X)=(D_0+d)/60-1\leqslant 0$

以上（1）～（4）为弹簧的性能约束，（5）为边界约束。

本例是一个有约束三维非线性规划问题，即在满足约束条件下，优化设计变量 D_0、d、n，使目标函数 $f(X)$的值为最小。

§1-2　优化设计的几何概念

一、设计空间、约束曲面（线）、目标函数的等值线

为了更形象地了解优化设计的基本概念，本节用几何图形加以描述。在 n 维欧氏空间中，可以用向量表示设计变量，称为设计向量，通常记作 X，$X=[x_1\ x_2\cdots x_n]^T$。如果建立一个 n 维坐标轴空间，每个坐标轴代表一个设计变量，则空间中每一个点，对应唯一的一个设计方案，空间中所有的点称为设计点，这样的空间称为设计空间。如果有二个或三个设计变量，则称为二维或三维设计空间。通常设计变量的个数远远大于三个，设计空间就是一个高维空间。虽然高维空间的概念比较抽象，但建立在二维、三维空间上的很多几何概念可以很容易地推广到高维空间中去。

约束函数在设计空间中可以用约束曲面（在二维空间就是约束曲线）来表示。式(1-6) 中的约束函数 $g_i(X)\leqslant 0$ 和 $h_j(X)=0$，在设计空间中代表一些空间曲面。在二维空间中，它们分别代表一些曲线，下面以二维空间为例。等式约束 $h_j(X)=0$ 和不等式约束的边界 $g_i(X)=0$ 的曲线称为约束曲线。等式约束表示设计点必须落在等式约束曲线上；不等式约束，设计点不一定落在曲线上，而要求落在一个满足约束条件的区域内。以图 1-1 不等式约束为例，粗实线表示不等式约束曲线，不画阴影线的一侧为满足约束条件。当设计点满足所有的约束条件时，称这个设计为可行的，其设计点称为可行的设计点，所有可行设计点的集合称为可行域，如图中粗实线包围的封闭区域。如果不满足其中一个约束条件的设计，称为不可行设计，其设计点为不可行设计点，这些点的集合称为不可行域。构成可行域边界的一段段的约束曲线的总体称为复合约束曲线。如果是封闭

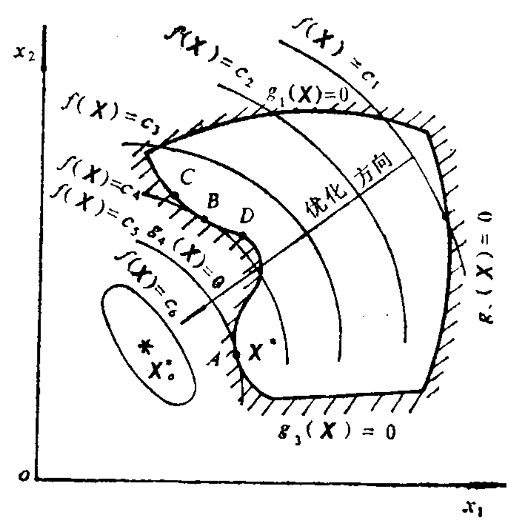

图1-1　二维设计空间

的，则称为封闭约束图。

目标函数在设计空间中可以通过等值线（或等高线，见附录Ⅰ）来表示它的值的变化情况。例如，目标函数 $f(x_1, x_2)=\frac{x_1^2}{2p}+\frac{x_2^2}{2q}+c$，当 p、q、c 皆大于零时，在〔$f(x_1, x_2)$，x_1，x_2〕的三维空间中为一椭圆抛物线（如图1-2所示）。令目标函数 $f(X)$ 依次等于常数 c_1、c_2、c_3、c_4（$c_1<c_2<c_3<c_4$），则得到一组相应高度的水平面，该水平面与椭圆抛物面的交线为椭圆，它在（x_1，x_2）二维设计空间中的投影就是一族等高椭圆曲线。该族曲线就叫目标函数 $f(X)$ 的等值线（或叫等高线）。等值线的分布规律反映目标函数值的变化规律。对极小化问题来说，等值线越向中心，其函数值越小，椭圆的中心为函数的极值点。对于高次非线性函数，其等值线形状是复杂的，但一般情况下，在极值点附近的等值线近似于一族共心椭圆，而极值点正好就是这个椭圆族的共圆心。（如图1-1中细实线为目标函数的等值线，共圆心＊为极值点）。所以求函数的极值点问题，实际上就是求等值线族的共同中心的问题。

