▲高等学校教学参考书▼

平面解析几何补充教程

吴光磊　田　畴编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

平面解析几何补充教程

吴光磊　田　畴编

人民教育出版社

1.180
0811
37.34

本书是按照1965年高等学校理科数学、力学、天文学编审委员会扩大会议拟订的"高等学校数学专业解析几何简明教程参考提纲(草案)"编写的.

本书主要内容有：平面直角坐标系，极坐标，二次曲线的一般讨论.

本书可供综合大学和师范学院数学专业用作教学参考.

简装本说明

目前850×1168毫米规格纸张较少，本书暂以787×1092毫米规格纸张印刷，定价相应减少20%. 请鉴谅.

平面解析几何补充教程

吴光磊　田　畴编

人民教育出版社(北京沙滩后街)

上海中华印刷厂印装

新华书店上海发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13012·059　开本 787×1092　1/32　印张 2

字数 46,000　印数 64,201—79,200　定价(5)￥0.18

1966年6月第1版　1980年5月上海第4次印刷

目　录

第一章　平面直角坐标系·参数方程

在中学已经学过了平面解析几何．在本书开头这一章里，我们把学过的东西简单地复习一下．通过复习进一步明确并熟悉解析几何的基本方法，这就是：以数表示点，以方程表示图形．在平面上，建立了坐标系以后，就可以用一对实数表示点，用一个方程表示一条曲线．从曲线方程的讨论，就可以作出曲线的图形，得到曲线的几何性质．这样，就能够用代数方法解决几何问题．

§1. 平面直角坐标系

在讲平面直角坐标系之前，先来看一下通常是怎样用数来确定直线上点的位置的．在直线上取定了一个方向、一点 O 和长度单位以后，直线上的任意一点 P 的位置便可以用一个数 x 来刻划：x 的绝对值表示 O 到 P 按取定的长度单位量得的距离，即 $|x|=$ $=|OP|$；x 是正的或负的表示从 O 到 P 的方向与取定的方向相同或相反．x 就是从 O 位移到 P 时按取定的方向移动的距离，而数 0 就对应于点 O．按照这样的方法，就给出了直线上的点与全体实数之间的一个一一对应关系．点 O、长度单位和取定的方向就构成**直线上的一个坐标系**．x 称为在给定坐标系中点 P 的坐标(图 1.1)．

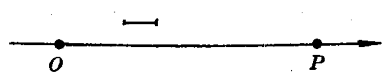

图 1.1

为了刻划平面上的点的位置，先在平面上取两条互相垂直的并取定了方向的直线，一条叫 x **轴**(或**横轴**)，一条叫 y **轴**(或**纵轴**)，它们的交点 O 称为**原点**，再取定长度单位．于是，平面上任意一点 M 的位置便可以这样来刻划：由 M 作 x 轴和 y 轴的垂线，得

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

到垂足P和Q. 设x是P在x轴上的坐标，y是Q在y轴上的坐标. 不难看出，M的位置便可以用数对(x, y)表示(图 1.2). 显然，x和y就是从O位移到M时沿着x轴和y轴的方向所移动的距离. 如此取定的两根互相垂直的且有确定的方向的直线和长度单位称为**平面上的一个直角坐标系**，记为Oxy；数对(x, y)称为M在给定坐标系中的**坐标**，x为**横坐标**，y为**纵坐标**. 注意，在画平面直角坐标系时，习惯上常不标出长度单位，但是事实上总是假定取定了长度单位的.

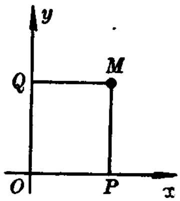

图 1.2

因此，在平面上取定了直角坐标系以后，平面上的点便与全体有顺序的实数对之间建立了一个一一对应关系. 也就是说，在给定的坐标系中，平面上任意一点唯一地决定一对有顺序的实数；反之，任意一对有顺序的实数也唯一地决定平面上的一个点.

平面上的直角坐标系按x轴和y轴的方向的配置情况分成两大类：将x轴按逆时针①方向绕O转$\frac{\pi}{2}$而与y轴重合时，如果它们的方向一致，就称为**右手系**(图 1.3)；否则，就称为**左手系**(图 1.4).

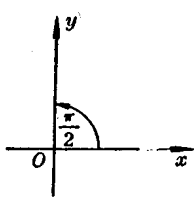

图 1.3

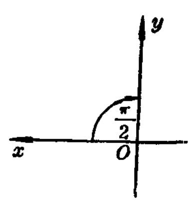

图 1.4

① 说"逆时针方向"时，已经意味着取定了平面的一面为正面，否则是没有意义的.

