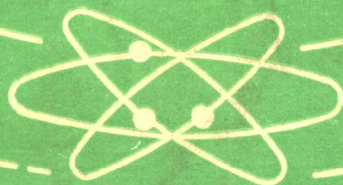


高等学校教材

磁场计算与磁路设计

易 敬 曾



成都电讯工程学院出版社

高等学校教材

磁场计算与磁路设计

易教曾

成都电讯工程学院出版社

·1987·

高等学校教材
磁场计算与磁路设计
易敬曾

*

成都电讯工程学院出版社出版
四川石油管理局印刷厂印刷
四川省新华书店发行

*

开本 787×1092 1/16 印张 17.88 字数 400 千字
版次 1987年5月第一版 印次 1987年5月第一次印刷
印数 1—3,800 册

书号: 15452·13 定价: 2.80 元

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校工科电子类专业课教材的编审、出版的组织工作。从一九七七年底到一九八二年初，由于各有关院校，特别是参与编审工作的广大教师的努力和有关出版社的紧密配合，共编审出版了教材159种。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应社会主义现代化建设培养人才的需要，反映国内外电子科学技术水平，达到“打好基础、精选内容、逐步更新、利于教学”的要求，在总结第一轮教材编审出版工作经验的基础上，电子工业部于一九八二年先后成立了高等学校《无线电技术与信息系统》、《电磁场与微波技术》、《电子材料与固体器件》、《电子物理与器件》、《电子机械》、《计算机与自动控制》，中等专业学校《电子类专业》、《电子机械类专业》共八个教材编审委员会，作为教材工作方面的一个经常性的业务指导机构。并制定了一九八二~一九八五年教材编审出版规划，列入规划的教材、教学参考书、实验指导书等共217种选题。在努力提高教材质量，适当增加教材品种的思想指导下，这一批教材的编审工作由编审委员会直接组织进行。

这一批教材的书稿，主要是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中评选择优和从第一轮较好的教材中修编产生出来的。广大编审者，各编审委员会和有关出版社都为保证和提高教材质量作出了努力。

这一批教材，分别由电子工业出版社、国防工业出版社、上海科学技术出版社、西北电讯工程学院出版社、湖南科学技术出版社、江苏科学技术出版社、黑龙江科学技术出版社、天津科学技术出版社和成都电讯工程学院出版社承担出版工作。

限于水平和经验，这一批教材的编审出版工作肯定还会有许多缺点和不足之处，希望使用教材的单位、广大教师和同学积极提出批评建议，共同为提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

前 言

本教材系由电子工业部高等学校《电子材料与固体器件》教材编审委员会《电子材料与元件》编审小组评选审定，并推荐出版。

该教材由成都电讯工程学院易敬曾副教授主编，成都电讯工程学院饶克谨教授主审。编审者均是依据《电子材料与元件》编审小组审定的编写大纲进行编写和审阅的。

本课程的参考教学时数为60学时。其主要内容为磁路设计，也就是一个部分具有非线性及各向异性的非均匀磁性介质的开区域上的磁场计算问题。本教材的内容分为两大部分：第一部分为磁路的一般物理特性与传统的简易近似计算方法；第二部分为现代数值计算方法在磁场计算与磁路设计中的应用，即区域型近似数值方法与边界型近似数值方法的应用。

传统的简易近似计算方法，如通常的“退磁因子法”、“磁导法”、“漏磁系数法”等，虽精度较低，局限性较大，但一般无须借助于计算机即可完成。目前这些方法在国内仍有广泛应用。而近似数值法通常要借助于计算机来直接（数值）求解微分或积分形式的位势方程，它具有精度高、经济性好、速度快、通用性强和易于掌握等优点。本教材着重讨论了用于计算磁路的近似数值方法的基本原理与基本技术。然而，由于磁性介质一般属于非线性介质，因而数值方法所得的代数方程组只能用迭代法求解。同时，由于非线性的原因，迭代的初始估值实际上具有一定的收敛范围，节点越多，收敛范围越窄。这就有必要根据物理概念正确选择估值。对于节点较多的复杂磁路，有时需事先应用传统简易方法对某些局部进行初步估算，以保证估值不超出收敛范围。

本教材可作为学过“磁性物理”、“计算机语言程序”等课程的应用磁学专业本科生、研究生的参考书，也可供有关方面的科技工作者作一参考。

本教材第二章由中国科学院高能物理所刘茂三高级工程师编写，易敬曾副教授统编全稿。担任主审的饶克谨教授为本书提出了许多宝贵意见，高敏三工程师也为本书的出版作了很多工作。这里表示诚挚的感谢。由于编者水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

