景山大视野

JINGSHANDASHIYEJINGSHANDASHIYEJINGSHAN

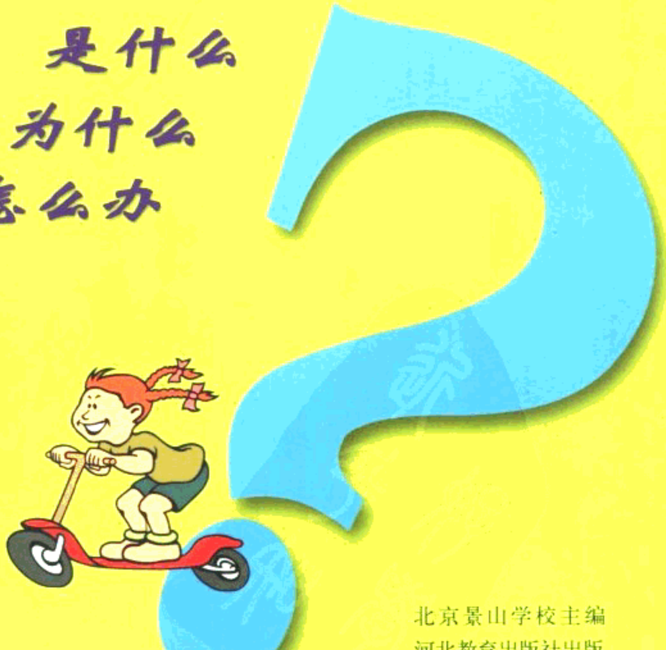
初三代数（全一册）

课本中的

是什么

为什么

怎么办



北京景山学校主编

河北教育出版社出版

出版者的话

“思源于疑”，有思有疑能提高和进步。

学习是一个特殊的认知过程。在这个过程中，教师的帮助是重要的，但更重要的是学生能够通过自学，主动获取知识。自学就会遇到疑难，有了疑难怎么办？一套优秀的助学读物无疑是学生的良师益友。

北京景山学校是享誉海内外的国家级重点学校，该校根据多年的教学体会，邀请全国多家名校的名师，组织编写了这套《景山大视野——课本中的是什么，为什么，怎么办》丛书。

这套丛书充分吸收了景山学校和其他名校的教学理念和实践经验，以对学生进行素质教育为前提，培养综合能力为目的，从“解惑”的角度出发，深挖教材，启发式地帮助学生解答在学习过程中碰到的一些问题，同时使用精选的、具有针对性的习题帮助学生巩固在课堂上学到的知识。

每本书均与现行教材相配套，其内容按单元均分为六部分：

(一)知识平台：该部分详细给出本单元的知识重点、难点、疑点和能力要求，使学生对本单元内容一目了然，有助于学生总结复习。

(二)学法旨要：该部分按知识能力要求，以问答的形式从学习方法、知识导向、思维基础方面给出思路，引导学生开拓视野，达到事半功倍的效果。

(三)精点答疑：该部分以问答的形式写出课本中的是什么、为什么、怎么办，问题新颖，重点突出，分析透彻，解法规范，评点全面。

(四)练习解答：该部分将课本中课后主要习题按进度给出详细解答，以规范学生的解题方法。

(五)知识链接：该部分为课本的拓展和渗透性问题，源于课本但又高于课本，能满足知识水平较高学生的需要，为其今后的学习和升学打下基础。

(六)同步题库：给出一组配合本单元的练习题库。难度适宜，既照顾到大部分学生，又能满足能力较高学生的要求。

总之，这是一套源于课本又高于课本的、以创新为主线的新型助学读物。读者有了这套书，就像有了一位无言的名师。换言之，这套书是助学读物，是教参，是解答课本问题的百科全书，是开启智慧之门的金钥匙。

