

微波毫米波与光集成电路 的理论基础

吴万春 编著



西北电讯工程学院出版社

内 容 简 介

本书共分九章，前三章介绍各种微带线及其不连续性；第四章介绍鳍线和槽线；第五到七章介绍介质波导和集成介质波导；第八章介绍介质谐振器及其耦合结构；第九章介绍光集成波导。

本书讨论了这些新型传输线和元件的特性和分析方法，着重介绍现代的数值分析法，配合电子计算机的应用，使求解这些复杂的电磁场边值问题成为可能。同时对某些近似解法也作了必要介绍。

本书可作为微波技术专业研究生的教材，也可供从事微波工作的工程技术人员和高等院校教师们参考。

微波毫米波与光集成电路的理论基础

吴万春 编著

西北电讯工程学院出版社出版

西北电讯工程学院印刷厂印刷

陕西省新华书店发行 各地新华书店经售

开本 787×1092 1/16 印张 21 10/16 字数 523 千字

1985年5月第一版 1985年5月第一次印刷 印数1—3,500

统一书号：15322·3

定价：4.40元

序 言

微波、毫米波与光集成电路是近二十多年发展起来的新技术，已经得到了广泛的应用。虽然它们跨越了微波到光的广阔频率范围，但在理论上和技术上却有许多共同特点，将它们放在一起加以分析研究，介绍这些新技术、新理论和新方法，不仅可能而且必要，这是编写本书的目的之一。

本书共分九章，前三章介绍各种微带线及其不连续性的特性和分析方法，第四章介绍鳍线与槽线，第五到七章介绍介质波导与集成介质波导，第八章介绍介质谐振器及其耦合结构，第九章介绍光集成波导。这些新型传输线和元件是近年来电磁场与微波技术学科发展的重要成果，对今后发展微波与开拓毫米波、亚毫米波及光频，将起到重要的作用。

直到六十年代初期，微波技术总是与同轴线和金属波导联系在一起，它们的分析方法都是些古典方法，柯林 (Collin) 的《导波场论》一书，可作为这些方法的总结。随着一些新型传输线的提出和电子计算机的广泛应用，开始了电磁场分析方法的现代化，使得求解这些复杂的电磁场边值问题成为可能。总结和介绍这些现代数值分析法以及一些必要的近似解法，是编写本书的目的之二。

本书主要取材于近期的技术杂志，也有一些自己的看法。由于作者学术水平有限，难免有些缺点和错误，希望读者批评指正。

本书是为电磁场与微波技术学科的研究生编写的，课时 80 学时。在编写过程中，得到了西北电讯工程学院许多同志的帮助，王家礼同志提供了全部习题，在此对他们致以衷心的感谢。

吴万春 1983年10月

目 录

序 言

第一章 微带传输线的特性

§ 1.1 概论	1
§ 1.2 用保角变换法计算空气微带线的特性	2
1.2.1 零厚度宽微带线的近似解	3
1.2.2 零厚度微带线的严格解	5
1.2.3 零厚度微带线的改进近似保角变换	11
§ 1.3 有效介电常数	16
1.3.1 介质基片边界的变换	16
1.3.2 有效介电常数的计算	17
1.3.3 近似公式	20
§ 1.4 用格林函数法计算微带线特性	20
1.4.1 介质镜像法	21
1.4.2 格林函数	24
1.4.3 微带特性计算	25
§ 1.5 用介质格林函数法计算微带线特性	26
1.5.1 介质格林函数	26
1.5.2 单微带线特性的计算	28
1.5.3 耦合微带线特性的计算	29
§ 1.6 用变分法计算微带线特性	30
1.6.1 零厚度微带	31
1.6.2 有限厚度导带的修正	33
§ 1.7 用耦合波分析耦合微带线特性	34
1.7.1 耦合波分析	34
1.7.2 耦合模参数与偶模和奇模参数间的关系	36
§ 1.8 微带线的衰减	37
1.8.1 介质衰减	38
1.8.2 导体衰减	38
§ 1.9 微带线的色散	40
1.9.1 模式展开法	41
1.9.2 谱域格林阻抗函数法	43

习题 1

第二章 微带不连续性与微带谐振器

§ 2.1 概论	49
§ 2.2 微带不连续性的电容参数计算	49

2.2.1 矩阵法	50
2.2.2 过电荷法	52
§ 2.3 微带不连续性的电感参数计算	56
2.3.1 准静态场的控制方程	56
2.3.2 直拐角电感参数计算	57
§ 2.4 矩形片微带谐振器的特性	61
2.4.1 磁壁法	61
2.4.2 全波分析	64
§ 2.5 圆形片微带谐振器的特性	68
2.5.1 磁壁法	68
2.5.2 全波分析	70
§ 2.6 微带不连续性的辐射	73
2.6.1 远区场近似法	73
2.6.2 近场近似法	79
§ 2.7 矩形片微带天线	87
2.7.1 传输线模型	87
2.7.2 模式展开谐振器模型	88
习题 2	

