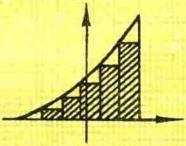
经济数学基础

山东行政学院
山东省经济管理干部学院 数学教研室编

（一）



山东大学出版社

鲁新登字 09 号

经济数学基础
（一）
山东行政学院
山东省经济管理干部学院 数学教研室编
*
山东大学出版社出版发行
济南文东印刷厂印刷
*
850×1168 毫米　32 开　9.5 印张　238 千字
1993 年 9 月第 1 版　1993 年 9 月第 1 次印刷
印　数 1—10000 册
ISBN 7—5607—1124—3/O·77
定　价：6.50 元

前　言

科学技术是第一生产力。一个具有十二亿人口的大国，要实现经济的腾飞，步入世界经济强国的行列，必须培养一支宏大的掌握现代科学技术和管理技能的劳动大军。

目前，我国的人力资源在数量上具有很大的优势，但是在素质上还很不适应改革开放和发展社会主义市场经济的需要。因此，山东省委、省政府高度重视对在职人员进行大规模的教育培训，特别是对干部进行比较系统的文化、科学、技术和管理知识的教育，以培养一支能够驾驭社会主义市场经济、具有从事现代经济建设本领的干部队伍。

随着我院培训任务的不断扩大，为保证经济管理干部、国家机关工作人员和其他干部的培训质量，为实现“科教兴鲁”的发展战略贡献力量，我们决定编写一套在理论和实践的结合上具有一定特色的、适应在职干部和从业人员需要的系列教材。

鉴于时间仓促，我们的力量有限，缺点和错误一定不少，敬请读者批评指正。

山东行政学院
山东省经济管理干部学院教材编审委员会

一九九三年八月

目　　录

第一篇　微积分

第一篇　微积分

第一章　函　数

马克思说过：一种科学只有当它成功地运用了数学的时候才能达到完善的地步。事实亦是如此，在各门类科学中，数学总是占着重要的地位，它是科学基础的基础。

微积分研究的主要对象是函数，它是以极限法为主要工具对现实世界的变量在某一过程中的相互依赖、相互制约的关系加以分析研究。

§1.1　集合

（一）集合的基本概念

我们常常研究某些事物组成的集体，例如一批产品、全体实数、某单位全体职工、社会上流通的某种货币等等，这些事物的集体都是集合。

下面举几个简单的例子

例 1　全体整数。

例 2　方程 $x^2-2x+1=0$ 的实根。

例 3　圆 $x^2+y^2=1$ 在第一象限的所有的点。

下面给出集合的定义：

集合：具有某种属性的事物的全体。有时又简称为集。一般用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示。

元素：构成集合的事物或对象，称为集合的元素。有时又简称

为元。一般用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 来表示。

$a \in A$：表示 a 是集合 A 的元素，读作"a 属于 A"。

$a \notin A$：表示 a 不是集合 A 的元素，读作"a 不属于 A"。

有限集：含有有限个元素的集合。如例 2，方程 $x^2-2x+1=0$ 的根为 $x=1$，它的根的集合只有 1 个元素组成，所以是有限集。

无限集：含有无限个元素的集合。如例 1 和例 3，全体整数有无限多个，圆 $x^2+y^2=1$ 落在第一象限的弧上有无数多个点，所以，它们都是无限集。

单元素集：只含一个元素的集合。如例 2。

通常用 N、Z、Q、R、C 分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集、复数集。用 Q^+、Q^- 分别表示正有理数集、负有理数集。用 R^+、R^- 分别表示正实数集、负实数集。

（二）集合的表示法

1. 列举法：按任意顺序列出集合的所有元素，并用大括号{ }括起来。

如例 2 可表示为 $A=\{1\}$

例如，由 a、b、c 三个元素组成的集合 A，可表示为：

$A=\{a,b,c\}$

再如，直线 $y=x-1$ 与抛物线 $y=x^2-1$ 的交点的集合。

由方程组 $\begin{cases} y=x-1 \\ y=x^2-1 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=0 \\ y_2=-1 \end{cases}$ 即交点为 $(1,0)$ 和 $(0,-1)$，该集合可表示为：

$A=\{(1,0),(0,-1)\}$

2. 描述法：把集合中的元素的共同特性描述出来，写在大括号内。

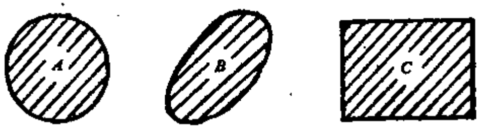
如例 1 至例 3 可分别表示为：

$Z=\{x \mid x \text{ 为整数}\}$

$= \{x \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$

$B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0\}$

集合以及集合间的关系可以用图形表示，称为文氏图。文氏图是用一个简单的平面区域代表一个集合，如图 1—1。集合内的元素以区域内的点表示。



集合A　　集合B　　集合C

图 1—1

（三）空集、全集与子集

空集：不含任何元素的集合，记作 $\varnothing$。

全集：由所研究的所有事物构成的集合，记作 U。

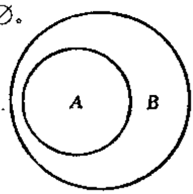


图 1—2

子集：如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，即"如果 $a \in A$，则 $a \in B$"，则称 A 为 B 的子集。记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A。如图 1—2。

