沈士成　于光中编著

TOURU CHANCHUFENXI JIAOCHENG

投入产出分析教程

河南人民出版社

投入产出分析教程

沈士成　于光中编著

钟契夫主审

河南人民出版社

责任编辑：辛发霖

投入产出分析教程

沈士成　于光中编著

钟契夫主审

河南人民出版社出版

河南第一新华印刷厂印刷

河南省新华书店发行

850×1168毫米 32开本 13.125印张 301千字

1987年3月第1版　　1987年3月第1次印刷

印数1—4,990册

统一书号4105·48　　定价2.65元

内容简介

本书包括六篇十八章，比较全面系统地阐述了“投入产出分析”的产生、发展、特点和理论基础；投入产出表的表式及其编制方法；投入产出分析的各类模型，包括全国性行模型、列模型、固定资产模型、投资模型、优化模型和动态模型，地区实物模型和价值模型，企业实物模型、价值模型、价格模型和财务模型，以及各类模型在经济计划、经济分析、经济预测和经济研究中的应用。

书中运用了许多实例说明“投入产出分析”的原理和方法，并添加了必需的数学和经济学预备知识。全书深入浅出，容易读懂。

本书可作为高等院校财经类和管理类专业的教材或教学参考书，也适于各级经济管理干部和有志青年自学参考。

写在前面

一九八四年暑假，全国高校计划学研究会在会长李震中教授、副会长钟契夫教授、秘书长汪廷忠副教授、副秘书长张鸿羽、谭作平副教授的关怀和主持下，于昆明市云南财贸学院办起了“全国高校计划教师投入产出研究班”。笔者荣幸地应邀前往讲课（应该说是向国内同行专家汇报）。我国著名计划学教授、中国人民大学计划统计学院钟契夫老师亲自为我们拟定了讲课的体系。在研究班百余位老师的支持、勉励和要求下，我们两人分头把各自的讲稿、讲义作了较大的修改，并增补了部分新的内容，编写成现在这本《投入产出分析教程》。在编写过程中，我们参考了国内外许多有关投入产出的专著、教材和论文，在此谨向文著的作者（恕不一一列举）表示感谢。

本书第一、二、六篇由沈士成编写，三、四、五篇由于光中编写。全书由钟契夫主审。限于水平和时间，书中一定存在缺点和错误，敬请大家批评和指正。

笔　　者

1985·7·

目　录

第一篇　预备知识、概论

第一章　数学预备知识

投入产出分析，特别是静态投入产出模型，需要的数学基础知识主要是矩阵代数。因此，在我们学习投入产出分析之前，需要补习一下矩阵代数基础。

1.1　矩　阵

一、矩阵的概念

矩阵，就是按一定的顺序排成的矩形数表。

〔例1〕　某食品店11月和12月水果的零售量如下表（表1—1）：

表1-1　　　　单位：千斤

	桔　子	苹　果	香　蕉
11月	8	2	3
12月	6	4	5

显然，表1—1是一张数表，形如矩形，表中数字按一定顺序排列。因此，该表实质上就是矩阵，是食品店水果零售量矩阵。

不过，在数学上，为了运算的方便，并不把矩阵画成繁琐的表格，而简单地用括号把有顺序的数字表括起来。

上述水果零售量矩阵就记为

$$A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

该矩阵有两个横行，三个纵列，称为两行三列矩阵，或2×3矩阵，可记为$A_{2\times 3}$。

〔例2〕　若将方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=7 \\ 3x_1+2x_2=12 \end{cases}$$

中各变量的系数，有顺序地排列成如下数表：

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

则该数表也就是矩阵，称方程组的系数矩阵。

如果把方程组右端的常数项也放进矩阵，如

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

则称为方程组的增广矩阵。

现在，我们把矩阵概念推广为一般。

矩阵是由$m\times n$个数a_{ij}($i=1$，2，……，m；$j=1$，2，……，n；m，n都是正整数)排成的m行n列的矩形阵，即

$$A_{m\times n}=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称$A_{m\times n}$为m行n列矩阵，或$m\times n$矩阵。其中横排的，我们约定

叫行，竖排的叫列，a_{ij}叫元素。a_{ij}的两个下标，第一个i表示该元素所在的行数，第二个j表示它所在的列数。对于矩阵，可以简记为A，B或$[a_{ij}]$，$[b_{ij}]$等。