河北教育出版社

教改播智慧
桃李遍中华

景山教改系列丛书出版之贺

二〇〇二年六月 柳斌

序

过去，中小学除了学生用的课本以外，还有一本教师用的参考书，后来又发展到学生用的各种各样的参考资料。前两者是课堂教学用的，后者则是为升学考试用的。我在国外只见到过学生用的课本，没有见到过别的什么“教参”之类的东西。可见这是我们中国的特色。有了教师用的“教参”，可以帮助教师了解教学大纲的精神、要求，领会课本内容，抓住授课的重点和难点。这对于我国这样一个教育发展不平衡，师资水平不整齐的泱泱大国，无疑是有好处的。但对于一位高水平的老师来讲，恐怕并不是必须的，有时候甚至会束缚老师的思维。但是自从出现统一考试以后，“教参”的性质就变了，变成考试的指挥棒，于是不论是有水平的老师，还是没有水平的老师，都离不开“教参”了。至于学生用的参考资料则是五花八门，大多是练习题和解题的方法。学生无非想多了解各种题型，多做题，以便应付各种考试。出版商无非想从学生身上多赚些钱，于培养人才有多大好处却说不上来。

那么，是不是除了课本什么书都不要呢？当然不是。相反，学生需要阅读各种各样的课外读物来丰富他们的知识；老师也需要阅读各种图书以增强教学能力。教学参考书也是要的，但要把参考的眼光放大放宽，能够给学生和老师无论是在教学上还是学习上都有启发和帮助。因此要超越课本，更多的是给老师、学

生提供教、学的资料，供师生选择，指导学生选择正确的学习路线和学习策略，提供多种方法供学生选择。

景山学校是全国著名的实验学校，从它创建开始就开展教改实验。四十多年来他们在教学上有许多创新，积累了丰富的经验。由河北教育出版社与景山学校教师合作，也吸收其他学校的优秀教师参加，编写一套新的教学参考用书，我想会有新意。从他们设计的方案来看，这套书不同于一般的教师用的“教参”，也不同于学生用的练习册，既与课本有联系，又超越课本；既可以学生用，又可以教师用。这确有点新意。我不是学科专家，难以对它的内容作什么评价。它的价值恐怕要由广大教师和同学在使用过程中来评判。

顾明远

2002年3月23日于北京

目 录

第十二章　一元二次方程

知识平台

重点　本章的重点有三个：一元二次方程的解法；可化为一元二次方程的分式方程的解法；列方程解应用题.

难点　本章的难点有三个：配方法；列方程解应用题；分式方程的增根、验根问题.

疑点　本章的疑点是：

(1)一元二次方程的四种解法之间有什么联系？解一元二次方程时怎样针对方程的特点选择合适的方法？

(2)一元二次方程的根的判别式有什么作用？

(3)一元二次方程的根与系数之间存在怎样的关系？

(4)怎样恰当地使用一元二次方程根的判别式和根与系数的关系解决有关问题？

(5)用公式法解一元二次方程与用公式法在实数范围内分解二次三项式的区别是什么？

(6)分式方程产生增根的原因是什么？

(7)怎样根据二元二次方程组的特点巧解二元二次方程组？

如此种种，往往因为概念模糊而造成是非混淆、思路混乱、解题错误，同学们在学习中应当从理解和掌握概念入手，理清思路，澄清认识，提高解题能力.

学法旨要

1．本章的学习目标是什么？

通过本章的学习，应达到以下学习目标：

(1)了解一元二次方程的概念，会用直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法解一元二次方程，并且能够根据方程的特征，灵活选用一元二次方程的解法求方程的根.

(2)理解一元二次方程的根的判别式，会运用它解决一些简单的问题，会列出一元二次方程解应用题.

(3)掌握可化为一元二次方程的分式方程的解法，知道分式方程产生增根的原因，并会验根.

(4)能够灵活地运用换元法解分式方程.

(5)掌握一元二次方程的根与系数的关系，会运用它解决一些简单的问题.

(6)了解二元二次方程、二元二次方程组的概念，掌握由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的二元二次方程组的解法，掌握由一个二元二次方程和一个可以分解为两个二元一次方程的二元二次方程构成的二元二次方程组的解法.

(7)通过本章的学习，进一步提高逻辑思维能力，特别是，通过解可化为一元二次方程的分式方程和无理方程，理解“转化”的数学思想；通过解二元二次方程组，进一步理解“消元”、“降次”的数学方法，获得对事物可以转化的进一步认识.

2. 学好本章知识的关键在哪里？

学习本章知识的关键是一元二次方程的解法，特别是公式法. 因为一元二次方程的解法，除是本章的学习重点外，还是学习根与系数的关系、可化为一元二次方程的方程和简单的二元二次方程组的基础.