规定"空集是任意集合的子集"。由定义显然有 $A \subseteq A$，即"集合 A 是自身的子集"。A 与 $\varnothing$ 称作集合 A 的"当然子集"。

真子集：如果集合 B 是集合 A 的子集，且 A 中至少有一个元素不属于 B，则称 B 是 A 的真子集。记作 $A \supset B$ 或 $B \subset A$。

例 4　某车间生产的全部零件都是合格品，则废品的集合为空集。

例 5　如果我们讨论问题仅限于实数，则实数集为全集。

例 6　有理数集 Q 是实数集 R 的子集，且为真子集。有 $Q \subset R$。

再如，$x^2+1=0$ 的实数根的集合为空集。

平面上两条平行直线的交点的集合也是空集。

请注意 $\varnothing$，$\{0\}$ 及 $\{\varnothing\}$ 的区别。

$\{0\}$ 表示含有元素 0 的单元素集合，而 $\{\varnothing\}$ 表示由元素 $\varnothing$ 组成的单元素集合。它们都不是空集。

例 7　分别写出下列集合的全部子集：

$(1)A_1=\{a_1\}$　$(2)A_2=\{a_1,a_2\}$　$(3)A_3=\{a_1,a_2,a_3\}$

解：(1) 显然 A_1 的子集为 $\varnothing$ 和 A_1，共 2 个。

(2)A_2 的子集有 $\varnothing$，$\{a_1\}$，$\{a_2\}$ 和 A_2 共有 4 个。

(3)A_3 的子集有 $\varnothing$，$\{a_1\}$，$\{a_2\}$，$\{a_3\}$，$\{a_1,a_2\}$，$\{a_1,a_3\}$，$\{a_2,a_3\}$ 和 A_3，共有 8 个。

仔细观察一下例 7，你会发现：

单元素集合的全部子集有 2 个；

2 个元素组成的集合的全部子集有 4 个，即 2^2 个；

3 个元素组成的集合的全部子集有 8 个，即 2^3 个。

你会猜想：n 个元素组成的集合的全部子集是否恰好是 2^n 个呢？请看下例。

例 8　n 元集合的子集恰有 2^n 个（其中 n 为自然数），试用数学归纳法证明。

证明：设 n 元集合为　$A_n=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$

(1) 当 $n=1$ 时，A_1 的子集有 $\varnothing$ 和 A_1，为 2^1 个，命题成立；

(2) 设 $n=k$ 时，A_k 的子集恰有 2^k 个，它们分别是：

$\varnothing$

$\{a_1\},\{a_2\},\cdots,\{a_k\}$

$\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\},\cdots,\{a_{k-1},a_k\}$

……

$\{a_1, a_2, \cdots, a_K\}$

(3) 令 $n = k + 1$,即 $A_{k+1} = \{a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}\}$

显然,(2) 中所列集合均是 A_{k+1} 的子集,有 2^k 个。

将 a_{k+1} 添加到这 2^k 个集合中,便得到与其不相同的 2^k 个集合(后者含 a_{k+1},而前者不含),并且都是 A_{k+1} 的子集。同时 A_{k+1} 的所有子集又皆在其中。

所以,A_{k+1} 的全部子集共有 $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ 个。

因此,n 元集合的全部子集恰有 2^n 个。

(四)集合的运算

前面介绍了集合的一些基本概念,下面将定义集合的运算。这些运算与数的运算一样都是来源于实践,反映了客观世界中数量间关系。同时,读者会发现集合的运算与数的运算既有很多不同之处,又有许多相类似的情形。

1. 集合相等

定义 1.1 对于两个集合 A 与 B,如果 $A \subseteq B$,同时 $B \subseteq A$,则称集合 A 与 B **相等**。记作 $A = B$

例如 设 $A = \{x \mid x^2 - 7x + 12 = 0\}$

$B = \{x \mid 2 < x < 5, x \text{ 为整数}\}$

因为 $A = \{3, 4\}$, $B = \{3, 4\}$

所以 $A = B$。

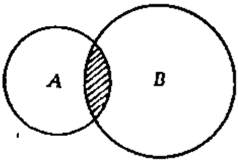
两个相等的集合含有相同的元素。

2. 交集

定义 1.2 设有集合 A 和 B,由 A 和 B 的所有公共元素所构成的集合,称为 A 与 B 的**交集**。记作 $A \cap B$(或 AB)。如图 1—3。