二、特殊矩阵。

1.方阵　行数和列数相等的矩阵叫做方阵。$m\times m$矩阵，称为m阶方阵。

［例3］

$$A_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

就是一个方阵。它有2行2列，称为2阶方阵。

2.向量　只有一行或一列的矩阵叫做向量。由n个数a_1，a_2，……，a_n排成一行的向量

$\alpha=[a_1 \quad a_2 \cdots\cdots a_n]$

叫n维行向量。由m个数b_1，b_2，……，b_m排成一列的向量

$$\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为m维列向量。向量中的元素，称为分量。

矩阵$A_{m\times n}$中某一行n个元素所组成的n维行向量，叫做矩阵A的行向量；某一列m个元素所组成的m维列向量，称为A的列向量。易见，矩阵$A_{m\times n}$有m个行向量，n个列向量。

〔例4〕

$$A_{2\times 4}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的行向量

$\alpha_1=[\,2\ \ 1\ \ 1\ \ 0\,]$；

$\alpha_2=[\,3\ \ 2\ \ 0\ \ 1\,]$。

列向量

$\beta_1=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\beta_4=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$。

3.单位向量　只有一个分量是1，其余分量都为0的向量，叫单位向量。例如，上述β_3，β_4，或

$$[\,0\ \ 1\ \ 0\cdots\cdots 0\,],\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

都是单位向量。

4.单位矩阵　方阵主对角线（从左上角到右下角的对角线）上的元素均为1，其余元素都为0的方阵，叫做单位矩阵，记为I。

即

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

$m\times m$单位矩阵，称m阶单位矩阵，有时特记为I_m。

5.对角形矩阵　除了主对角线上的元素不全为零外，其余元

素均为零的方阵叫对角形矩阵，记为Λ。即

$$\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

其中$\lambda_i(i=1, 2, \cdots, m)$不全为零。若$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m$，则此对角形矩阵叫做数量矩阵。

6.零矩阵　元素全为0的矩阵叫做零矩阵，记为○。

$$\bigcirc=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

7.子矩阵　从$m\times n$矩阵A中删去某些行和列，保留其余的S行和K列，仍按原有顺序排成的$S\times K$矩阵，就叫做A的子矩阵。

[例5]

$$A_{2\times4}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{2\times2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_{2\times2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_{2\times3}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

其中，矩阵B、C、D都是矩阵A的子矩阵。特别，B、C是子方阵。

8.三角形矩阵　主对角线一侧的所有元素都等于零，另一侧的所有元素不全为零的方阵，称三角形矩阵。例如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

分别是上下三角形矩阵。

1.2 矩阵运算

一、矩阵相等

$m\times n$矩阵A与$m\times n$矩阵B相等，是指A中的每个元素与B中相应元素都相等。

〔例6〕

若$A=\begin{pmatrix}2&3\\4&8\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&3\\4&8\end{pmatrix}$

则$A=B$

二、矩阵加法、减法

（一）矩阵加法。$m\times n$矩阵A与$m\times n$矩阵B相加，所得的矩阵也是$m\times n$矩阵，其中的各元素分别是A和B中各相同位置的元素相加所得的和。即

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&b_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots\cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots\cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

〔例 7 〕

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 9 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

（二）矩阵减法。两个 $m\times n$ 矩阵相减，其对应元素分别相减。

〔例 8 〕

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 15 & 13 & 16 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 10 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

三、数乘矩阵

用一个数 k 乘矩阵 $A_{m\times n}$，就是用 k 去乘 $A_{m\times n}$ 中的每一个元素，即

$$kA=k\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

〔例 9 〕

$$2\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 8 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

四、矩阵乘矩阵

（一）可乘条件

矩阵A乘以矩阵B，只有在A的列数和B的行数相同时才有意义，否则就没有意义。例如：

$$\underset{3\times 2}{A}\cdot\underset{2\times 2}{B} \quad 和 \quad \underset{1\times 1}{A}\cdot\underset{1\times 1}{B}$$

有意义。否则

$$\underset{2\times 2}{B}\cdot\underset{3\times 2}{A} \qquad \underset{4\times 3}{A}\cdot\underset{2\times 4}{B}$$

没有意义，因为它们不符合可乘条件。

（二）积矩阵的行数和列数

若A为$m\times n$矩阵，B为$n\times P$矩阵，$A\cdot B=C$，则C为$m\times P$矩阵。就是说，积矩阵C的行数由A的行数所决定，列数由B的列数所规定。例如，

$$\underset{3\times 2}{A}\cdot\underset{2\times 2}{B}=\underset{3\times 2}{C}, \qquad \underset{1\times 2}{A}\cdot\underset{2\times 1}{B}=\underset{1\times 1}{C}$$

（三）矩阵乘法的运算

1.求和号

在说明矩阵乘法运算步骤的过程中，需用求和号。因此，先复习一下求和号的用法。

(1)假如变量X有n个观测值X_1、X_2、X_3……X_n，则其和记为$\sum_{i=1}^{n}X_i$。即