易敬曾

于成都电讯工程学院

1986年9月

目 录

第一部分 磁路计算的一般原理与简易近似计算方法·····	(1)
第一章 静态磁路的半集总参量分析与简单近似计算·····	(3)
§ 1-1 磁路计算的基本方程组·····	(5)
§ 1-2 退磁场与磁体的工作点·····	(11)
§ 1-3 磁路中各部分磁导的计算·····	(25)
§ 1-4 磁路的简单近似计算·····	(40)
第二章 多体渐变磁化系统的场形分析·····	(54)
§ 2-1 多体渐变磁化系统·····	(54)
§ 2-2 均匀磁化法·····	(56)
§ 2-3 简易渐变磁化直线阵列二维场形·····	(58)
§ 2-4 简易渐变环形系统的二维场形·····	(62)
§ 2-5 简易渐变环形系统的三维场形·····	(70)
第三章 动态磁路与磁路中的涡流问题·····	(73)
§ 3-1 永磁动态磁路的简易近似计算·····	(73)
§ 3-2 磁路中磁通变化时的涡流问题·····	(76)
第二部分 数值近似方法在磁场计算中的应用·····	(86)
第四章 有限差分法在磁路分析中的运用·····	(87)
§ 4-1 有限差分法用于分析二维磁场·····	(87)
§ 4-2 有限差分法用于三维轴对称磁路分析·····	(93)
第五章 用于静态磁路分析的有限元法·····	(100)
§ 5-1 哈密顿原理·····	(100)
§ 5-2 度量矩阵与刚度矩阵·····	(106)
§ 5-3 等参量有限元·····	(118)
§ 5-4 有限元法用于具有非均匀磁性介质的磁路分析·····	(131)
§ 5-5 有限元法用于具有非线性磁性介质的磁路分析·····	(139)
§ 5-6 有限元法用于具有各向异性磁性介质的磁路分析·····	(144)
第六章 有限元法用于分析有损耗的磁系统·····	(158)
§ 6-1 有限元法用于求解波动问题·····	(159)
§ 6-2 有限元法用于分析磁路的涡流问题·····	(165)
§ 6-3 有限元法用于分析运动磁场问题·····	(185)
第七章 边界元法及其在静态磁路分析中的运用·····	(195)
§ 7-1 加权剩余方法·····	(196)
§ 7-2 边界元法用于分析静态磁路的位势问题·····	(203)

§ 7-3 边界磁性源的分布与作用	(222)
第八章 边界元法用于不定常磁系统的分析	(232)
§ 8-1 边界元法用于分析磁路的涡流问题	(232)
§ 8-2 边界元法用于求解波动问题	(241)
§ 8-3 边界元法用于分析带线环形器	(243)
第九章 边界元法与有限元法在磁路计算中的结合运用	(250)
附 录 磁导公式推导	(260)
参考资料	(273)

第一部分 磁路计算的一般原理与简易近似计算方法

设计磁性器件,除选择合适的材料之外,还要求适合于某种特定用途的磁路。就象设计一台电子仪器一样,除了选择适当的元件之外,还必须设计适当的电路。一般而言,磁通所占的空间区域就称为磁路。根据关于磁的高斯(Gauss)定律,磁通是连续的,因而,磁路应当是一个连续区域。磁路一般由铁磁材料部分(如软磁体、永磁体)与非铁磁材料部分(如工作间隙、漏磁空间等空气部分)所组成。具有适当高的磁导率的金属或铁氧体导磁材料构成了磁通的主要路径,相当于电路中具有一定电导的导电路径。永磁体提供一定的磁动势,相当于电路中的电势源。当然,也有由激磁线圈中的电流产生部分或全部磁动势的,这时,磁路中可能不包括永磁体,电磁铁就是如此。

然而,磁路与电路并不完全相似,其最大的区别就在于铁磁材料与非铁磁材料的磁导率之比要比导电材料与绝缘材料的电导率之比低得多。后者可达 10^{18} 以上,而前者至多只能达到 10^6 ,一般均在 10^4 以下。因此,对磁路而言,非铁磁材料所占的部分空间(包括工作间隙、装配间隙及周围空间等)都不能认为是磁绝缘的,它们也属于磁通路径的一部分。由此可见,磁路的分析、计算应当包括铁磁材料及非铁磁材料的整个空间区域的场分析。

关于空间场,正如我们在“电动力学”中所熟知的那样,可以用麦克斯韦(Maxwell)方程组来描述。这个方程组所包含的三个独立方程的微分形式可以写成

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{法拉第定律}) \quad (0-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{麦克斯韦-安培定律}) \quad (0-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{连续性方程}) \quad (0-3)$$

这里 \mathbf{E} = 电场强度 (V/m),
 \mathbf{D} = 电通密度 (C/m^2),
 \mathbf{H} = 磁场强度 (A/m),
 \mathbf{B} = 磁通密度 ($\text{T} = \text{Wb}/\text{m}^2$),
 \mathbf{J} = 电流密度 (A/m^2),
 ρ = 电荷密度 (C/m^3)。

我们由(0-1)、(0-2)和(0-3)式(通过取散度并令关于时间的积分常数为零)还可得到

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{关于磁的高斯定律}) \quad (0-4)$$

及

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{高斯定律}) \quad (0-5)$$

当然,也可选择方程(0-1)、(0-2)、(0-5)为麦克斯韦方程组的独立方程。既然空间存在铁磁体,就必须考虑介质的作用。于是,通过

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (0-6)$$

及
$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (0-7)$$

引入材料的场矢量，极化强度 \mathbf{P} (C/m²)与磁化强度 \mathbf{M} (A/m)。并且， $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ (F/m)。 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (H/m)。方程(0-6)、(0-7)表征了场量之间的关系，这些附加信息在求解场的问题时是必要的。我们还可以通过电容率 ϵ 、磁导率 μ 及电导率 σ ，将场量之间的相互关系写成