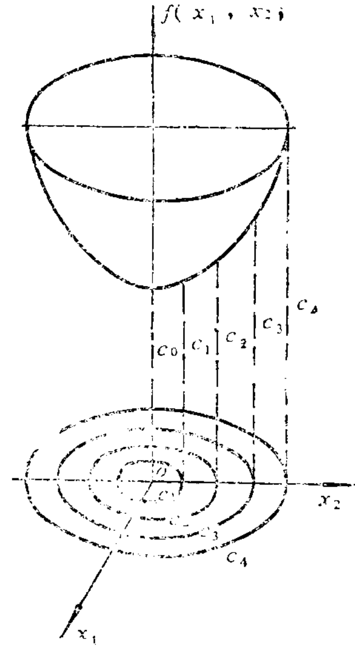

图1-2　目标函数的等值线

二、寻求极值点的途径

有约束优化问题的求解，就是在设计空间的可行域内寻求极值点。如图1-3a为椭圆等值线的寻优示意图，从初始点 $X^{(0)}$ 开始，沿着目标函数值减小的某一方向，一步一步地搜索（如图中箭头所示），直到中心，到达极值点 X^* 为止。等值线的椭圆长半轴和短半轴的比值越大，优化的速度就越慢。当等值线为圆时，则从任意一点出发，沿负梯度（见附录Ⅰ）方向搜索，一步即可达到极小点，如图1-3b所示。

优化设计就是选择一种合适的优化方法，使设计点在设计空间的可行域内向着目标函数值减少的方向搜索，直到设计者满意为止。其最优点记作 $X^*=[x_1^* \; x_2^* \cdots x_n^*]^T$，对应的设计方案不仅是可行的，而且是最优的。图1-1中 X_0^* 点是无约束（不考虑约束条件）的最优设计点，它在可行域之外。X^*（A 点）为有约束的最优设计点，它既在可行域内，又最接近 X_0^* 点。

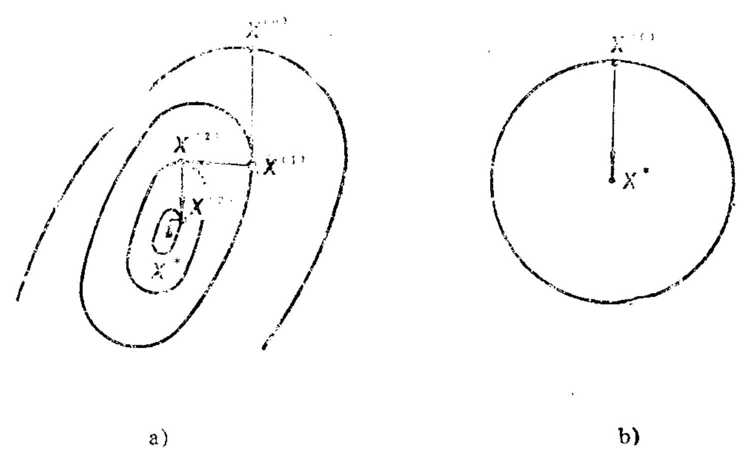

图1-3　寻求极值点

三、局部最优和全局最优

如果在 X^* 之外，找不到比 X^* 更优的可行解，则称 X^* 是一个全局最优解，如图1-1中 A 点，其 $f(X_A)$ 比其它任何一点的目标函数值 $f(X)$ 更接近于 $f(X_0^*)$，则称 A 点为全局最优点；如果在 X^* 的附近找不到比 X^* 更优的点，但在较远处还有更优的点存在，则称 X^* 为局部最优解，如 B 点，在 B 点的附近 C 和 D 点都离 X_0^* 更远，但在较远的 A 点，却优于 B 点，则称 B 点为局部最优点。显然，全