精点答疑

1. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 中，系数 a、b、c 是如何界定的？

我们把只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程，叫做一元二次方程. 它的一般形式是 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$. 其中 ax^2 叫二次项，a 叫二次项的系数，并且 a 一定不能是零（因为 $a=0$ 时，这个方程就没有了二次项，它也就不是一元二次方程了）；bx 叫一次项，b 叫一次项的系数；c 叫常数项.

在一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 中，只规定了 $a\neq0$，对 b、c 没有作出规定. 根据定义，b、c 可以同时为零，可以同时不为零，还可以其中之一为零. 这里，我们把缺一次项（即 $b=0$）或常数项（即 $c=0$）的一元二次方程称为不完全的一元二次方程. 一元二次方程的分类如下：

$$\begin{array}{c}\text{一元二次方程}\\ ax^2+bx+c=0\\ (a\neq0)\end{array}\begin{cases}\text{完全的一元二次方程 } ax^2+bx+c=0(b\neq0,c\neq0)\\ \text{不完全的一元二次方程}\begin{cases}ax^2+c=0(\text{缺一次项}, b=0, c\neq0)\\ ax^2+bx=0(\text{缺常数项}, b\neq0, c=0)\\ ax^2=0(\text{缺一次项和常数项}, b=0, c=0)\end{cases}\end{cases}$$

2. 用直接开平方法解一元二次方程的关键是什么？

对于形如 $ax^2+c=0$（a、c 异号）的不完全一元二次方程或形如 $(x-a)^2=b(b\geqslant0)$ 的完全一元二次方程，可用直接开平方法来解.

例如，$ax^2+c=0$（a、c 异号）可化为 $x^2=-\frac{c}{a}$. 因为 a、c 异号，所以 $-\frac{c}{a}>0$，根据一个数的平方根的概念可得 $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. 所以 $x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}$，$x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ 是一元二次方程 $ax^2+c=0$（a、c 异号）的两个根. 这种解一元二次方程的方法叫做直接开平方法.

例 1　解方程　$25x^2-4=0$.

规范解法　$\because$　$25x^2-4=0$ 可化为 $x^2=\frac{4}{25}$，

根据一个数的平方根的意义得

$$x=\pm\frac{2}{5}.$$

$\therefore$　$x_1=\frac{2}{5}$ 或 $x_2=-\frac{2}{5}$.

思路启迪　例 1 是符合 $ax^2+c=0$（a、c 异号）形式的方程，可用直接开平方法来解.

点评　例 1 中，解方程的关键是先把原方程化为 $x^2=\frac{4}{25}$. 因为 x 是 $\frac{4}{25}$ 的平方根，所以 $x=\pm\frac{2}{5}$.

例2 解方程 $(x+1)^2-12=0$.

规范解法 移项,得 $(x+1)^2=12$.

因为 $x+1$ 是12的平方根,

所以 $x+1=\pm\sqrt{12}$,

$x+1=\pm2\sqrt{3}$.

即 $x=-1\pm2\sqrt{3}$.

$\therefore$ $x_1=-1+2\sqrt{3}$, $x_2=-1-2\sqrt{3}$.

思路启迪 对于形如 $(x-a)^2=b(b\geqslant0)$ 的方程,可根据一个数的平方根的意义得 $x-a=\pm\sqrt{b}$,所以 $x=a\pm\sqrt{b}$,即 $x_1=a+\sqrt{b}$, $x_2=a-\sqrt{b}$ 是原方程的两个根. 例2是符合 $(x-a)^2=b(b\geqslant0)$ 的形式的方程,可用直接开平方法解.

点评 例2中,方程的左边是含有未知数的一次式的平方,移项后右边是一个非负数,即符合 $(x-a)^2=b(b\geqslant0)$ 的形式. 根据一个数的平方根的意义,同样可以用直接开平方法来解.

用直接开平方法解一元二次方程的根据是一个数的平方根的意义.可见,在这里“直接开平方法”起到了一个承上启下的作用,一方面它将“一元二次方程”与“数的开方”的有关内容联系起来,可以复习巩固旧知识;另一方面通过解形如 $(x-a)^2=b(b\geqslant0)$ 的方程,就可比较自然地导出配方法.

3. 用配方法解一元二次方程的关键是什么?

对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$,如果把左边的二次三项式进行配方,把原方程化为 $a(x+m)^2=n(a\neq0, a、n$ 同号)的形式,就可以用直接开平方法来解.这种方法,叫做配方法.