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (0-8)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (0-9)$$

及
$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (0-10)$$

利用方程(0-1)~(0-10)可以对包括铁磁体在内的空间场进行分析、计算。然而，在一般情况下，这样的直接计算是比较麻烦的。因为即使在各向同性材料中， μ 也不是一个线性参量，需要应用计算机作数据处理。这个问题将在后面两章讨论，本章主要讨论磁场与磁路的一般分析、设计问题。在这里，我们把磁路看成是集总的。然而，在决定这些集总参量的时候，仍然需要通过场分析。

第一章 静态磁路的半集总参量分析与简单近似计算

静磁场与恒稳场的场量都与时间无关。静磁场指不存在自由电流密度 J_f ，即不存在外加激磁电流（或涡流等）的情况。它相当于完全由永磁产生的磁场。恒稳场是指存在恒稳的 J_f ，它相当于存在直流激磁电流的情况。参量不随时间变化的磁路称为静态磁路。如图1-1所示的电磁铁、马蹄形磁铁、牛角形磁铁、扬声器磁路等等，都是常见的静态磁

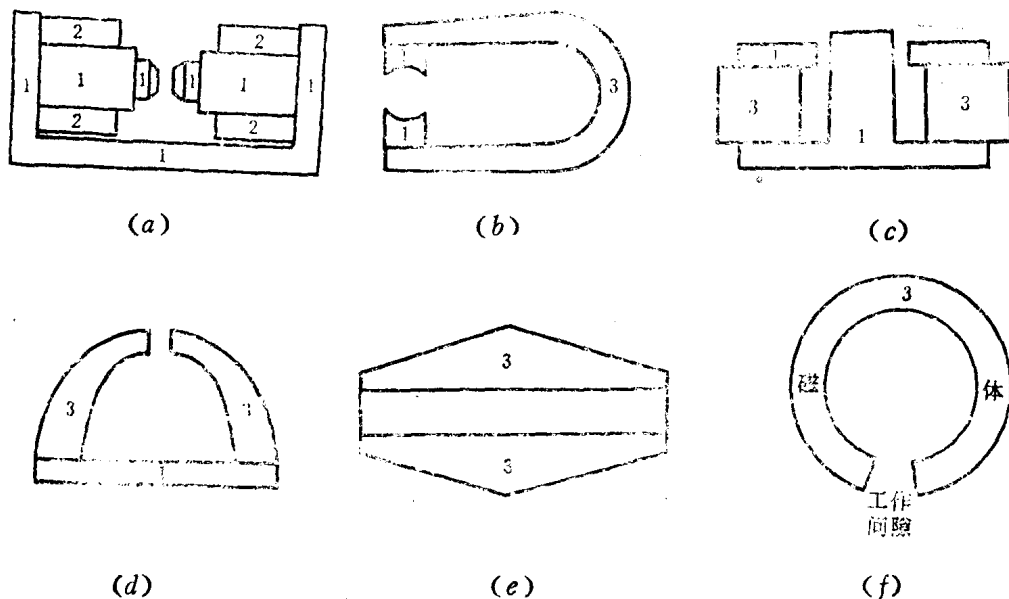


图 1-1 几种静态磁路

- (a) 一种C型电磁铁，“1”为软磁体，“2”为直流线圈。
- (b) 一种用于仪表的马蹄型磁铁，“1”为软磁体（极靴），“3”为永磁体。
- (c) 一种永磁扬声器磁路，“1”为软磁体。“3”为永磁体。
- (d) 一种牛角型磁铁，“1”为软磁体（磁轭），“3”为永磁体。
- (e) 一种用于微波电子管的腰鼓形磁钢，“3”为永磁体。
- (f) 环形磁路。

路[⊖]。这类磁路的结构及磁体的工作状态都是不变的，也不存在涡流等时间效应及损耗。

既然磁路的主要部分由软磁体与永磁体组成，作为磁路分析的基础，我们需要首先讨论磁化磁体的特性及在磁路中的作用。关于磁化磁体，我们有两种完全等效的物理模型：磁荷模型与电流模型。根据磁荷模型，认为磁化磁体存在着密度为 ρ_m (Wb/m^3)的磁荷分布，从而建立磁标量势 φ_m 及势量场 $H_m = -\nabla\varphi_m$ 。于是，应用高斯定律(0-5)

⊖ 有的书上只限于将结构不变的永磁磁路称为静态磁路。然而，从磁荷的观点来看，稳定电流的电磁铁磁路与永磁磁路并没有什么区别，因而我们亦将它归于此类。

式, 我们有

$$\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H}_m = \rho_m \ominus \quad (1-1)$$

对于软磁体, 在外场 \mathbf{H}_0 作用下, 磁体内部磁场强度

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_m \quad (1-2)$$

现在, 我们对磁通密度 \mathbf{B} 取散度, 由 (0-7) 及 (0-4) 式得 $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} + \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H}_m + \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ 。外场 \mathbf{H}_0 可能来自外加激励磁电流所产生的管量场 $\mu_0^{-1} \mathbf{B}_0$, 也可能来自永磁体 (\mathbf{H}_0 的源与沟当然都不在此软磁体上)。在软磁体内部, 恒有 $\nabla \cdot \mathbf{H}_0 = 0$, 于是将 (1-1) 式代入上式, 得 $\rho_m + \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M} = 0$, 即磁体内可能存在磁荷密度