局最优解也一定是局部最优解。优化设计的任务，当然希望找到全局最优解，但在一般情况下，很难找到全局最优解，多数的优化算法给出的只是局部最优解，然而在实际工程设计中，局部最优解已满足工程设计要求。

§1-3 常用优化设计方法和建立数学模型方法

设计者在优化设计过程中，要做两方面工作，一是建立数学模型，包括结构、系统分析模型和优化模型；二是根据设计任务要求和数学模型类型选择合适的优化方法。有关"数学模型"详见第二章，"优化方法"详见第三、四、五章。本章只对优化方法和建模方法作一简单的概述。

一、优化设计方法

1．解析法

解析法是用古典的微分法或变分法直接求解，它只适用于维数不高的最简单的显函数模型。对较复杂的工程问题模型很难求解。

2．图解法

图解法是在设计空间作出可行域和目标函数的等值线，在可行域内寻找极值点。

图解法只适用于设计变量小于 2 的最简单问题。例如，二维双公用齿轮传动优化设计（见第六章§6-1）。

3．数学规划法

工程问题的数学模型，一般来说，都比较复杂，维数也比较高。用上述两种方法求解是很困难的。50年代后，随着电子计算机技术的发展，产生了数值计算法，为解决实际工程优化问题提供了有效的方法。数学规划法就是采用数值计算法迭代求解。其步骤如图1-4所示。点划线方框之外的步骤，由设计者完成；点划线方框之内的步骤就是优化的自动分析和综合的迭代过程，由计算机自动完成。

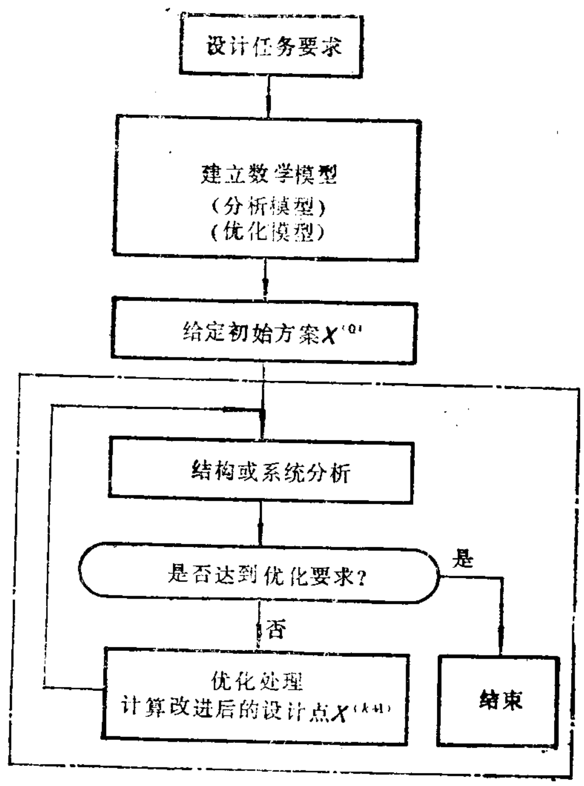

图1-4　优化迭代过程

图中优化处理，就是计算改进后新的设计点 $X^{(k+1)}$，它的主要任务有两项：一是选择优化的搜索方向 $S^{(k)}$，沿着这一方向搜索，会使目标函数值减小；二是在此搜索方向上，选择最优的搜索步长 α_k，以得到改进的设计方案。迭代公式为

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \alpha_k S^{(k)} \qquad (1\text{-}7)$$