例1 解方程 $x^2-6x+4=0$.

规范解法 移项得 $x^2-6x=-4$.

方程两边同时加上一次项系数一半的平方,得

$$x^2-6x+9=-4+9.$$

$\therefore$ $(x-3)^2=5$.

$\therefore$ $x-3=\pm\sqrt{5}$.

即 $x_1=3+\sqrt{5}$, $x_2=3-\sqrt{5}$.

思路启迪 如果把原方程化为 $x^2-6x=-4$,方程左边加上9以后可以得到 $(x-3)^2$,于是 $x^2-6x+9=-4+9$.这样,原方程就化成了 $(x-3)^2=5$ 的形式,可以用直接开平方法解.

点评 例1是二次项系数为1的方程. 用配方法解这类方程的关键是,方程的两边都加上一次项系数一半的平方,使方程的左边化为一个完全平方式,然后再用直接开平方法去解.

注 方程 $x^2-6x=-4$ 的两边同时加上9,即在方程两边同时加上一次项系数一半的平方.

例2 解方程 $2x^2-6x+1=0$.

规范解法 方程两边同时除以2,得

$$x^2-3x+\frac{1}{2}=0.$$

移项得 $x^2-3x=-\frac{1}{2}$.

方程两边同时加上一次项系数一半的平方,

思路启迪 这个方程的二次项系数不是1.因此,为了采用配方法,必须把二次项系数化为1,即方程两边同时除以二次项的系数2,把原方程化为 $x^2-3x+\frac{1}{2}=0$,然后再用配方法.

得

$$x^2-3x+\left(-\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)^2.$$

$$\therefore\quad \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{4}.$$

$$\therefore\quad x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

即 $x_1=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$， $x_2=\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}$.

点评 例 2 的二次项系数不是 1. 因此，把原方程化为二次项系数是 1 的方程，是解这类方程的关键.

注 把方程的二次项系数化为 1，是为了使配方简单.

用配方法解一元二次方程时，需把方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 化为 $a(x+m)^2=n(a$、n 同号)的形式，再用直接开平方法来解. 它的基础仍是一个数的平方根的概念. 其中，例 1 是二次项系数为 1 的情况，其解题关键是方程两边都加上一次项系数一半的平方，使方程化为$(x+m)^2=n(n\geqslant0)$的形式；例 2 是二次项系数不为 1 的情况，这里的关键是把二次项系数化为 1.

用配方法解一元二次方程比较麻烦. 在实际解一元二次方程时，一般不用配方法. 但是，配方法是推导求根公式的关键，在以后的学习中，会常常用到配方法，所以同学们应很好地掌握这种方法.

4. 一元二次方程的求根公式是如何推导的？怎样用公式法解一元二次方程？

下面我们用配方法来解一般形式的一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0\quad(a\neq0).$$

因为 $a\neq0$，所以方程两边同时除以 a，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

移项，得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

配方，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

即

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

因为 $a\neq0$，所以 $4a^2>0$，当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

所以

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

即

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

由此得到一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的求根公式是

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.\quad(b^2-4ac\geqslant0)$$

像这样，把用配方法解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的结果用公式形式表达，再根据公式直接求出一元二次方程的解，这种方法就是公式法.

例 1 解方程 $2x^2+5x-3=0$.

规范解法 $\because$ $a=2,b=5,c=-3$,

$\therefore$ $b^2-4ac=5^2-4\times2\times(-3)=49>0$.

$\therefore$ $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{49}}{2\times2}=\dfrac{-5\pm7}{4}$.

$\therefore$ $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=-3$.

思路启迪 先根据 a、b、c 的值，求出 b^2-4ac 的值，然后再确定方程的根.

点评 例 1 中，由 $b^2-4ac>0$ 可知，原方程有两个不相等的实数根.

注 用公式法解一元二次方程时，先根据 a、b、c 的值求出 b^2-4ac 的值，是为了根据 b^2-4ac 的值确定方程有无实数根. 若 $b^2-4ac\geqslant0$，则代入求根公式求得原方程的根；若 $b^2-4ac<0$，则直接确定原方程无实数根.

例 2 解方程 $x^2-2\sqrt{3}x+3=0$.