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M} \quad (1-3)$$

对于永磁体, 当存在来自附加线圈中的电流或磁路上的其它永磁体的 \mathbf{H}_0 的时候, 结果与上述情况没有什么区别。当 $\mathbf{H}_0 = 0$ (相当于只存在这一个永磁体) 时, (1-2) 式变成 $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_m$, 但 (1-3) 式仍然正确, 因为 $\nabla \cdot \mathbf{H}_0 = 0$ 表明 \mathbf{H}_0 存在与否并不影响 (1-3) 式的成立。

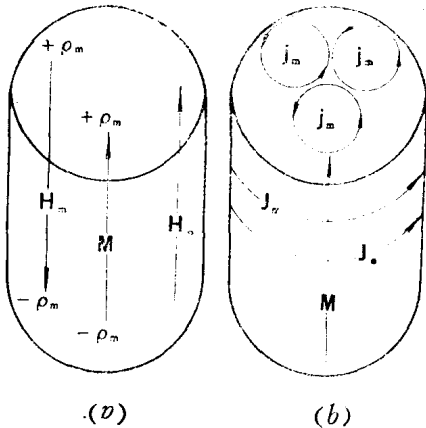


图 1-2 磁化磁体
(a) 磁荷模型; (b) 电流模型

由 (1-1)、(1-3) 式可见, \mathbf{H}_m 的方向与 \mathbf{M} 的方向是相反的 [见图 1-2(a)], 因而, 在磁体中, \mathbf{H}_m 为退磁场强度。在软磁体内部, \mathbf{H}_m 削弱了内场, 使得 $|\mathbf{H}_1| < |\mathbf{H}_0|$ 。在恒磁体内部, \mathbf{H}_m 的存在确定了材料工作于第二象限的退磁曲线上。

在均匀磁体内部 $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$, 从而由 (1-3) 式得出体磁荷密度 $\rho_{mv} = 0$ 。但是在边界上 \mathbf{M} 不连续, 在磁体外部 $\mathbf{M} = 0$, 因而在磁体边界上仍然存在面磁荷密度 ρ_{ms} (Wb/m^2)。这时, (1-3) 式变成 \ominus

$$\rho_{ms} = \mu_0 \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \quad (1-4)$$

\mathbf{n} 为磁体边界的外法向单位矢量。(1-4) 式表明, 在均匀磁体内部, \mathbf{M} 的方向是由负磁荷边界指向正磁荷边界, 退磁场 \mathbf{H}_m 的方向与 \mathbf{M} 相反, 如图 1-2(a) 所示。

磁荷模型的实质是, 磁路中磁体的作用就是由 (1-3) 式确定的密度为 ρ_m 的分布磁

\ominus 本书中关于 ρ_m 的定义为: $\rho_m = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H}$, 这与某些“电动力学”教程中关于 ρ_m 的定义 $\rho_m = \nabla \cdot \mathbf{H}$ 有所不同。

\ominus 我们作一小六面体将磁体的一部分边界包围起来, 六面体上、下两面分别在磁体内、外, 并平行于这部分边界。当这小六面体的高度趋于零时, 六面体体积也趋于零。于是 (1-3) 式变成

$$\rho_{ms} = \mu_0 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}_{\text{外}})$$

但是, 磁体外部 $\mathbf{M}_{\text{外}} = 0$, 于是得 (1-4) 式。

荷的作用。因此，在这里，由磁荷产生的磁场强度是基本量，而磁通密度则认为是由(0-9)式导出的导出量。

根据电流模型，我们认为磁化体存在着如图1-2(b)所示的密度为 J_m 的圆电流分布，从而建立磁矢量 A_m 及磁通密度 $B_m = \nabla \times A_m$ 。于是，由安培定律(0-2)式，我们有

$$\nabla \times B_m = \mu_0 J_m \quad (1-5)$$

若存在外场，则外场 $H_0 = \mu_0^{-1} B_0$ 亦应满足安培定律(0-2)式，即有

$$\nabla \times B_0 = \mu_0 J_0 \quad (1-6)$$

J 为外加激磁电流密度。现在，对磁通密度 $B = B_0 + B_m$ 取旋度，并由(0-2)、(0-7)、(1-5)、(1-6)式得

$$\nabla \times B = \mu_0 \nabla \times H_0 + \mu_0 \nabla \times M = \nabla \times B_0 + \nabla \times B_m = \mu_0 J_0 + \mu_0 J_m$$

即得电流密度 $J_m = \nabla \times M$ (1-7)

不存在外场(即 $H_0 = 0, B_0 = 0$)时，相当于磁路上只存在一个恒磁体，(1-7)式显然仍是正确的，这时 $\nabla \times B = \mu_0 J_m$ 。以上分析表明， J_m 与 J_0 的作用是相似的。 B_m 的存在，也就是磁体的存在，提高了磁路的 B ，使得 $|B| > |B_0|$ 。