第三章 其它集成微带电路

§ 3.1 概论	96
§ 3.2 半导体单片集成电路	96
3.2.1 半导体基片上的微带线	96
3.2.2 半导体基片上的固体器件	98
§ 3.3 用变分法计算悬带线的特性	99
§ 3.4 用有限差分法计算悬带线特性	103
§ 3.5 半导体-二氧化硅基片的微带线	107
3.5.1 双层介质基片微带线	107
3.5.2 集总元件模型	108
3.5.3 平板波导模型	110
习题 3	

第四章 鳍线与槽线

§ 4.1 概论	115
§ 4.2 加鳍矩形波导的特性	116
4.2.1 电磁场方程	116
4.2.2 电磁场的近似解	118
4.2.3 截止方程	120
4.2.4 特性阻抗	121
§ 4.3 加鳍波导的完备本征值解	122

4.3.1 H_z 奇模	122
4.3.2 其余模式	126
§ 4.4 矩形波导中全金属平面电路的不连续性	128
4.4.1 电感鳍	129
4.4.2 电容鳍	133
4.4.3 加鳍波导的短路端	137
4.4.4 加鳍波导的开路端	137
§ 4.5 槽线的特性	138
4.5.1 零次近似解	138
4.5.2 二次近似解	139
§ 4.6 集成鳍线的特性	146
4.6.1 双鳍线特性	146
4.6.2 单鳍线特性	150
§ 4.7 用谱域导纳法分析鳍线与槽线特性	152
习题 4	

第五章 介质波导

§ 5.1 概论	157
§ 5.2 平板介质波导的特性	157
5.2.1 波导模分析	157
5.2.2 本征值的近似公式	161
5.2.3 衰减	163
5.2.4 色散	166
§ 5.3 圆柱介质波导的特性	168
5.3.1 波导模分析	169
5.3.2 衰减	174
§ 5.4 矩形介质波导的分析——有效介电常数法	175
5.4.1 有效介电常数	175
5.4.2 波导模分析	178
§ 5.5 矩形介质波导的分析——点匹配法、模匹配法及变分法	180
5.5.1 点匹配法	180
5.5.2 模匹配法	183
5.5.3 变分法	188
§ 5.6 平板介质波导的突变端	191
§ 5.7 平板介质波导的突变阶梯	195
§ 5.8 平板介质波导的弯曲	199
习题 5	

第六章 毫米波集成介质波导

§ 6.1 概论	204
§ 6.2 有效介电常数法	207

6.2.1 有效介电常数的计算	208
6.2.2 纵向传输常数的计算	210
§ 6.3 矩形介质镜象波导	213
6.3.1 电磁场分布	214
6.3.2 色散特性	217
6.3.3 衰减	220
§ 6.4 耦合矩形介质镜象波导	223
6.4.1 电磁场结构	223
6.4.2 色散特性	226
§ 5.6 矩形绝缘介质波导	228
6.5.1 单根绝缘介质波导	228
6.5.2 耦合绝缘介质波导	232
习题 6	

第七章 毫米波集成介质波导的严格解法

§ 7.1 概论	234
§ 7.2 模匹配法	234
7.2.1 条形区内的波导模	235
7.2.2 场的展开式	237
7.2.3 切向场的匹配	238
§ 7.3 广义横向谐振法	240
7.3.1 多层介质片中的基本模	241
7.3.2 阶梯不连续性的边值问题	244
7.3.3 阶梯不连续性的输入导纳矩阵	248
7.3.4 广义横向谐振法	249
§ 7.4 广义传输线法	250
§ 7.5 有限元法	255
7.5.1 泛函公式	255
7.5.2 有限元法	257
7.5.3 几个问题	261
习题 7	

第八章 介质谐振器

§ 8.1 概论	262
§ 8.2 圆柱形介质谐振器的特性	263
8.2.1 混合磁壁法	263
8.2.2 开波导法	267
8.2.3 变分法	269
§ 8.3 介质基片上圆柱形介质谐振器特性	271
8.3.1 开波导法	271
8.3.2 变分法	273

8.3.3 突变端的辐射	276
§ 8.4 矩形介质谐振器的特性	282
8.4.1 混合磁壁法	282
8.4.2 开波导法	285
8.4.3 用开波导法计算介质基片上矩形介质谐振器特性	287
§ 8.5 圆环形介质谐振器的特性	288
§ 8.6 介质谐振器间的耦合	290
8.6.1 耦合介质谐振器的等效电路	290
8.6.2 圆柱形介质谐振器间的耦合	291
8.6.3 矩形介质谐振器间的耦合	294
§ 8.7 介质谐振器与微带线间的耦合	296
8.7.1 圆柱形介质谐振器与微带线的端耦合	297
8.7.2 方形介质谐振器与微带线的端耦合	299