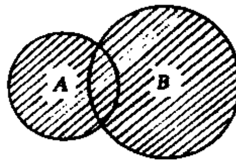
集合的交有以下性质:

(1) $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$



$A \cap B$

图 1—3



$A \cup B$

图 1—4

(2) 对任意集合 A 有

$$A \cap \varnothing = \varnothing, A \cap U = A, A \cap A = A$$

例如　$A = \{1,2\}$，　$B = \{2,3,4\}$，　$C = \{3,4\}$，则：

$$A \cap B = \{2\} \qquad A \cap C = \varnothing$$

再如　$A = \{$负实数$\}$，　$B = \{$有理数$\}$，则

$$A \cap B = \{\text{负有理数}\}$$

3. 并集

定义 1.3　设有集合 A 和 B，由 A 和 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的并集，记为 $A \cup B$（或 $A + B$）。如图 1—4。

集合的并有以下性质：

(1) $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$ ·

(2) 对任意集合 A 有

$$A \cup \varnothing = A, A \cup U = U, A \cup A = A$$

例如 $A = \{a,b,c\}$，　$B = \{c,d\}$，则

$$A \cup B = \{a,b,c,d\}$$

再如：某班学生会英语、俄语两种外语，设 $A = \{$会英语的学生$\}$，$B = \{$会俄语的学生$\}$

则　$A \cup B = \{$会英语或会俄语的学生$\}$

$A \cap B = \{$既会英语又会俄语的学生$\}$

如果该班每个学生都至少会英语或俄语中的一种，又设

$U = \{$全班学生$\}$

则 $A \cup B = U$

4.差集

定义 1.4 设有集合 A 和 B，属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的**差集**，记作 $A-B$。如图 1—5 中阴影部分所示。

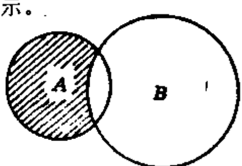


图 1—5

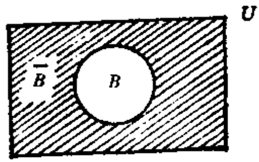


图 1—6

例如 $A = \{1,2,3\}$， $B = \{2,3,4\}$，则

$A - B = \{1\}$， $B - A = \{4\}$

在定义 1.4 中，如果 A 是全集 U，则差集又称为**补集**，简称为补，记作 $\overline{B}$。如图 1—6 所示。

集合的补有以下性质：

$A \cup \overline{A} = U$， $A \cap \overline{A} = \varnothing$

例 9 设 $A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{3,4,5\}$

$C = \{4,3,\}$ $U = \{1,2,3,4,5,6\}$

则 $A \cap B = \{3,4\}$ $A \cap B = C$

$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$ $A - B = \{1,2\}$

$\overline{A} = U - A = \{5,6\}$

$\overline{B} = U - B = \{1,2,6\}$

例 10 如果 A 为奇数集合，B 为偶数集合，

则 $A \cup B = \{x \mid x$ 为奇数或偶数$\}$

$A \cap B = \varnothing$

如果 $A \cap B = \varnothing$，则称 A 与 B 是分离的。

例 11　某地区有 10 个机床厂。其中有 8 个生产甲种机床，以集合 A 表示。有 6 个生产乙种机床，以集合 B 表示。有 5 个两种机床都生产。试用集合表示下列各类工厂，并计算出各类工厂的数目（见图 1—7）。

(1) 只生产甲种机床的工厂；

(2) 只生产乙种机床的工厂；

(3) 甲、乙两种机床中至少生产其中一种的工厂；

(4) 甲、乙机床都不生产的工厂。

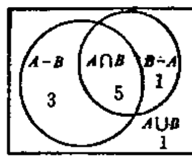


图 1—7

解：(1) 只生产甲种机床的工厂为 $A - B$，其数目为 $8-5 = 3$(个)；

(2) 只生产乙种机床的工厂为 $B-A$，其数目为

$$6 - 5 = 1(\text{个})；$$

(3) 甲、乙两种机床至少生产一种的工厂为 $A \cup B$，其数目为

$$3 + 1 + 5 = 9(\text{个})；$$

(4) 甲、乙两种机床都不生产的工厂为 $\overline{A \cup B}$，其数目为

$$10 - 9 = 1(\text{个})。$$

（五）集合运算律

(1) 交换律：　$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律：　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) 分配律：　$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(4) 吸收律：　$(A \cup B) \cap A = A$

$(A \cap B) \cup A = A$

(5) 摩根律： $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

例 12　设有集合 A、B、G，试证明

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

证明：如果 $(A \cup B) \cap C = \varnothing$，则 C 与 A 没有公共的元素，与 B 亦没有公共的元素，所以 $A \cap C = \varnothing$，$B \cap C = \varnothing$