在均匀磁体内部，如图1-2(b)所示，圆电流相互抵消，从而有 $J_{m,1} = 0$ 。但在磁体边界上不抵消，仍然存在着面电流密度 $J_{m,2}$ (A/m²)。这时，(1-7)式变成

$$J_{m,2} = -n \times M \quad (1-8)$$

电流模型的实质是，磁路中磁体的作用就是由(1-7)式确定的密度为 J_m 的分布圆电流的作用。因此，在这里，由电流产生的磁通密度是基本量，而磁场强度则认为是从(0-9)式导出的导出量。

在一般情况下，由标量势 ϕ 及磁场强度 H 来分析磁路要比从矢量势 A 及磁通密度 B 出发简便。因为在三维情况下，一个矢量方程便相当于三个标量方程。因此，在一般情况下，我们都将使用磁荷模型。

§ 1-1 磁路计算的基本方程组

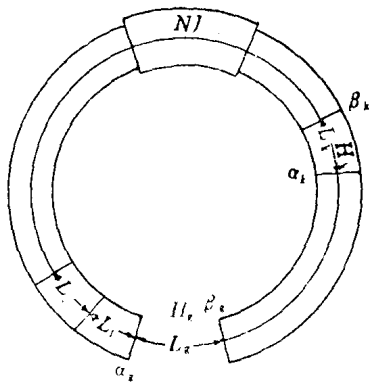


图 1-3 环形磁路

我们以图1-3所示的最基本的均匀断面环形磁路为例来讨论磁路的一般分析、计算。我们对微分形式的安培定律(0-2)式积分，并应用斯托克斯(Stokes)公式，得积分形式的安培定律

$$\oint_L H \cdot dl = \iint_S J \cdot dS \quad (1-9)$$

L (m)为环形磁路的平均周长， S (m²)为 L 所包围的面积。(1-9)式右边的面积分，显然为穿过 S 的总电流。现在，我们设磁路共分 n 段，具有 m 个激磁线圈，其安匝数分别为 $N_k J_k$ ($k=1 \sim m$)。于是，在假定每段

磁路中的磁场强度 $H_{o,k} + H_{m,k}$ 都为恒量的近似条件下 ($H_{o,k}$ 与 $H_{m,k}$ 分别为第 k 段磁路中的 H 与 H_m), (1-9) 式可近似写成

$$\sum_{k=1}^n L_k H_k = \sum_{k=1}^m N_k J_k \quad (1-10)$$

L_k 为第 k 段磁路的平均长度, $H_k = (H_{o,k} + H_{m,k}) \cdot L_k / L_k$ 为第 k 段磁路的磁场强度沿 l 方向的分量。由于 $H = -\nabla\varphi$, 在第 k 段磁路中 $H_k = -d\varphi/dl$, 得磁标量势

$$\varphi = - \int_{L_k} H_k dl = -H_k L_k = \varphi \Big|_{\alpha_k}^{\beta_k} = \varphi(\beta_k) - \varphi(\alpha_k)$$

现在定义: 工作间隙两端 (α_g, β_g) 间磁势差

$$F_g = \varphi(\alpha_g) - \varphi(\beta_g) = H_g L_g$$

第 k 个装配间隙两端间磁势差 (磁位降)

$$F_{\bar{e}k} = \varphi(\alpha_k) - \varphi(\beta_k) = H_{\bar{e}k} L_{\bar{e}k}$$

第 k 段软磁体两端的磁势差 (磁位降)

$$F_{s k} = \varphi(\alpha_k) - \varphi(\beta_k) = H_{s k} L_{s k}$$

第 k 段永磁体两端的磁势差 (磁动势)

$$F_{m k} = \varphi(\beta_k) - \varphi(\alpha_k) = -H_{m k} L_{m k}$$

由于永磁体工作于第二象限, $H_{m k}$ 为负值, $F_{m k}$ 与 $F_{s k}$ 一般是同号的, 现在设磁路具有 n_c 道装配间隙, n_s 段软磁体及 n_m 段永磁体, 则式 (1-10) 可写成

$$\sum_{k=1}^{n_c} F_{\bar{e}k} + \sum_{k=1}^{n_s} F_{s k} + F_g = \sum_{k=1}^{n_m} F_{m k} + \sum_{k=1}^m N_k J_k \quad (1-11)$$

磁势方程 (1-11) 称为“磁路的第二基本方程”, 它与下面将要讨论的磁路的第一基本方程一道构成计算磁路的基本方程组。磁路的第二基本方程表明一个磁路的总磁动势与总磁位降的平衡。在方程 (1-11) 中, 我们可令

$$F_{\bar{e}o n} = \sum_{k=1}^{n_c} F_{\bar{e}k} \quad F_{s o t} = \sum_{k=1}^{n_s} F_{s k}$$

$$F_{M m g} = \sum_{k=1}^{n_m} F_{m k} \quad \text{及} \quad NJ = \sum_{k=1}^m N_k J_k$$