习题 8

第九章 集成光波导

§ 9.1 概论	302
§ 9.2 射线光学基础	302
9.2.1 光程方程	302
9.2.2 射线方程	303
9.2.3 射线的边界条件	304
9.2.4 费马 (Fermat) 原理	306
§ 9.3 介质薄膜光波导的分析——射线法	307
9.3.1 导行模	308
9.3.2 歌斯-汉欣 (Goos-Haenchen) 位移与波导有效厚度	309
9.3.3 散射模	311
9.3.4 泄漏模	312
§ 9.4 渐变折射率分布的薄膜光波导	315
9.4.1 射线法	315
9.4.2 场解	317
§ 9.5 非理想壁的薄膜光波导	319
9.5.1 耦合波方程	319
9.5.2 耦合波方程的解	323
9.5.3 正弦壁薄膜光波导	325
§ 9.6 薄膜光波导间的耦合	326
9.6.1 耦合波方程	326
9.6.2 耦合波方程的解	329
9.6.3 薄膜光波导间耦合的计算	330
§ 9.7 介质带状光波导	331

参考文献

第一章 微带传输线的特性

§1.1 概 论

微带传输线又简称微带线或微带，它是微波集成电路中一种极其重要的传输线。用它可构成各种微波无源元件和有源元件的无源部分，从而使得微波设备小型化和固体化成为可能，并大大提高了整机的性能。

用微带线构成微波集成电路时，是把微带制作在一块介质基片上，如图 1.1-1 所示。介质基片通常使用聚四氟乙烯玻璃纤维板、石英片、氧化铝陶瓷片、兰宝石片铁氧体片或半导体片等，最常用的是氧化铝陶瓷片。陶瓷基片的制作一般要经过粗磨、细磨和抛光三道工序，以达到尺寸精确，表面光洁，保证具有良好的性能。

基片磨光后，先在真空中蒸发 200~400埃的铬，以使基片与主要金属导体(金或铜)具有良好的附着力，然后再真空蒸发金属，这样，介质基片上就形成一层金属化薄膜。再对金属化薄膜进行光刻、腐蚀和电镀，最后就构成了微波集成电路。

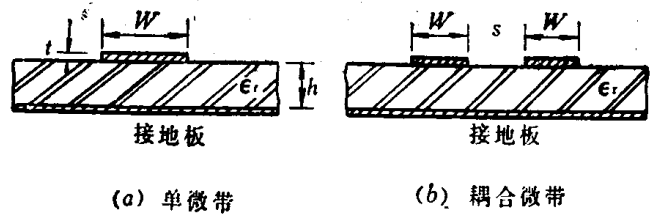


图 1.1-1 微带线的横截面图

分析与设计微带传输线时，总是把其中传输模看成准 TEM 波。实际上，具有介质基片的微带线根本不可能传输 TEM 模的(空气微带线除外)，而是传输一些混合模。但在频率较低时，微带线传输的最低次模近似 TEM 模，故称为准 TEM 模，可用 TEM 模理论来近似处理。当频率甚高时，微带线除了要发生辐射外，其传输模是一些混合模，其中有类似波导模和表面波模，前者主要在导带与接地板之间传输；后者主要在导带两侧的介质基片表面上传输。这些高次模的出现，将使微带线发生色散，Q 值降低，性能变坏。本章主要分析微带线准 TEM 模的传输特性，对微带线的色散问题也作必要的分析和研究。

分析微带线特性时，首先要从麦克斯韦方程出发，然后根据具体边界条件，解具体边值问题。在正弦电磁场情况下，无源的麦克斯韦方程是

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \end{cases} \quad (1.1-1)$$

在直角坐标系中，令 $\nabla = i_x \frac{\partial}{\partial x} + i_y \frac{\partial}{\partial y} + i_z \frac{\partial}{\partial z} = \nabla_t + i_z \frac{\partial}{\partial z}$ ， $\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + i_z E_z$ ， $\mathbf{H} = \mathbf{H}_t + i_z H_z$ ，其中 i_x, i_y, i_z 是各坐标方向的单位矢， t 表示在微带线的横截面上，则上式变为

$$\begin{cases} \nabla_t \times \mathbf{H}_t = j\omega\epsilon i_z E_z \\ \nabla_t \times \mathbf{E}_t = -j\omega\mu i_z H_z \\ \nabla_t \cdot \mathbf{H}_t + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \\ \nabla_t \cdot \mathbf{E}_t + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (1.1-2)$$