式中　$X^{(k+1)}$——改进后的设计变量；

k——改进前的迭代次数，$k = 0, 1, 2, \cdots, p$；

p——迭代的总次数；

$X^{(0)}$——迭代的初始设计变量；

$S^{(0)}$——迭代的初始搜索方向；

α_0——迭代的初始搜索步长；

$X^{(k)}$、$S^{(k)}$、α_k——改进前的设计变量、搜索方向、搜索步长。

按式(1-7)迭代后，必须使目标函数值逐渐减小。即

$$f(X^{(k+1)}) < f(X^{(k)})$$

直到满意，停止迭代。

由于作一次结构或系统分析要花很多的时间，所以应尽量减少重分析的次数(迭代次数)和重分析的计算时间。同时，也要减少优化处理（改进设计）的工作量，即减少优化方法本身的计算时间。

图1-5为优化搜索的示意图。

根据选择搜索方向$S^{(k)}$和搜索步长α_k的方法不同，产生了各种不同的优化方法，如单纯形法、牛顿法、共轭梯度法、变尺度法等等。

数学规划法是有数学理论为基础的较严格的优化方法。但随着设计变量的增加，迭代次数将急剧地增加。因此数学规划法只能用于一般较简单的工程设计问题。对于解决较复杂的机床问题，有时是不理想的。为满足工程设计要求，60年代后，又产生了优化准则法。

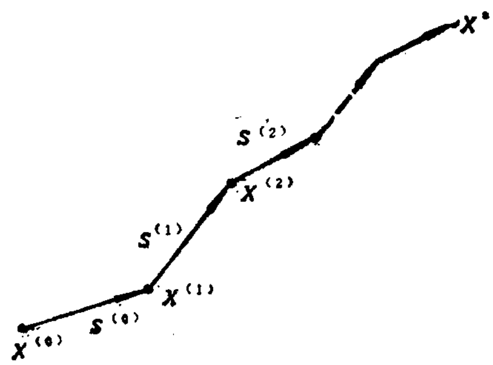

图1-5 优化搜索示意图

4. 准则法

准则法也属于数值计算方法，该法是按照事先确定的一组优化准则条件寻优。其迭代步骤与图1-4相同，但迭代的公式不同。准则法的迭代公式为

$$X^{(k+1)} = C^{(k)}X^{(k)} \tag{1-8}$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots, p$$

式中，$X^{(k+1)}$是满足准则条件的改进后的设计点；p为迭代的总次数。式(1-8)是根据准则法中采用的准则条件来构造的数学模型。

准则法与数学规划法相比，缺乏严格的数学理论，有时凭设计者的经验做某些近似处理，近似程度较大，但迭代次数与设计变量无关，更适用于变量较多的复杂的工程优化设计问题。

5. 机床结构动态修改法——人—机交互式结构修改法

机床整机和部件动态优化问题是比较复杂的，采用上述两种数值计算法有时也很难实现。目前更多的是采用人-机交互式结构修改法。它的基本思想是，计算机完成动态分析计算，并辨别结构修改的部位和内容，然后由设计者通过人机对话修改结构参数，再由计算机进行重分析。反复分析、修改，直至设计者满意为止。这种修改结构参数的方法，虽然不如上述数值计算法精确，但对复杂的机床动态优化问题还是行之有效的方法。

根据辨别修改结构参数的方法不同，分为能量平衡结构修改法和灵敏度分析结构修改法。

（1）能量平衡结构修改法　该方法是建立在试验模态分析的基础上（模态分析详见第二章§2-4）。首先对初步设计的机床方案进行试验模态分析，计算能量分布率，找出机床薄弱环节。根据能量平衡准则，辨别结构修改（改进）的部位和内容。然后由设计者通过人机

对话修改结构参数。修改后，再进行试验模态分析，反复修改、分析，直到满意为止。这种方法需要进行多次试验模态分析，比较麻烦。

（2）灵敏度分析结构修改法　图1-6为灵敏度分析结构修改法框图。该方法是通过对系统灵敏度分析，辨别结构修改的部位和内容，然后由设计者通过人机对话修改结构参数，再由计算机计算结构修改后的动态特性，如果不满意，重复上述过程，直到满意为止。