分别代表磁路上各装配间隙产生的总磁位降, 各软磁体产生的总磁位降, 各永磁体提供的总磁动势及各线圈提供的总磁动势。于是, 方程 (1-11) 可以写成更简单的形式。例如, 对于不存在激磁线圈电流的静态磁路, 方程 (1-11) 可写成

$$F_g + F_{s o t} + F_{\bar{e}o n} = F_{M m g}$$

对于不存在永磁体的电磁磁路, 方程 (1-11) 可写成

$$F_g + F_{s o t} + F_{\bar{e}o n} = NJ$$

方程 (1-11) 左边, 表示整个磁路的总磁位降, 其中, F_g 是工作间隙两端的磁势差, 是磁路总磁位降的主要部分。然而, 还必然存在 $F_{\bar{e}o n}$ 及 $F_{s o t}$, 我们令

$$K_r = \frac{F_g + F_{s.o.t.} + F_{c.o.n.}}{F_g} = 1 + \frac{F_{s.o.t.} + F_{c.o.n.}}{F_g} \quad (1-12)$$

称为磁路的“磁阻系数”由于磁路的每道装配间隙 $L_{c.k}$ 都（应当）很小，每个软磁体的磁导率都很高，从而 $H_{c.k}$ 都很小， $F_{c.o.n.}$ 与 $F_{s.o.t.}$ 都远小于 F_g ， K_r 一般约为1.2~1.6左右。 K_r 越接近1表明磁路效率越高。将(1-12)式引入方程(1-11)，得

$$K_r F_g = K_r H_g L_g = F_{M.i.g.} + NJ \quad (1-13)$$

方程(1-13)是“磁路的第二基本方程”(1-11)的更为简便实用的形式。例如，对于只具有一个平均内磁场强度为 H_m ，沿 l 方向的平均长度为 L_m 的永磁体的静态磁路，方程(1-13)可写成

$$K_r H_g L_g = H_m L_m \quad (1-14)$$

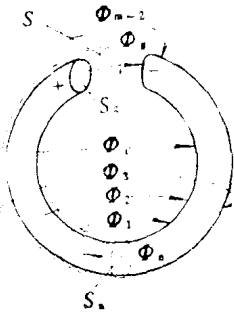


图1-4 环形磁路的漏磁通路

然而，仅有磁路的第二基本方程是不足以计算磁路的，因为磁通的路径及磁通密度的分布还不清楚。现在，我们将图1-3所示的环形磁路作成图1-4形状，它可以是具有激磁线圈电流的电磁磁路，也可以是不具有激磁线圈的静态磁路。磁路具有“中性面” $S_n \ominus$ ，在中性面两边具有磁的对称性（不一定具有几何的对称性）。如图1-4所示，我们作封闭曲面 S 将中性面一边的环形包围起来。将关于磁的高斯定律(0-4)式积分，并应用斯托克斯公式，得

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1-15)$$

现在，我们将 S 收缩到半环形磁路的表面，并假定闭曲面 S 分为 m 个部分，则(1-15)式可写成

$$\sum_{i=1}^m \iint_{S_i} \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{S} = 0$$

近似假设垂直穿过每个 S_i 面的磁通密度 B_i 在 S_i 面上是均匀的，即对于每个 S_i 面来说 $B_i = \text{常数}$ ，于是，(1-15)式可近似写成

$$\sum_{i=1}^m B_i S_i = 0 \quad (1-16)$$

应当注意，(1-16)式中的 B_i 是指由封闭面 S 内部垂直通过 S_i 面穿出（从内向外）的磁通密度，若 B_i 为负值，则表示穿入。现在以 $\Phi_i (\text{Wb}) = B_i S_i$ 表示由 S 内部穿过 S_i 发出的磁通（若 Φ_i 为负值，则为进入），则(1-16)式可写成

$$\sum_{i=1}^m \Phi_i = 0 \quad (1-17)$$

方程(1-17)称为“磁路的第一基本方程”，它与前述的“磁路的第二基本方程”

\ominus 这里所说的“中性面”是指由磁体表面的“中性线”所围成的截面，其特性在下一节中详细讨论。

(1-11)式一道构成计算磁路的基本方程组。第一基本方程(1-17)表明了“磁通连续原理”，即由任何一封闭面发出的磁通与进入此封闭面的磁通总量是相等的。

由于在中性面两边，磁路具有磁的对称性，在中性面某一边的磁位较中性面高，另一边的磁位较中性面低，故中性面两边的环形磁路部分之间存在一定的磁势差。于是，如图1-4所示，除通过工作间隙截面 S_g 的磁通 Φ_g 之外，还存在 $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_i, \dots, \Phi_{m-2}$ 等由封闭面 S 的各部分侧面穿出的磁通。这些磁通不通过工作间隙，它们的路径只有一部分经过磁体而在周围空间形成回路，这些磁通都称为“漏磁通”。由于漏磁通的存在，使得通过工作间隙截面 S_g 的工作磁通 Φ_g 小于通过中性面 S_n 的磁通 Φ_n ，即 $\Phi_n > \Phi_g$ 。这样方程(1-17)可写成

$$\Phi_g - \Phi_n + \sum_{i=1}^{m-2} \Phi_i = 0$$

$$\text{即 } \Phi_n = \Phi_g + \sum_{i=1}^{m-2} \Phi_i = \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} \Phi_i}{\Phi_g} \right) \Phi_g = K_f \Phi_g \quad (1-18)$$

$$K_f = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{m-2} \Phi_i}{\Phi_g} \quad (1-19)$$