对于 TEM 模, $E_z = H_z = 0$, 故有

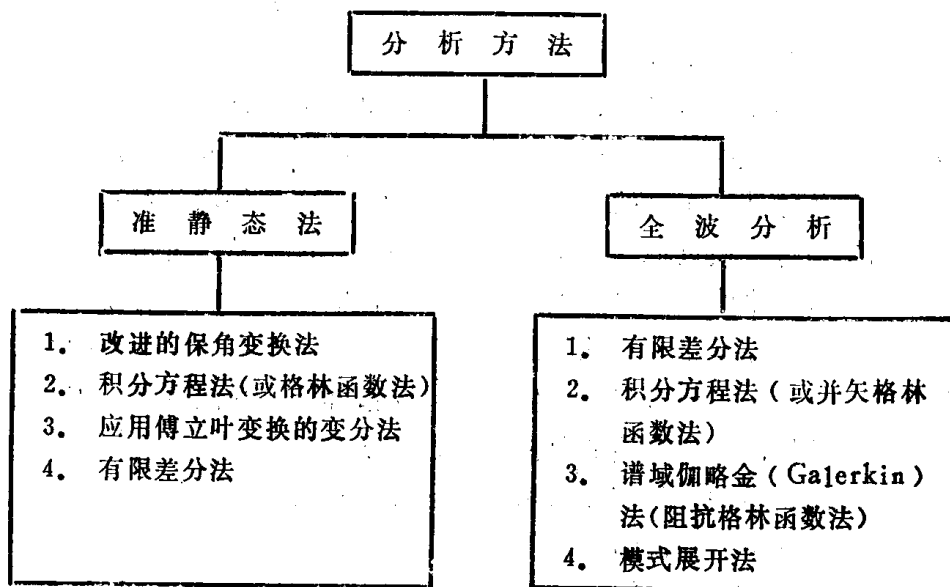
$$\begin{cases} \nabla_t \times \mathbf{H}_t = 0 \\ \nabla_t \times \mathbf{E}_t = 0 \\ \nabla_t \cdot \mathbf{H}_t = 0 \\ \nabla_t \cdot \mathbf{E}_t = 0 \end{cases} \quad (1.1-3)$$

令 $E_t = -\nabla\varphi$, 则得

$$\nabla_t^2 \varphi = 0 \quad (1.1-4)$$

由此可知, 微带线中 TEM 模电场是个二维的位场, 可用解二维静态场的方法来求解, 称为二维位场的边值问题。由于微带线的主模不是真正的 TEM 模, 而是准 TEM 模, 故用二维位场方法来解微带线问题, 称为准静态法。表 1.1-1 中列出几种常用的准静态法。当然, 严格解微带线问题应当从麦克斯韦方程出发, 得出赫姆霍兹(Helmholtz)方程, 应用全波分析, 才能得到它的色散特性和高次模的分布情况。这是一个解赫姆霍兹方程的边值问题, 也有一些典型方法, 也列于表 1.1-1 中。

表 1.1-1 微带线的分析方法



§1.2 用保角变换法计算空气微带线的特性

我们已知, 空气微带线中传输的主模是 TEM 模, 可当作二维静态场问题来求解。保角变换法是解二维静态场的经典方法之一, 故可用来计算空气微带线的特性, 即首先用保角变换法计算出微带线的单位长电容 C_0 , 然后其特性阻抗由下式确定:

$$Z_0 = \frac{1}{v_0 C_0} \quad (1.2-1)$$

式中 $v_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ 是空气中的光速。

下面介绍几种从不同观点而用保角变换法计算空气微带线特性的实例。

1.2.1 零厚度宽微带线的近似解

图 1.2-1 示出一个空气微带线并画出其中的电力线分布。当 $W \gg h$ (宽带) 时, 在微带线的中间部分, 即 $|x| \approx 0$ 附近, 电力线可以看成是相互平行的, 只是靠近导带边缘电力线才开始弯曲。分析这种微带线特性时, 可将导带沿中心线分成两半, 并认为导带一边对中心的场分布没有影响, 取其一半来分析, 而另一半用一个半无限导体平面来代替, 如图 1.2-2 所示。图中 A 点和 B 点是导带中心所在的位置 ($a = W/2$), A 点在切口上岸, B 点在切口下岸。

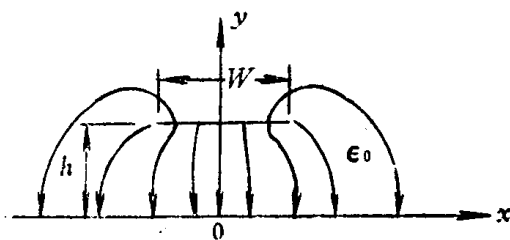


图 1.2-1 空气微带线及其电力线分布

现在应用许瓦茨-克里斯托菲 (Schwarz-Christoffel) 变换, 可把 z 平面带有切口的上半平面, 变换到 t 平面的上半平面上。变换时两者各对应点位置及 z 平面上多边形各顶点的内转角列于表 1.2-1 中。