规范解法 $\because$ $a=1,b=-2\sqrt{3},c=3$,

$\therefore$ $b^2-4ac=(-2\sqrt{3})^2-4\times1\times3=0$.

$\therefore$ $x=\dfrac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{0}}{2\times1}=\sqrt{3}$.

$\therefore$ $x_1=x_2=\sqrt{3}$.

思路启迪 这个方程中，一次项的系数是一个无理数，在由 a、b、c 的值求 b^2-4ac 的值时应细心，以免出错.

点评 例 2 中，因 $b^2-4ac=0$，故原方程有两个相等的实数根(即重根).

例 3 解方程 $3x^2-5x+9=0$.

规范解法 $\because$ $a=3,b=-5,c=9$,

$\therefore$ $b^2-4ac=(-5)^2-4\times3\times9=-83<0$.

$\because$ 负数没有平方根，

$\therefore$ $\sqrt{b^2-4ac}$ 没有意义.

$\therefore$ 原方程没有实数根.

点评 例 3 中，$b^2-4ac<0$. 因为负数没有平方根，所以 $\sqrt{b^2-4ac}$ 没有意义，于是原方程无实数根.

因为在实数范围内，负数没有平方根，所以方程有实数根的条件是 $b^2-4ac\geqslant0$. 因此，用公式法解一元二次方程时，一般应先计算 b^2-4ac 的值. 如果 $b^2-4ac\geqslant0$，那么代入公式可求得方程的实数根；如果 $b^2-4ac<0$，那么方程没有实数根. 由此可以得到用公式法解一元二次方程的一般步骤：

(1)将方程整理成一般形式 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，找出 a、b、c 的值；

(2)计算 b^2-4ac 的值；

(3) $b^2-4ac\geqslant0$ 时代入公式求解，$b^2-4ac<0$ 时方程没有实数根.

5. 用因式分解法解一元二次方程的实质是什么？

我们知道，如果 $ab=0$，那么 a 和 b 中至少有一个为零. 反之，如果 a 和 b 中至少有一个为零，那么一定有 $a\cdot b=0$. 即

$$a\cdot b=0\Longleftrightarrow a=0\text{ 或 }b=0$$

因此，解方程 $(x+2)(x-2)=0$ 等价于解两个一元一次方程 $x+2=0$ 和 $x-2=0$.

这就是用因式分解法解一元二次方程的根据.

因为一元二次方程一般形式的左边 ax^2+bx+c 是一个二次三项式，右边是零，如果左边的

二次三项式能分解成两个一次二项式的乘积,那么只要令左边两个因式分别为零,就可把解一元二次方程的问题转化为解两个一元一次方程的问题,从而得到一元二次方程的两个根.

用因式分解法解一元二次方程的一般步骤是:

(1)把方程整理成一元二次方程的一般形式 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$;

(2)把方程左边的二次三项式分解为两个一次因式的乘积;

(3)分别让两个一次因式为零,得到两个一元一次方程;

(4)解这两个一元一次方程,得到原一元二次方程的解.

例1 解方程 $x^2-5x+6=0$.

规范解法 原方程可变形为

$$(x-2)(x-3)=0.$$

$\therefore$ $x-2=0$ 或 $x-3=0$.

$\therefore$ $x_1=2$, $x_2=3$.

例2 解方程 $6x^2-13x+6=0$.

规范解法 原方程可变形为

$$(2x-3)(3x-2)=0.$$

$\therefore$ $2x-3=0$ 或 $3x-2=0$.

$\therefore$ $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=\frac{2}{3}$.

点评 用因式分解法解一元二次方程所适用的范围是,方程左边的二次三项式易分解成两个一次因式积的情况.这时,使每一个一次因式等于零,分别解两个一元一次方程,得到的两个解就是原一元二次方程的解.这就是用因式分解法解一元二次方程的实质.

6. 一元二次方程的四种解法的实质是什么?如何根据方程特点选择恰当的解法?

如上所述,一元二次方程的解法一般有四种:直接开平方法、配方法、公式法和因式分解法.

直接开平方法是适合于特殊形式的一元二次方程 $ax^2+c=0$(a、c 异号)、$(x-a)^2=b(b\geqslant0)$ 和 $a(x+m)^2=n$(a、n 同号)的解法.

配方法是将一般形式的一元二次方程,经配方化为 $a(x+m)^2=n$ 的形式,如果 a、n 同号,再用直接开平方法求解.