除非特别声明，以后说到的坐标系均指**右手直角坐标系**.

坐标轴将平面分成四个部分，称为四个**象限**. 按其中点的坐标的符号为(+, +)、(−, +)、(−, −)和(+, −)分别称为第一、第二、第三和第四象限(图 1.5).

在建立了点的坐标以后，便可以进一步用坐标方法来讨论一些几何问题，如两点之间的距离，线段上定比分点的坐标和三角形的面积等. 下面仅以用坐标计算两点之间的距离为例.

已知 M_1 和 M_2 的坐标分别为(x_1, y_1)和(x_2, y_2). 求 M_1, M_2 之间的距离.

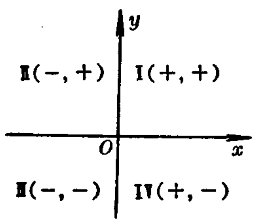

图 1.5

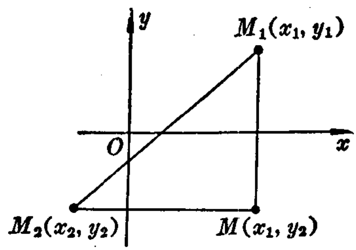

图 1.6

先考虑一般的情形，即线段 M_1M_2 与坐标轴不平行. 过 M_1 和 M_2 分别作平行于 y 轴和 x 轴的两条直线，它们相交于 $M(x_1, y_2)$. 线段 M_1M_2 是三角形 MM_1M_2 的斜边(图 1.6). 由勾股定理,

$$|M_1M_2|^2=|MM_1|^2+|MM_2|^2,$$

而

$$|MM_1|=|y_1-y_2|, \quad |MM_2|=|x_1-x_2|,$$

所以

$$\begin{aligned}|M_1M_2|^2&=|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2\\&=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2,\end{aligned}$$

即

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

这个公式对于 M_1M_2 与 x 轴或 y 轴平行的情形也是对的. 事实上, 如果 M_1M_2 与 x 轴平行, 即 $y_1=y_2$, 则

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=|x_1-x_2|=|M_1M_2|.$$

对于平行于 y 轴的情况也是一样.

于是, 任意两点 $M_1(x_1, y_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2)$ 之间的距离公式为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

特别, 点 $M_1(x_1, y_1)$ 与原点 $O(0, 0)$ 的距离 r 就是

$$r=\sqrt{(x_1-0)^2+(y_1-0)^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}.$$

例 $M_1(-2, 3)$ 和 $M_2(6, -12)$ 之间的距离为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(-2-6)^2+[3-(-12)]^2}$$
$$=\sqrt{64+225}=17.$$

最后再强调一下, *点的坐标总是对于确定的坐标系而言的. 一般地, 同一个点在不同的坐标系中有不同的坐标; 反之, 同一数对 (x, y) 在不同的坐标系中也对应不同的点.*

§2. 方程与图形

在用坐标系建立了点与数对的对应关系的基础上, 进一步便可以建立方程与图形(通常是曲线)的联系.

曲线可以看成是由具有某些特征性质的点构成的. 例如, 半径为 R 的圆就可以看成是所有到一定点距离为 R 的点构成的. 在给定的坐标系中, 由于点被它的坐标完全确定, 因而曲线上的点的共同性质就反映为曲线上的点的坐标 (x, y) 所应当满足的限制条件. 这个限制条件通常可以表示为一个等式

$$F(x, y)=0,$$

称为**曲线的方程**. 上面的等式有时也可以写成 $y=f(x)$ 的形式.

所以, 求一条曲线的方程, 就是在给定的坐标系中将这一条曲线上点的特征性质用代数式子写出来.

例 1 求圆心在原点、半径为 $R(>0)$ 的圆的方程.

根据圆的特征，任意一点 $M(x, y)$ 在圆周上必须且只须它到圆心(即原点)的距离等于 R. 所以

$$\sqrt{x^2+y^2}=R,$$

即

$$x^2+y^2=R^2.$$

这就是所求圆的方程.

同样的方法可以证明圆心在 (x_0, y_0)、半径为 R 的圆的方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

同点的坐标一样，曲线的方程也是对确定的坐标系而言的，同一条曲线在不同的坐标系中的方程一般是不一样的. 在例 1 中，同样一个半径为 R 的圆，按照坐标原点取在圆心或不在圆心，就得到了不同的方程.