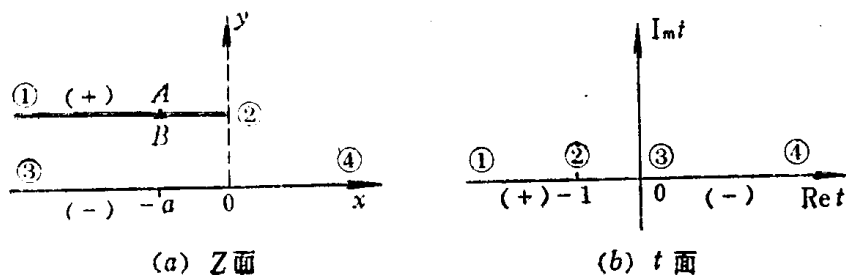


图 1.2-2 Z 面与 t 面的对应关系

表 1.2-1 各对应点位置与各内转角表

对应点号码 k	1	2	3	4
Z_k	$-\infty + jh$	jh	$-\infty + jh$ $-\infty$	$+\infty$
t_k	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
α_k		2π	0	

由 Z 面到 t 面的变换函数是

$$\begin{aligned}
 Z &= A \int (t+1)^{\frac{2\pi}{\pi}-1} (t-0)^{\frac{0}{\pi}-1} dt + B \\
 &= A \int \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt + B = A(t + \ln t) + B
 \end{aligned} \tag{1.2-2}$$

为了确定出常数 A 和 B , 先把上式改写成

$$x + jy = (A_1 + jA_2)(t_r + jt_i + \ln|t| + j\arg t) + B_1 + jB_2$$

再由其虚部相等得

$$y = A_1 t_i + A_2 t_r + A_2 \ln|t| + A_1 \arg t + B_2 \tag{1.2-3}$$

当 Z 沿切口下岸从②到③趋于无限时, $y = h$, 这时 t 沿其负实轴趋于零, 即 $t_i = 0^-$, $\arg t = \pi$ 。若此, 则上式变为

$$h = \lim_{\substack{t_i \rightarrow 0^- \\ t_r \rightarrow 0}} (A_2 t_r + A_2 \ln |t| + A_1 \pi + B_2)$$

显然，为使上式有限，必须

$$\begin{cases} A_2 = 0 \\ h = A_1 \pi + B_2 \end{cases}$$

又当 Z 沿其负实轴趋于无限时， $y = 0$ ，这时 t 沿其正实轴趋于零，即 $t_i = 0$ ， $\arg t = 0$ 。若此，由(1.2-3)式得

$$\begin{cases} B_2 = 0 \\ A_1 = h/\pi \end{cases}$$

于是(1.2-2)式变为

$$Z = \frac{h}{\pi} (t + \ln t) + B_1$$

最后将 $Z_2 = jh$ ， $t_2 = -1$ 代入上式中，则有

$$jh = \frac{h}{\pi} (-1 + j\pi) + B_1$$

或

$$B_1 = h/\pi$$

因此，所求得的变换函数是

$$Z = \frac{h}{\pi} (1 + t + \ln t) \quad (1.2-4)$$

要想求得微带线的单位长电容，还须把图1.2-2(b)的 t 面上半平面变换到 Z' 平面的条形区中，如图 1.2-3 所示。这个变换是个指数函数变换，

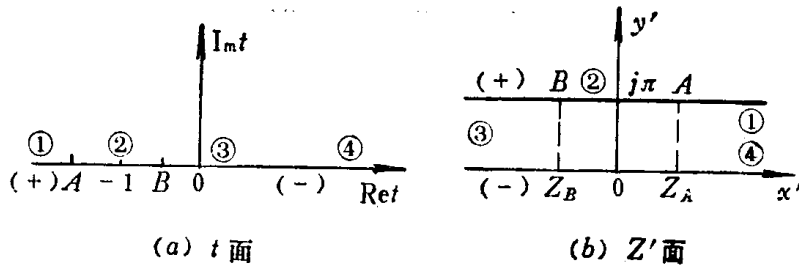


图 1.2-3 t 面到 Z' 面的变换关系

即

$$Z' = \ln t \quad \text{或} \quad t = e^{Z'} \quad (1.2-5)$$

于是条形区 AB 段所对应的平板电容就是微带线单位长电容 C_0 的一半，即

$$C_0 = \frac{2\epsilon_0}{\pi} (Z'_A - Z'_B) = \frac{2\epsilon_0}{\pi} \ln \left(\frac{t_A}{t_B} \right)$$