公式法是将一般形式的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 用配方法化为 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 的形式,而后用直接开平方法求得解为 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,将这个解用公式的形式给以固定,就是公式法.用这种方法解方程时,在 $b^2-4ac\geqslant0$ 时,只须将方程中的系数 a、b、c 直接代入公式就可以得到方程的根.用公式法解一元二次方程最具有普遍性,任何一个有实数根的一元二次方程,都可以用公式法来解,但公式法的计算过程较繁.

因式分解法一般适用于左边的二次三项式能在有理数范围内分解为两个一次因式积的情况,也就是方程有有理数根的情况(二次三项式可否在有理数范围内分解因式,可用 b^2-4ac 来判断.若 b^2-4ac 的值是一个有理数的完全平方数时,这个二次三项式就能够在有理数范围内分解因式).

那么,解一元二次方程的这四种方法之间有什么联系呢?解一元二次方程时选用哪种方法最合适呢?

对于一个一元二次方程,选用什么方法来解,这要因题而异.一般来说,能用因式分解法的,就不要用其他方法.

有公式法以后，配方法也有它的作用.如解方程 $x^2-2x-2=0$，可以用公式法来解，但稍显麻烦；若采用配方法，则比较简单．先把方程化为 $x^2-2x+1=3$，即 $(x-1)^2=3$，故 $x-1=\pm\sqrt{3}$．$\therefore x_1=1+\sqrt{3}$，$x_2=1-\sqrt{3}$．可见，对于这个方程，用配方法解就比用公式法简单．一般来说，凡二次项系数为 1，一次项系数是偶数的一元二次方程，用配方法解比较简单.

对于不完全的一元二次方程，可根据方程的形式来确定解法.

(1) $ax^2=0(a\neq0,b=c=0)$：用直接开平方法，得 $x_1=x_2=0$.

(2) $ax^2+bx=0(a\neq0,b\neq0,c=0)$：用因式分解法把方程化为 $x(ax+b)=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=-\frac{b}{a}$.

(3) $ax^2+c=0(a\neq0,b=0,c\neq0)$：当 a、c 异号时，方程化为 $x^2=-\frac{c}{a}\left(-\frac{c}{a}>0\right)$，用直接开平方法得 $x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}$，$x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$；当 a、c 同号时，$-\frac{c}{a}<0$，方程没有实数根.

以上各种形式的不完全一元二次方程都可用公式法求解.

7. 你能根据一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 中的系数 a、b、c 的值判断方程根的情况吗?

我们知道，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 用配方法可变形为 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

因为 $a\neq0$，所以 $4a^2>0$．当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，可以得到一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的求根公式：$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

那么，为什么要求 $b^2-4ac\geqslant0$ 呢？这是因为如果 $b^2-4ac\geqslant0$，那么 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}\geqslant0$，这时 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 才有意义；如果 $b^2-4ac<0$，那么 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}<0$，这时 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 在实数范围内就没有意义了.

由此可见，b^2-4ac 的值的变化直接影响了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的变化．换句话说，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的情况可以由 b^2-4ac 来判定．我们把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判别式，通常用符号“Δ”来表示.

对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，当 $b^2-4ac>0$ 时，$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，即方程有两个不相等的实数根；当 $b^2-4ac=0$ 时，$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$，即方程有两个相等的实数根(注意，这时不能说“方程只有一个实根”)；当 $b^2-4ac<0$ 时，$\sqrt{b^2-4ac}$ 在实数范围内没有意义，即方程没有实数根.

综上所述，可以得到：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$

$b^2-4ac\geqslant0\Longleftrightarrow$方程有实数根　　　　$b^2-4ac<0\Longleftrightarrow$方程没有实数根

注　符号“$\Longleftrightarrow$”读作“等价于”，它表示：若 $b^2-4ac\geqslant0$，则方程有实数根；反过来，若方程有实数根，则 $b^2-4ac\geqslant0$.

下面举例说明判别式在解题中的应用.

(1)不解方程,判断方程的根的情况.

例 1 不解方程,判断下列方程根的情况.

①$2x^2-3x-5=0$; ②$16x^2-24x+9=0$;

③$3x^2-2x+5=0$.

规范解法

①∵ $\Delta=(-3)^2-4\times2\times(-5)=49>0$,

∴ 原方程有两个不相等的实数根.