K_f 称为磁路的“漏磁系数”，它的值一般都比较大，而且随磁路设计的不同而有相当大的差别，确定漏磁系数 K_f 是计算磁路的关键问题之一。在假定工作间隙截面 S_g 及磁体中性面 S_n 上磁通密度均匀分布的近似条件下，方程(1-17)又可写成

$$K_f B_g S_g = B_n S_n \quad (1-20)$$

我们已经导出了描述磁路基本特性的“磁路的第一基本方程”(1-17)式与“磁路的第二基本方程”(1-11)式，它们构成了计算磁路的完整方程组。然而，我们在应用这个方程组的时候，还必须将第一基本方程中的磁通 $\Phi_i = B_i S_i$ 与第二基本方程中的磁势 $F_i = H_i L_i$ 联系起来。我们知道，对于永磁体， $B \sim H$ 关系就是退磁曲线；对于软磁体， $B \sim H$ 关系则为磁化曲线。因此，必须首先解决磁体工作点的选取与确定问题。这个问题我们将在下一节讨论。

由于漏磁通的存在，对于任何具体磁路(包括图1-4所示的简单环形磁路)分析起来都不是单回路的。面对这种情况，我们首先考虑到的是仍把具体磁路作为一个理想的单环来处理，而把磁势损失，尤其是漏磁通的复杂情况用 K_f 及 K_r 来进行修正。于是便可以应用近似方程(1-13)及(1-20)所组成的方程组来计算磁路。但磁阻系数 K_r ，尤其是漏磁系数 K_f 的确定却仍是一大问题。实际上，只有在个别情况下才能比较准确地估计 K_f 值。而在一般情况下， K_f 及 K_r 都需要进行分析、计算才能确定。这些问题我们将在后面两节讨论。

为了对磁路，尤其是比较复杂的磁路进一步作更普遍的分析，需要引入“磁阻” R_m (A/Wb)的概念。设通过磁路某部分两端磁势差为 F 的磁体或空间的磁通为 Φ ，则

$$R_m = \frac{F}{\Phi} \quad (1-21)$$

称为这部分磁体或空间的磁阻。我们还定义

$$G = \frac{1}{R_m} = \frac{\Phi}{F} \quad (1-22)$$

为这部分磁体或空间的“磁导”。磁体的磁阻与磁导，一般来说都是非线性的，必须由退磁曲线或磁化曲线上的工作点来确定。

现在，我们可以对一个具体磁路，根据磁通路径，作出一个具有几个回路的等效网络。将每一个回路分为若干段（这些段可以是软磁体、漏磁空间、装配间隙或工作间隙），每段的磁阻都作为一个集总元件来处理。回路中的永磁体及激磁线圈电流也都作为集总的源来处理。设第*i*个回路的磁通为 Φ_i ，此回路中的永磁体所提供的磁动势为 $F_{m_i} = H_{m_i} L_{m_i}$ ，线圈电流所提供的磁动势为 $N_i J_i$ 。若 Φ_i 经过属于第*i*回路的总磁阻为 $R_{m_{ij}}$ ，则由磁路的第二基本方程(1-11)及(1-21)式得

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} R_{m_{ij}} \Phi_j = H_{m_i} L_{m_i} + N_i J_i \quad (1-23)$$

系数
$$K_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{当 } j=i \text{ 时}) \\ -1 & (\text{当 } j \neq i \text{ 时}) \end{cases}$$

方程(1-23)就是回路的克希柯夫(Kirchhoff)方程。于是对于整个磁路，我们有方程组

$$\begin{pmatrix} R_{m_{11}} & -R_{m_{12}} & \cdots & -R_{m_{1n}} \\ -R_{m_{21}} & R_{m_{22}} & \cdots & -R_{m_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -R_{m_{n1}} & -R_{m_{n2}} & \cdots & -R_{m_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{m_1} L_{m_1} \\ H_{m_2} L_{m_2} \\ \vdots \\ H_{m_n} L_{m_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_1 J_1 \\ N_2 J_2 \\ \vdots \\ N_n J_n \end{pmatrix}$$