上面的例题是在给定的坐标系中按照给出的条件去确定曲线的方程. 在用坐标方法研究问题时，有时需要选取坐标系. 坐标系选取得是否适当对解决问题的难易很有关系. 例如，在讨论椭圆、双曲线和抛物线时，总是选取标准坐标系，这样得出的标准方程形式简单. 如果不采取标准坐标系，方程就要复杂得多.

建立曲线的方程，这只是问题的一个方面；另一方面，还需要在给定的坐标系中画出方程的图形.

方程 $F(x, y)=0$ 的图形就是指适合方程的全体数对 (x, y) 所对应的点的轨迹，通常是一条曲线. 最常用的也是大家最熟悉的作图方法就是**描点作图法**，但是也可以把方程化成已知形状，从而看出图形是什么.

例 2 讨论 $y=ax^2+bx+c\,(a>0)$ 的图形.

将方程的右端配成完全平方，

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a},$$

即

$$y-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

这是一条抛物线，顶点是$\left(-\frac{b}{2a},\ c-\frac{b^2}{4a}\right)$，对称轴的方程是$x=-\frac{b}{2a}$，且开口指向$y$轴的正向，焦参数$p=\frac{1}{2a}$.

一般二次方程的图形的讨论比较复杂，将在第三章中专门进行.

方程的图形也可能是一个点或几个点，甚至没有轨迹．例如$x^2+y^2=0$的图形是一个点(坐标原点)，$x^2+y^2=-1$没有轨迹.

最后再综述一下曲线与方程的关系：*在给定的平面直角坐标系中，$F(x,\ y)=0$是曲线C的方程，如果曲线上任意一点的坐标(x, y)都满足方程，并且所有适合方程的(x, y)所对应的点都在曲线C上.*

根据轨迹条件在确定的坐标系中建立曲线的方程，以及通过对方程的讨论研究方程的图形的性质，是在解析几何中最常见的问题.

§3. 参数方程

一条曲线可以看成是由具有某些特征性质的点构成的．在直角坐标系中，这些特征性质就反映为曲线上的点的坐标(x, y)所应当满足的限制条件．这样便自然地得到了曲线的方程$F(x,\ y)=0$．但是，曲线又常常表现为一点运动的轨迹，运动规律往往不是直接反映为动点的直角坐标x和y之间的关系，而是直接表现为动点的位置随时间改变的规律，也就是质点的位置的坐标x和y对时

间 t 的依赖关系，如

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad a\leqslant t\leqslant b, \tag{1}$$

其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是时间 t 的函数，$a\leqslant t\leqslant b$. 对每一个时刻 t，由(1)得到一对数 x 和 y，点 $M(x, y)$ 就是动点在时刻 t 的位置，这样便得到运动轨迹上的一个点；反之，运动轨迹上的任意一个点 $M_0(x_0, y_0)$ 都是动点在某一个时刻的位置，因而一定能由 t 的某一个值 t_0 通过(1)得到.

在给定的平面直角坐标系 Oxy 中，把坐标 x 和 y 表成一个变量 t 的函数表达式

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad a\leqslant t\leqslant b, \tag{1}$$

称为一条曲线的**参数方程**，如果对于 t 的每一个值($a\leqslant t\leqslant b$)，由(1)所确定的点 $M(x, y)$ 都在这条曲线上，而且这条曲线上的任意一点 $M_0(x_0, y_0)$ 都可以由 t 的某一个值 t_0 通过(1)得到. t 称为**参数**.

换句话说，(1)叫做一条曲线的参数方程，如果当 t 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 内变动时，点 $M(\varphi(t), \psi(t))$ 就描出这条曲线来.

虽然说从曲线的参数方程消去参数便能得到普通方程，但是具体去消参数有时是有困难的. 有些曲线的参数方程比较简单，而普通方程却比较复杂，因此有时就需要直接从参数方程来研究曲线的性质. 下面用参数方程来讨论一种常见的有广泛应用的叫做旋轮线的曲线.

一圆周(轮子)在一直线(地面)上无滑动地滚动时，固定在这圆周上的一点 M 所画出的曲线称为**旋轮线**.