根据修改后动特性计算方法的不同，又分为三种结构修改法：1）连续摄动法；2）双模态空间分析法；3）直接法（详见第五章§5-2)。

与能量平衡修改法比较有如下优点：

1）如果图1-6中第一步，用试验模态分析方法建立数学模型，那么结构修改后不必再进行试验模态分析，而用计算的方法预测修改后的特性，不满意再修改、再计算，直到满意。省去了多次试验模态分析的麻烦。

2）因为用灵敏度分析来辨别结构修改的部位和内容，因此修改后的方案更接近最优。

该方法用在较复杂的结构动态优化设计，效果是满意的。

图1-7为常用优化方法分类。

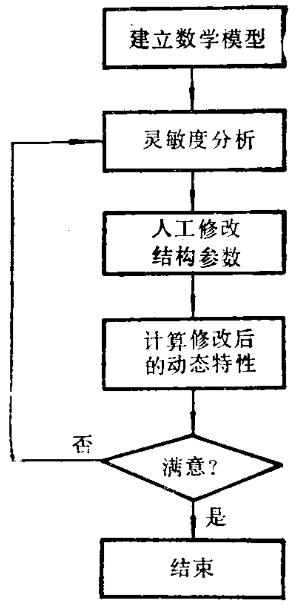

图1-6　灵敏度分析结构修改法框图

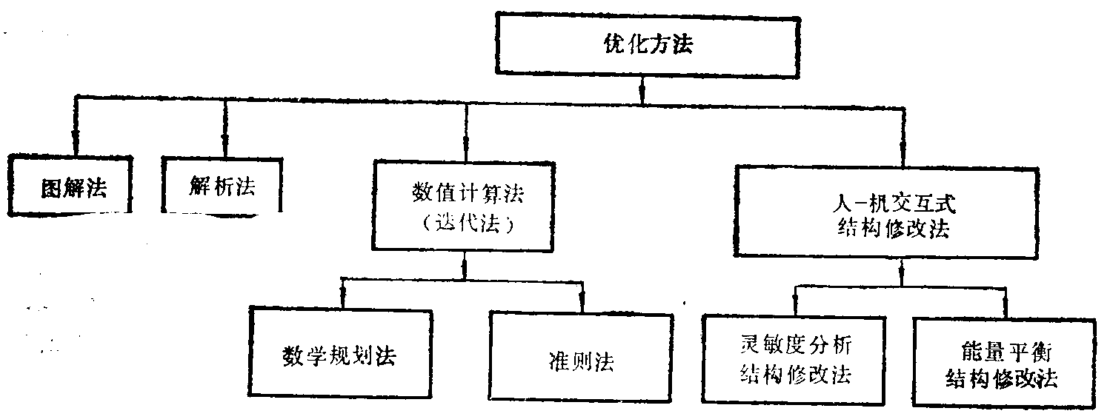

图1-7　常用优化方法

二、机床常用建立数学模型方法

综上所述，优化设计就是用现代优化设计方法，对数学模型求解的不断分析和综合的迭代过程。显然，对设计者来说，重要而关键的任务是根据设计任务要求，建立反映实际情况的数学模型，并选择合适的优化方法求解。

在优化迭代过程中，首先对系统进行分析，因此要建立分析数学模型，分析之后进行优化。用数值优化法（数学规划法或准则法），必须建立优化模型，即建立目标函数和约束函数。对复杂的机床整机优化，难以建立明确的优化模型。因此，用人机对话结构修改法，改进机床设计。不管用哪种优化方法，都必须建立分析模型。表1-1为机床常用建立分析数学模型的方法。