②∵ $\Delta=(-24)^2-4\times9\times16=0$,

∴ 原方程有两个相等的实数根.

③∵ $\Delta=(-2)^2-4\times3\times5=-56<0$, ∴ 原方程没有实数根.

思路启迪 可根据系数 a、b、c 的值,先求出 b^2-4ac 的值,再根据 b^2-4ac 的值的情况,判断方程根的情况.

点评 这三个题具有代表性,分别代表了由判别式值的三种情况判定方程的根的情况.应当说明的是,教材 27 页的黑体字可看作是定理,而且它的逆定理也成立.

注 课本 25 页黑体字定理的逆定理是"一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$,若它有两个不相等的实数根,则 $b^2-4ac>0$;若它有两个相等的实数根,则 $b^2-4ac=0$;若它没有实数根,则 $b^2-4ac<0$."

(2)证明方程的根的性质.

例 2 k 取何值时,方程 $k^2x^2-(6k-1)x+9=0$ 有两个不相等的实数根?

规范解法 由题意,$k^2\neq0$, ∴ $k\neq0$.

∵ $\Delta=[-(6k-1)]^2-4\times9\times k^2$

$=-12k+1$,

令 $-12k+1>0$,解得 $k<\frac{1}{12}$.

∴ 当 $k<\frac{1}{12}$ 且 $k\neq0$ 时,原方程有两个不相等的实数根.

思路启迪 依题意可知,$k^2\neq0$.故这个方程有两个不相等实数根的条件是 $\Delta>0$ 且 $k\neq0$.

点评 例 2 中,要特别注意二次项的系数 $k\neq0$.

例 3 求证:对于任意实数 k,方程 $x^2-2kx+4k-5=0$ 一定有两个不相等的实数根.

规范证明

∵ $\Delta=(-2k)^2-4(4k-5)$

$=4k^2-16k+20=4(k-2)^2+4$,

显然,不论 k 取任何实数,一定有 $4(k-2)^2+4>0$,即 $\Delta>0$.

∴ 对于任意实数 k,原方程一定有两个不相等的实数根.

思路启迪 本题实际上是要证明:无论 k 取任何实数时,方程判别式的值一定大于零.

点评 例 3 实际上是定理的逆应用.

例 4 已知方程 $x^2+2x=k-1$ 没有实数根,求证方程 $x^2+kx=1-2k$ 一定有两个不相等的实数根.

规范证明

∵ 方程 $x^2+2x=k-1$ 没有实数根,

思路启迪 要证明方程 $x^2+kx=1-2k$ 有两个不相等的实数根,只要证明它的判别式大于零即可. 此时需要应用第一个方程 $x^2+2x=k-1$ 没有实数根时 k 的取值条

$\therefore\quad \Delta_1=2^2+4(k-1)$

$=4+4k-4=4k<0.$

$\therefore\quad k<0.$

设方程 $x^2+kx=1-2k$ 的判别式为

$\Delta_2=k^2-4(2k-1)=k^2-8k+4.$

由 $\Delta_1<0$ 得 $k<0$.

而当 $k<0$ 时，$k^2>0$，$-8k>0$，

$\therefore\quad k^2-8k+4>0$ 即 $\Delta_2>0$.

$\therefore$ 方程 $x^2+kx=1-2k$ 一定有两个不相等的实数根.

点评 **本例中，先由第一个方程没有实数根，求出 k 的取值范围，再利用这个条件来证明第二个方程的判别式的值大于零.**

总之，一元二次方程根的判别式在判断根的情况和研究与根有关的问题中作用很大. 是研究一元二次方程的根的存在、根的性质和根的分布的重要工具.

8. 一元二次方程的根与系数之间有怎样的关系?

我们容易解得方程 $x^2-5x+6=0$ 的二根是 $x_1=2,x_2=3$.

观察方程 $x^2-5x+6=0$ 的根 $x_1=2,x_2=3$ 和它的系数间的关系，不难看出 $-5=-(2+3)$，$6=2\times3$，即 $x_1+x_2=-(-5)$，$x_1\cdot x_2=6$.