取定直角坐标系，设半径为 a 的圆周在 x 轴上滚动，开始时 M 恰好在原点(图 1.7). 选取这个圆周滚转的角度 t (以弧度为单

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

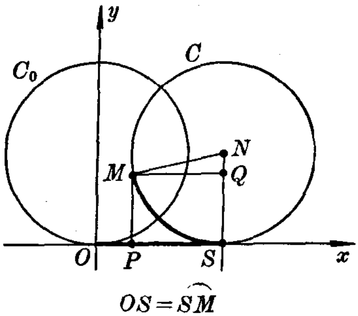

图 1.7

位）作参数. 现在看圆周滚转了角度 t 时，点M的坐标与参数 t 的关系.

设这时圆与 x 轴的切点为 S，圆心为 N，M 在 x 轴上的投影为 P，在 NS 上的投影为 Q，$\angle MNS=t$. 由于圆是在直线上无滑动地滚动，所以 $OS=\overset{\frown}{SM}=$ $=at$. 于是

$$x=OP=OS-PS=\overset{\frown}{SM}-MQ=at-a\sin t=a(t-\sin t),$$

$$y=PM=SQ=SN-QN=a-a\cos t=a(1-\cos t).$$

所以旋轮线的参数方程是

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases} \quad -\infty<t<+\infty. \tag{2}$$

从参数方程(2)消去 t，便得到普通方程

$$x=a\arccos\frac{a-y}{a}-\sqrt{2ay-y^2}.$$

这个方程要比参数方程(2)复杂得多. 下面根据参数方程讨论曲线的性质.

当轮子每转动一周时，点 M 在一周前后的运动情况总是相同的. 可以大致看出，旋轮线是由一系列完全相同的拱形组成的(图 1.8).

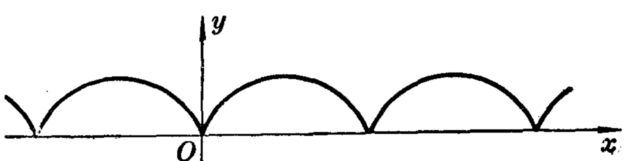

图 1.8

从方程来看，这个事实反映为参数方程的周期性. 由参数方程(2)，相差 2π 的任意两个参数值 t 和 $t+2\pi$ 所决定的点的纵坐标相等，横坐标相差 $2\pi a$，所以，把相应于 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 的一拱向右平移 $2\pi a$ 就得到相应于 $2\pi\leqslant t\leqslant 4\pi$ 的那一拱. 其余部分的图形都可以这样得到.

每一拱的左右是对称的：例如在相应于 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 的这一拱上，对应于参数 t 和 $2\pi-t$ 的两个点的纵坐标相等，横坐标相加等于 $2\pi a$，也就是横坐标的平均值是 πa. 所以这两点对于直线 $x=\pi a$ 是对称的，也就是这一拱的左右是对称的.

因此，要画出旋轮线的图形，只要画出相应于 $0\leqslant t\leqslant \pi$ 的一部分就行了. 图 1.9 中用描点作图法画出了旋轮线的一拱，并在一些点的旁边记上了对应的参数值 t. 作图时，取 $t=0,\ 0.5,\ 1.0,\ \cdots$，并按(2)计算 x 和 y，描出对应的点，再用曲线板联成曲线. 图上取 10 个小格代表 a.

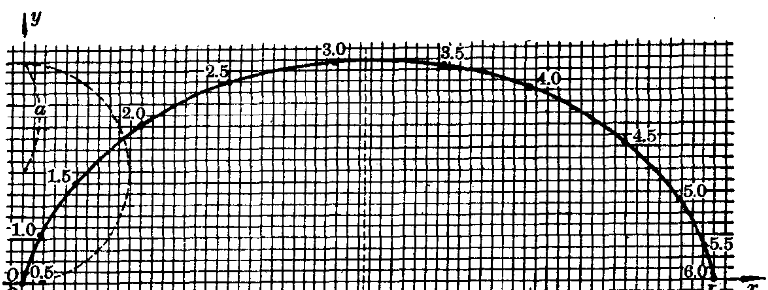

图 1.9

旋轮线有不少重要性质. 例如，质点在重力作用下沿曲线从固定点 A 滑到固定点 B，问曲线取什么形状所需的时间最短(此即所谓"最速降线问题")？答案是：曲线是一条(翻转的)旋轮线(见图 1.10). 又如，普通单摆的摆动周期与摆动幅度不是绝对没有关系的. 为了克服这个缺点，可以在摆动的平面内做两个旋轮线形

状的挡板(如图 1.11 中的 OU 和 OV). 这样, 摆的运动轨迹也将是一个旋轮线, 而摆动周期将与摆幅完全无关. 在 17 世纪, 旋轮线即以此性质出名, 所以旋轮线又称为**摆线**.