表1-1　机床常用建立数学模型方法

模型名称		特点	适用场合
理论计算模型	集中参数模型	模型简单，模拟精度低，计算量小，占计算机容量少	适用于质量集中的高刚度结构，如卡盘，刀盘、飞轮、平衡重等
	分布质量梁模型	模型简单，模拟精度和计算量介于集中参数模型和有限元模型之间	适用于轴类及细长形而截面变化不大的床身、立柱、横梁等"梁型"结构
	有限元模型	单元划分合适，可以得到较高的模拟精度，但计算量大，占计算机容量大	适用于复杂的箱型结构及有隔板、加强筋的床身，立柱等结构
试验模态分析模型	频域分析法	在频域范围内，由试验数据构造数学模型	适用于有结合面的机床部件和整机的动态性能分析
	时域分析法	在时域范围内，由试验测得时间序列，直接构造数学模型	
数字仿真模型		用计算机求解系统状态方程，得到系统动态响应的时间历程，改变系统参数，得到不同的动态响应	用于液压元件和系统的动态分析和优化

第二章　机床常用建立数学模型方法

机床优化过程就是不断分析、综合的迭代过程，每迭代一次就是重分析、再改进一次，周而复始，直至满意为止。因此优化问题首先要解决建立数学模型问题。重分析就要有分析数学模型，改进设计（优化设计）就要有优化数学模型（指目标函数和约束函数）。优化模型要根据具体不同设计任务要求而定，将在第六章优化实例中列举，在此不一一赘述。本章主要介绍机床常用分析数学模型的建立方法。

§2-1　建立数学模型的原则和方法

数学模型是实物现象的特征或本质的数学表现，可以把它看成是用抽象符号来表示系统实物的各种物理、几何、时间动态过程中各主要因素间内在联系的关系式。正确建立数学模型，也就是把握住了它的内在联系和解决这一问题的方法。但是，并不是所有的工程实际问题都能用数学表达式加以正确描述的。在机床设计中，有不少情况，往往由于对现象的机理掌握不很透彻而不能给现象以某种明确的数学表达式，因此，自动优化是很困难的。这时可以采用交互方式达到优化的目的。

一般在建立数学模型之前，要对所研究问题现象的特征、机理加以仔细地研究，抓住本质性的主要因素，并进行简化和抽象化的工作。简化的结果既要方便于计算，又要反映实际问题。除此之外，还可以通过大量的实验，用实验数据构造数学模型。

1. 建立数学模型的原则及考虑的问题

（1）建立的数学模型要能够准确可靠地反映所设计的机床特性、并说明设计问题所要达到的目标及设计变量的限制条件。

（2）由于机床设计的实际问题比较复杂，影响的因素也较多，如果这些因素都要考虑，会使问题复杂化，且不易解决，一般来说，建立模型之前总是要对实际问题加以必要的简化和假设，对实际问题影响不大的因素可以忽略不计，但简化后的模型必须反映实际情况，误差要在允许范围之内。