这里 t_A 和 t_B 都在 t 面的实轴上。令 $t_A = -\rho_A$ ， $t_B = -\rho_B$ ， ρ_A 和 ρ_B 都是正实数，则微带线的单位长电容是

$$C_0 = \frac{2\epsilon_0}{\pi} \ln \frac{\rho_A}{\rho_B} \quad (1.2-6)$$

为了确定出 ρ_A 和 ρ_B , 我们将 $Z_A = Z_B = -a + jh$, $t_A = -\rho_A$, $t_B = -\rho_B$ 代入(1.2-4)式中得

$$-a + jh = \frac{h}{\pi} (1 - \rho_A + \ln \rho_A + j\pi)$$

$$-a + jh = \frac{h}{\pi} (1 - \rho_B + \ln \rho_B + j\pi)$$

即

$$\rho_A - \ln \rho_A = 1 + \frac{a\pi}{h} = 1 + \frac{\pi W}{2h} \quad (1.2-7)$$

$$\rho_B - \ln \rho_B = 1 + \frac{\pi W}{2h}$$

式中, $1 < \rho_A < \infty$, $0 < \rho_B < 1$ 。解此方程并找出它们在此范围的根, 就可得到 ρ_A 和 ρ_B 。因为微带是宽带, $\rho_A \gg 1$, $\rho_B \ll 1$, 则 $\rho_A \gg \ln \rho_A$, $\rho_B \ll \ln \rho_B$, 于是(1.2-7)式可近似为

$$\begin{cases} \rho_A = 1 + \frac{\pi W}{2h} \\ \ln \rho_B = -\left(1 + \frac{\pi W}{2h}\right) \end{cases}$$

将上式代入(1.2-6)式中得

$$C_0 = \frac{2\epsilon_0}{\pi} \left[\ln\left(1 + \frac{\pi W}{2h}\right) + \left(1 + \frac{\pi W}{2h}\right) \right] \quad (1.2-8)$$

由此得出该微带线的特性阻抗是

$$Z_0 = \frac{60\pi^2}{\ln\left(1 + \frac{\pi W}{2h}\right) + \left(1 + \frac{\pi W}{2h}\right)} \quad (1.2-9)$$

此特性阻抗公式是很近似的, 精度有限, 除了对引入保角变换法解微带线问题具有一定的历史意义外, 没有多大实用价值。

1.2.2 零厚度微带线的严格解

用保角变换法求空气微带线的严格解时, 可先将接地板去掉, 代之以导带镜像, 成为对称的宽边耦合平行双带线, 如图 1.2-4(a)所示。根据电场的对称性可以判断, 对称面①—②; ④—⑤; ⑦—⑧为磁壁, 两根导带与原接地板所在平面为电壁。

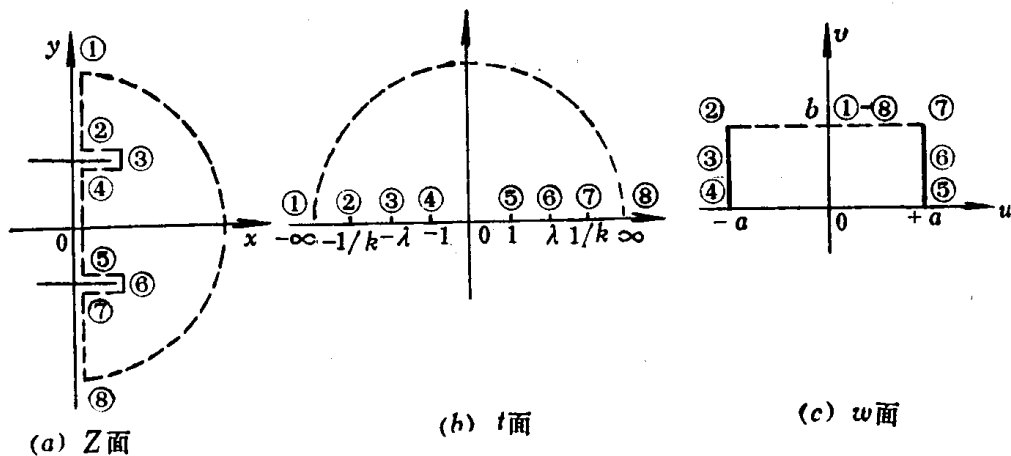


图 1.2-4 对称平行带线的保角变换过程

解这个问题的步骤是：取图 1.2-4(a)中的虚折线①~⑧作为Z 平面上的一个多角形，应用许瓦兹-克里斯托菲变换，将它变换到 t 平面的实轴上，并把各顶点在 t 平面上的对应点规定得如图 1.2-4(b)。再将 t 平面的上半空间变换到 w 平面的矩形区，如图 1.2-4(c)所示，则该微带线的单位长电容即可由此矩形区的对应点坐标得到。

1. 由 Z 面到 t 面的变换

该两个平面上各对应点位置及 Z 平面上各顶点的内转角列于表 1.2-2 中。其中 k 是小于 1 的正实数，λ 是大于 1 的实数，都是待定常数。在 t 平面上，1, 0, ∞ 是选定的三个固定点值。

表 1.2-2 各对应点位置与各内转角表

对应点点号码 n	1	2	3	4	5	6	7	8
z_n	$j\infty$	jh	$a+jh$	jh	$-jh$	$a-jh$	$-jh$	$-j\infty$
t_n	$-\infty$	$-1/k$	$-\lambda$	-1	1	λ	$1/k$	$+\infty$
α_n		$\pi/2$	2π	$\pi/2$	$\pi/2$	2π	$\pi/2$	