即
$$[R_m][\Phi] = [H_m L_m] + [NJ] \quad (1-24)$$

由此可以解出
$$[\Phi] = [R_m]^{-1} \cdot ([H_m L_m] + [NJ]) \quad (1-25)$$

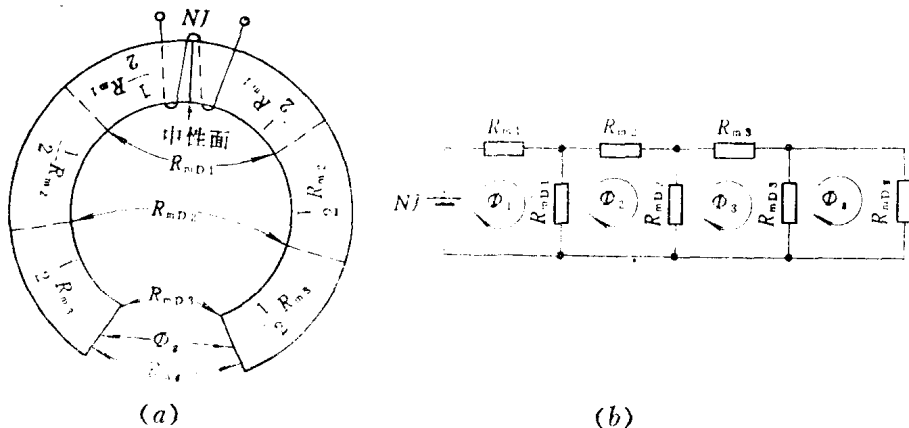


图 1-5 电磁铁磁路示意图
(a) 分析图；(b) 等效网络。

例如，图1-5(a)所示的磁路由软磁体组成的电磁磁路，我们将中性面两边对称地分为三段。设每段的磁阻为 $(1/2)R_{m_i}$ ($i=1,2,3$)，漏磁的磁阻为 $R_{m_{D_i}}$ ，则在磁体非饱和的条件下（认为磁体的 $\mu \approx$ 常数），可以作出图1-5(b)所示的具有四个回路的近似等效

网络。于是，由方程 (1-24) 可列出

$$\begin{pmatrix} R_{m1} + R_{mD1} & -R_{mD1} & 0 & 0 \\ -R_{mD1} & R_{mD1} + R_{m2} + R_{mD2} & -R_{mD2} & 0 \\ 0 & -R_{mD2} & R_{mD2} + R_{m3} + R_{mD3} & -R_{mD3} \\ 0 & 0 & -R_{mD3} & R_{mD3} + R_{m4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} NJ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

只要磁动势 NJ 及各部分的磁阻都已知道，磁路各部分的磁通，尤其是工作间隙的磁通 Φ_4 就可以按 (1-25) 式解出来。然而，例如图 1-6 (a) 所示的由恒磁体组成的静态磁路，情况就要复杂一些了。我们仍然将中性面两边每边对称地分为三段，每段沿 l 方向的平均长度为 L_{m_i} ，磁场强度分量为 H_{m_i} ($i=1,2,3$)。于是，可以作出图 1-6 (b) 所示的近似等效网络。并且由方程 (1-24) 式可以列出

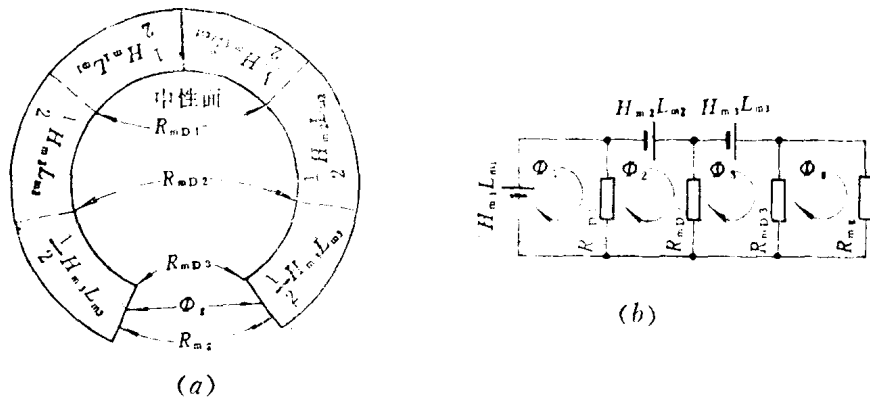


图 1-6 永磁磁路示意图

(a) 分析图； (b) 等效网络。

$$\begin{pmatrix} R_{mD1} & -R_{mD1} & 0 & 0 \\ -R_{mD1} & R_{mD1} + R_{mD2} & -R_{mD2} & 0 \\ 0 & -R_{mD2} & R_{mD2} + R_{mD3} & -R_{mD3} \\ 0 & 0 & -R_{mD3} & R_{mD3} + R_{m4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{m1}L_{m1} \\ H_{m2}L_{m2} \\ H_{m3}L_{m3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

现在，还不能立刻运用 (1-25) 式求出结果。因为 H_{m1} 、 H_{m2} 、 H_{m3} 也是未知量，而且一般来说它们互相并不相等。事实上， H_{m_i} 是 Φ_i 的函数，它们与 $B_i = \Phi_i / S_i$ 的关系由退磁曲线决定。因此，我们所得到的方程组实际上是一个非线性方程组。要同时确定 Φ_i 与 H_{m_i} ，就必须首先解决永磁体的退磁曲线上的工作点的确定与选择这一问题，这个问题将在下一节讨论。

我们已经讨论了磁路的简单分析计算方法。从表面看来，利用从磁路的第一、二基本方程导出的方程 (1-13) 及 (1-20) 来计算磁路最为简便，我们只需要知道结构尺寸 (如 L_m 、 S_a 、 L_g 、 S_g 等) 和外部参量 (如 N 、 J 等)，就可以计算工作间隙的磁场强度 H_g ，反过来也可由所要求的 H_g 来设计、计算结构尺寸。在计算过程中只需要“挑选”适当的磁阻系数 K_r 及漏磁系数 K_l 就行了。然而，事实上这个“挑选”却恰恰是最困难的，尤其是对 K_l 。我们需要计算磁路每个部分的磁导 (或磁阻) 及磁势才能确定 K_r 、 K_l 的大小，这就包括了空间的和磁体的计算，这些问题将在后面讨论。另一种方法是利用近