（3）建立的数学模型要考虑便于计算处理，计算过程要简化，要尽量减少分析和优化的时间，如果建立起的模型过于复杂，不便于以后的处理，那么这个模型也就失去意义。

2. 常用建模方法

（1）理论计算模型　用理论分析的方法，用物理、力学公式对实际问题加以数学描述的模型。

（2）试验分析模型　不能用理论分析或不能用物理、力学公式加以描述的问题，常常采用试验方法，取得大量实验数据，应用概率论，回归分析和模态分析等方法构造数学模型。

（3）数字仿真模型　对于特性较复杂的系统，难以用试验分析方法构造数学模型，这时可以用计算机数字仿真方法模拟系统的动态特性。

下面分别介绍机床传动系统和结构分析常用的几种建模方法。

§2-2 机床传动系统理论分析模型

传动系统优化设计的步骤一般是

（1）设计者首先根据设计要求确定传动方案，包括结构网和传动系统图。当然，这一步也可以进行优化，即优化传动方案，但是一般来说，确定传动方案时，所考虑的问题比较

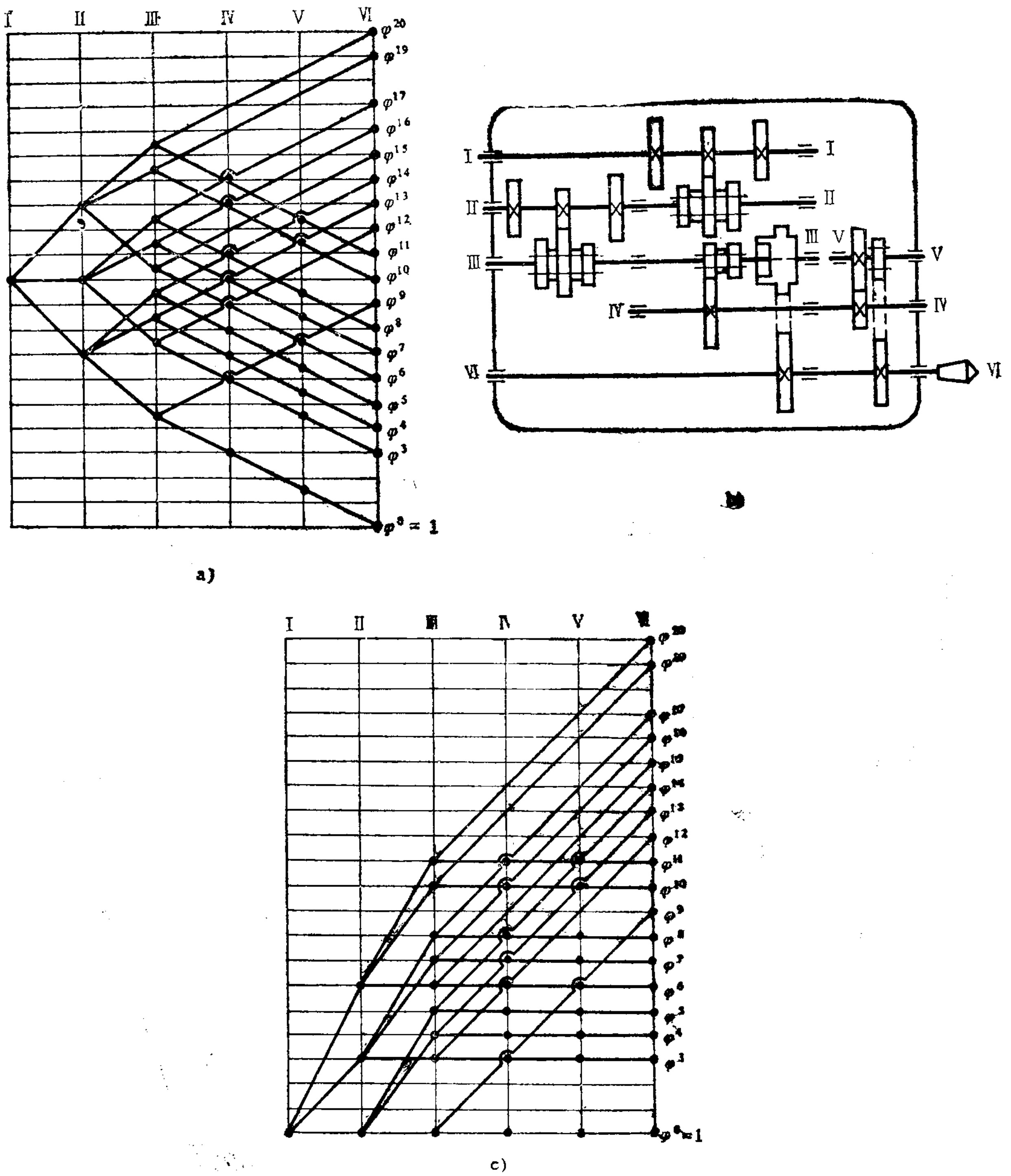

图2-1 传动方案

a）对称型结构网 b）传动系统 c）下平线型结构网