按照许瓦兹-克里斯托菲变换有

$$Z = A \int_0^t \left(t + \frac{1}{k}\right)^{-\frac{1}{2}} (t + \lambda) (t + 1)^{-\frac{1}{2}} (t - 1)^{-\frac{1}{2}} (t - \lambda) \left(t - \frac{1}{k}\right)^{-\frac{1}{2}} dt + B$$

$$= \frac{A}{k} \int_0^t \frac{k^2(t^2 - \lambda^2) dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} + B$$

由于 Z = 0 点对应于 t = 0，所以积分常数 B = 0，即

$$Z = \frac{A}{k} \int_0^t \frac{k^2t^2 - k^2\lambda^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} dt \quad (1.2-10)$$

这是一个不能用初等函数来表示的积分，称为椭圆积分。现将(1.2-10)式化成标准椭圆积分形式。首先把被积函数分成部分分式，再令 $t = \sin\varphi$ 得

$$Z = -\frac{A}{k} \int_0^t \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{1-t^2} dt + \frac{A(1-k^2\lambda^2)}{k} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

$$= -\frac{A}{k} \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} d\varphi + \frac{A(1-k^2\lambda^2)}{k} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad (1.2-11)$$

式中，右边的第二个积分是第一类椭圆积分 F，第一个积分是第二类椭圆积分 E，两者的模数都是 k。因此，(1.2-11)式可用椭圆积分写为

$$Z = -\frac{A}{k} \left[E(\varphi, k) - (1-k^2\lambda^2)F(\varphi, k) \right] \quad (1.2-12)$$

式中， $\varphi = \sin^{-1}t$ ，A, k, λ 是三个待定常数，可由⑤，⑥，⑦三个点上 Z 和 t 的对应值代入(1.2-12)式得出。

将 $Z_5 = -jh$ ， $t_5 = 1$ (即 $\varphi = \pi/2$) 代入(1.2-12)式，并注意到当 $\varphi = \pi/2$ 时，E(φ, k) 是第二类完全椭圆积分 E(k)，F(φ, k) 是第一类完全椭圆积分 K(k)，这就得到

$$-jh = -\frac{A}{k} \left[E(k) - (1-k^2\lambda^2)K(k) \right]$$

即

$$A = \frac{jhk}{E(k) - (1 - k^2\lambda^2)K(k)}$$

于是

$$Z = -jh \frac{E(\varphi, k) - (1 - k^2\lambda^2)F(\varphi, k)}{E - (1 - k^2\lambda^2)K} \quad (1.2-13)$$

再将 $Z_7 = -jh$, $t_7 = 1/k$ 代入(1.2-13)式, 得到

$$-jh = -jh \frac{E(\sin^{-1} \frac{1}{k}, k) - (1 - k^2\lambda^2)F(\sin^{-1} \frac{1}{k}, k)}{E - (1 - k^2\lambda^2)K} \quad (1.2-14)$$

因为 $k < 1$, 故 $\sin^{-1}(1/k)$ 不是实数, 还须对椭圆函数进行展开。因为

$$\begin{aligned} F\left(\sin^{-1} \frac{1}{k}, k\right) &= \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} + j \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} \end{aligned}$$

上式中右边第一个积分是第一类完全椭圆积分 $K(k)$, 第二个积分经变换式

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2\tau^2}} \quad (k'^2 = 1 - k^2)$$

变换后, 变成

$$\int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2\tau^2)}} = K(k') = K'(k)$$

这是第一类余完全椭圆积分, k' 称为余模数。于是有

$$F\left(\sin^{-1} \frac{1}{k}, k\right) = K(k) + jK'(k) \quad (1.2-15)$$

又因

$$E\left(\sin^{-1} \frac{1}{k}, k\right) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt + j \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{t^2-1}} dt$$

上式右边第一个积分是第二类完全椭圆积分 $E(k)$; 而在第二个积分中, 令

$$t = \frac{1}{k} \sqrt{1-k'^2\tau^2}$$

则有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{k'^2\tau^2 d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2\tau^2)}} &= \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2\tau^2)}} - \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k'^2\tau^2}}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau \\ &= K'(k) - E'(k) \end{aligned}$$

其中 $E'(k) = E(k')$ 是第二类余完全椭圆积分。于是有

$$E\left(\sin^{-1} \frac{1}{k}, k\right) = E(k) + j[K'(k) - E'(k)] \quad (1.2-16)$$

将(1.2-15)和(1.2-16)式代入(1.2-14)式中得

$$\frac{E + j(K' - E') - (1 - k^2\lambda^2)(K + jK')}{E - (1 - k^2\lambda^2)K} = 1$$

由其虚部得到

$$K' - E' - (1 - k^2 \lambda^2) K' = 0$$

即

$$\lambda^2 = \frac{1}{k^2} \frac{E'(k)}{K'(k)} \quad (1.2-17)$$

这时(1.2-13)式变为

$$Z = -jh \frac{K' E(\sin^{-1} t, k) - (K' - E') F(\sin^{-1} t, k)}{EK' - (K' - E')K}$$