所以　$(A \cap C) \cup (B \cap C) = \varnothing$

因而　$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ 成立

如果 $(A \cup B) \cap C$ 为一非空集合，可设 $a \in (A \cup B) \cap C$

则　$a \in C$ 且　$a \in A \cup B$　即 $a \in A$ 或 $a \in B$

若　$a \in A$ 且　$a \in C$

有　$a \in A \cap C$

可得　$a \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$

若　$a \in B$ 且 $a \in C$

有　$a \in B \cap C$

同样得　$a \in (A \cap B) \cup (B \cap C)$

这说明集合 $(A \cup B) \cap C$ 的元素都是集合 $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ 的元素。

所以　$(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$

同理可证 $(A \cup B) \cap C \supseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$

所以　$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

例 12 的证明方法是证明集合相等的常用方法，其出发点是集合相等的定义。对于两个集合 A 和 B，如果设 a 是集合 A 的任意一个元素，可以通过推理得到 a 必是集合 B 的元素，则有 $A \subseteq B$。反过来，设 b 是集合 B 的任意一个元素，可设法证出 b 必是集合 A 的元素，则有 $A \supseteq B$。根据集合相等的定义有 $A = B$

读者可以仿照例 12 的证明，证明集合的其它运算律。

§1.2　实数集

(一) 实数与数轴

1. 数系表

根据在中学阶段所学的关于数的概念，可列出数系表如图1—8。

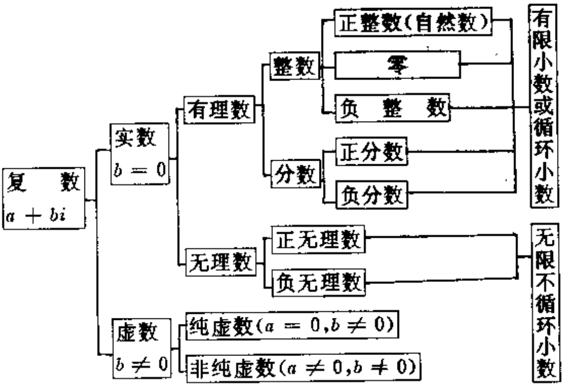


图 1—8

人们对数的认识是逐步发展的。先是自然数，继而发展到有理数(即正负整数、正负分数及零)，再进一步就发展到无理数(例如$\sqrt{2}$、π等都是无理数)。有理数可以表示为$\frac{p}{q}$，无理数不能表示为$\frac{p}{q}$，其中p、q都是整数，且$q\neq0$。

分数可以用有限小数或无限循环小数表示；反之，有限小数或无限循环小数亦可用分数表示。因此，有理数可表示为有限小数或无限循环小数，而无理数为无限不循环小数。

有理数与无理数统称为实数。

随着科学的发展，实数的概念也显得不够用了。例如 $x^2=-1$ 在实数范围内无解。如果规定一个数 i，有 $i^2=-1$，这就是虚数单位。数的概念又扩展到复数。复数可分为实数和虚数，虚数又分为纯虚数和非纯虚数。

2. 实数与数轴

在一条水平直线上取定一点 0，称为原点，规定一个正方向（由原点向右为正方向），再规定一个长度，称为单位长度。这种具有原点，正方向和单位长度的直线称为数轴。如图 1—9。

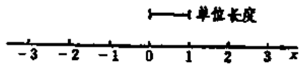


图 1—9

任何一个有理数 $\frac{p}{q}$，都可以在数轴上找到一个点与之对应，使得由原点到这点的长度与单位长度的比等于 $\frac{p}{q}$。这样得到的点称为有理点，它是有理数 $\frac{p}{q}$ 的几何表示，而 $\frac{p}{q}$ 称为有理点的坐标。反之，数轴上的任何一个有理点必对应于一个有理数。

任给两个有理数 a、b（$a<b$），在 a、b 之间至少可以找到一个有理数 c，使得 $a<c<b$，例如 $c=\frac{a+b}{2}$。同样在 a、c 之间和 c、b 之间又存在 $a<\frac{a+c}{2}<c$，$c<\frac{c+b}{2}<b$。依此下去，不论 a、b 相差多么小（在数轴上相距多么近），在 a、b 之间总可以找到无数多个有理数，这就是有理数的稠密性。也就说，有理点在数轴上是处处稠密的。

虽然有理点在数轴上处处稠密，但尚未充满数轴。例如，边长为 1 个单位的正方形的对角线的长度为 $\sqrt{2}$ 个单位。可以证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数，因此数轴上为 $\sqrt{2}$ 的点不是有理点。这种点为无理点，有无数多个，在数轴上也是处处稠密的。而且可以证明无理点比有理点更加稠密。