上面的例子是偶然的巧合，还是一般规律呢? 为了揭示一元二次方程的根与系数之间的关系，我们再看一例:

解方程 $2x^2+x-3=0$ 时，我们用公式法，由于 $b^2-4ac=1^2-4\times2\times(-3)=25$，所以 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{25}}{2\times2}=\dfrac{-1\pm5}{4}$. 从而 $x_1=1,x_2=-\dfrac{3}{2}$.

再观察方程 $2x^2+x-3=0$ 的两根 $x_1=1,x_2=-\dfrac{3}{2}$ 和它的系数间的关系，仍能发现 $x_1+x_2=1-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2}$，$x_1x_2=-\dfrac{3}{2}$.

为了揭示一般规律，我们研究一般形式的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$.

我们已经知道，当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的二根为:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

显然有 $$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a};$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{c}{a}.$$

可见，一元二次方程的根与系数之间确实存在着一定的关系. 现在我们把这个关系归纳如下:

如果 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个根是 x_1,x_2，那么 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$.

特别地，如果方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根是 x_1,x_2，那么 $x_1+x_2=-p$，$x_1\cdot x_2=q$.

我们把一元二次方程的根与系数间的这种关系称为根与系数的关系定理. 需要说明的是，这个定理的逆定理也成立.

注 根与系数关系定理的逆定理是："以两个数 x_1、x_2 为根的一元二次方程(二次项系数为 1)是 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$.

9. 一元二次方程的根与系数的关系定理又叫韦达定理吗?

上面我们讨论了一元二次方程的根与系数的关系.经过证明,得到了一元二次方程的根与系数的关系定理.有不少教师在教学时,把这个定理称之为韦达定理.那么,一元二次方程的根与系数的关系定理又叫韦达定理吗?

其实,这个定理并不是韦达发现的.数学家卡达诺(Cardano)在 1545 年发表一元三次方程的根与系数的关系(一元三次方程的根与系数的关系是:若一元三次方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的三个根是 x_1、x_2 和 x_3,则 $x_1+x_2+x_3=-p$,$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=q$,$x_1x_2x_3=-r$)时,韦达(Viete,1540~1603,法国数学家)才 5 岁,显然一元二次方程的根与系数的关系的发现不会在一元三次方程根与系数的关系发表之后.

实际上,韦达发现的是一元 n 次方程根与系数的关系:若一元 n 次方程 $x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_n=0$ 的 n 个正根是 $x_1,x_2,\cdots x_n$,则 $x_1+x_2+\cdots+x_n=-p_1$,$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=p_2$,……$x_1x_2\cdots\cdots x_n=(-1)^np_n$.那是在 1559 年提出的,后来,荷兰数学家吉拉德(Girard,1590~1632)对其中的那句"n 次方程……的 n 个正根是……"进行了修改,将"正"字去掉,最后使定理完整.后来由于长期引用的习惯,只要一提到一元二次方程根与系数的关系,就说是韦达定理.

10. 举例说明怎样灵活应用一元二次方程根与系数的关系解题?

一元二次方程根与系数的关系不仅是初中数学中极为重要的内容,而且也是中考和竞赛的命题热点.它变幻无常,要求灵活,应用非常广泛.现举例说明.

(1)不解方程,判定已给一元二次方程的根的情况.

任何一个一元二次方程,我们都可以根据它的判别式和根与系数的关系来讨论它的根的情况.

比如一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$,

当 $\Delta>0$ 时,方程有两个不等实根.

若 $\frac{c}{a}>0$,则两根同号:

当 $-\frac{b}{a}>0$,$\frac{c}{a}>0$ 时,两根皆正;

当 $-\frac{b}{a}<0$,$\frac{c}{a}>0$ 时,两根皆负.

若 $\frac{c}{a}<0$,则两根异号:

当 $-\frac{b}{a}>0$,$\frac{c}{a}<0$ 时,有一正一负两个根,且正根的绝对值大;

当 $-\frac{b}{a}<0$,$\frac{c}{a}<0$ 时,有一正一负两个根,且负根的绝对值大;

当 $-\frac{b}{a}=0$,$\frac{c}{a}<0$ 时,有两个互为相反数的根.

若 $\frac{c}{a}=0$,则有一根为零:

当 $-\frac{b}{a}>0$,$\frac{c}{a}=0$ 时,有一根为正,一根为零;

当 $-\frac{b}{a}<0$,$\frac{c}{a}=0$ 时,有一根为负,一根为零.