根据完全椭圆积分公式:

$$E'K + EK' - KK' = \frac{\pi}{2}$$

上式变为

$$Z = -j \frac{2h}{\pi} \left\{ K' E(\sin^{-1} t, k) - (K' - E') F(\sin^{-1} t, k) \right\} \quad (1.2-18)$$

最后将 $Z_0 = a - jh$, $t_0 = \lambda = (1/k)(\sqrt{E'/K'})$ 代入(1.2-18)式, 就可确定出模数 k 来。此时有

$$a - jh = -j \frac{2h}{\pi} \left\{ K' E(\sin^{-1} \lambda, k) - (K' - E') F(\sin^{-1} \lambda, k) \right\} \quad (1.2-19)$$

式中

$$\begin{aligned} F(\sin^{-1} \lambda, k) &= \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} + \int \frac{\frac{1}{k} \sqrt{\frac{K'}{E'}}}{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \\ &= K + jK' + j \int_0^{\sqrt{\frac{1-k^2(K'/E')}{1-k^2}}} \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2\tau^2)}} - jK' \\ &= K + jK' + j \left\{ F\left(\sin^{-1} \sqrt{\frac{1-k^2(K'E')}{1-k^2}}, k'\right) - k' \right\} \\ E(\sin^{-1} \lambda, k) &= \int_0^{\frac{1}{k} \sqrt{\frac{K'}{E'}}} \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt \\ &= \int_0^1 + \int_1^{\frac{1}{k}} + \int \frac{\frac{1}{k} \sqrt{\frac{K'}{E'}}}{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt \\ &= E + j(K' - E') - j \int_0^{\frac{1}{k'}} \sqrt{1 - \frac{K'}{K'}} \frac{k'^2 \tau^2 d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2\tau^2)}} \\ &= E + j(K' - E') - j \left\{ F\left(\sin^{-1} \frac{1}{K'} \sqrt{1 - \frac{E'}{K'}}, K'\right) \right. \\ &\quad \left. - E\left(\sin^{-1} \frac{1}{k'} \sqrt{1 - \frac{E'}{K'}}, k'\right) \right\} \end{aligned}$$

令

$$D' = \frac{K' - E'}{k'^2} \quad B' = \frac{E' - k^2 K'}{k'^2}$$

并代入上式得

$$\begin{cases} F(\sin^{-1}\lambda, k) = K + jK' + j\left\{ F\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{B'}{E'}}, k'\right) - K' \right\} \\ E(\sin^{-1}\lambda, k) = E + j(K' - E') - j\left\{ F\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{D'}{K'}}, k'\right) - E\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{D'}{K'}}, k'\right) \right\} \end{cases} \quad (1.2-20)$$

将(1.2-20)式代入(1.2-19)式中, 得一复数方程, 其实部方程是个恒等式, 其虚部方程是

$$\begin{aligned} K' \left\{ E\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{D'}{K'}}, k'\right) - F\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{D'}{K'}}, k'\right) \right\} - (K' - E') \\ \cdot \left\{ F\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{B'}{E'}}, k'\right) - k' \right\} \\ = \frac{\pi a}{2h} = \frac{\pi W}{4h} \end{aligned} \quad (1.2-21)$$

上式是个含 k' 的方程, 解之可得 k' 值, 然后由 $k = \sqrt{1 - k'^2}$ 即可求得 k 。但是这个方程的求解太复杂了, 必须借助计算机才能进行。通常利用椭圆函数表, 先给定 k , 再计算 W/h , 这样就可使计算简单很多, 可以进行手算。找到给定 W/h 所对应的 k 后, 方程(1.2-18)中的常数就完全确定出来, 这就完成了 Z 面到 t 面的变换, (1.2-18) 式就是这个变换的变换函数。

2. 由 t 面到 w 面的变换

现在我们来把图 1.2-4(b) 的 t 面上半平面变换到 w 面上的矩形区域中。在这个变换里, 两个平面的对应点位置以及 w 面上各顶点的内转角均列于表 1.2-3 中。

应用许瓦兹-克里斯托菲变换可得

$$w = A \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} + B$$

由于 $w=0$, $t=0$, 所以 $B=0$, 于是

$$w = A \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (1.2-22)$$

表 1.2-3 各对应点位置与各转角表

对应点编号 i	1	2	3	4	5	6	7	8
w_i	jb	$-a + jb$		$-a$	a		$a + jb$	jb
t_i	$-\infty$	$-1/k$	$-\lambda$	-1	1	λ	$1/k$	∞
α_i		$\pi/2$		$\pi/2$	$\pi/2$		$\pi/2$	

这是第一类椭圆积分。把 $w_5 = a$, $t_6 = 1$ 代入上式, 得到

$$a = AK \quad \text{或} \quad A = a/K$$