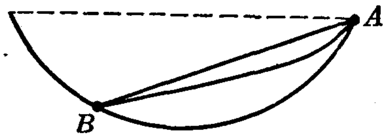

图 1.10

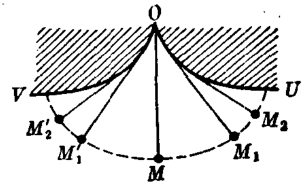

图 1.11

§4. 坐标变换

点的坐标和曲线的方程是依赖于坐标系的. 用坐标方法研究问题时, 首先要选择适当的坐标系. 但是, 坐标系选择要受到实际条件和人们对实际条件的认识程度的限制. 特别是在一些较复杂的问题中, 出现的曲线不止一条, 有时甚至要考虑运动的坐标系. 因此就必须考虑曲线的方程对于坐标系的依赖关系, 也就是同一条曲线在不同的坐标系中的方程之间的关系. 由于曲线是由点组成的, 所以, 根本问题是, 同一个点在两个不同的坐标系中的坐标之间的关系. 详细说来, 已知一点 M 在坐标系 Oxy 中的坐标是 (x, y), 而在坐标系 $O'x'y'$ 中的坐标为 (x', y'), 问题是决定 (x', y') 和 (x, y) 之间的关系. 为方便起见, Oxy 称为旧坐标系, $O'x'y'$ 称为新坐标系; (x, y) 称为 M 的旧坐标, (x', y') 称为 M 的新坐标.

点的坐标由坐标系完全确定. 因此, 点的新旧坐标之间的关系就由新旧坐标系之间的位置关系完全确定. 坐标系的位置由原点的位置和坐标轴的方向确定. 因此, 新坐标系 $O'x'y'$ 和旧坐标系 Oxy 之间的关系就由 O' 在 Oxy 中的坐标 (x_0, y_0) 和 Ox 轴到 $O'x'$ 轴的角度 θ 确定. 现在的问题是, 如何通过 (x_0, y_0) 和 θ 来确定

(x', y')和(x, y)之间的关系. 为了便于讨论起见, 将坐标系 Oxy 到坐标系 $O'x'y'$ 的过渡分两步进行: 第一步先将 Oxy 的原点移到 O', 坐标轴的方向不变, 得到坐标系 $O'x''y''$. 第二步将坐标系 $O'x''y''$ 绕原点 O' 转动一个角度, 使 $O'x''$ 轴与 $O'x'$ 轴重合, 这样便达到坐标系 $O'x'y'$. 显然, 这个需要转动的角度就是 θ(图 1.12). 保持坐标轴的方向不变, 只改变原点的位置, 这种变动称为**坐标系的平移**, 简称**移轴**. 保持坐标原点不动, 只改变坐标轴的方向, 这样的变动称为**坐标系的转动**, 简称**转轴**. 坐标系的任意变动都可以通过先移轴再转轴或者先转轴再移轴达到. 下面先分别考虑移轴和转轴的坐标变换公式, 由此就可以得到一般的坐标变换公式.

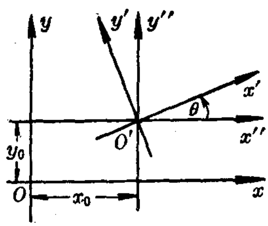

图 1.12

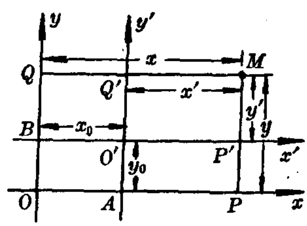

图 1.13

移轴 设 $O'x'y'$ 是由 Oxy 平移得到的, O' 在 Oxy 中的坐标为 (x_0, y_0). 设一点 M 的新旧坐标分别为(x', y')和(x, y)(图 1.13).

由坐标的定义, x 就是从 O 位移到 M 时沿 Ox 轴方向移动的距离, 而 x_0 和 x' 分别为从 O 到 O' 和从 O' 到 M 沿同一方向移动的距离.

于是,

$$x = x' + x_0.$$

同理

$$y = y' + y_0.$$

这样便得到移轴的坐标变换公式:

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0. \end{cases} \tag{1}$$

反解(1)，便得到逆变换公式:

$$\begin{cases} x' = x - x_0, \\ y' = y - y_0. \end{cases} \tag{2}$$

当然，Oxy 也可以看成是由 $O'x'y'$ 平移得到的，O 在 $O'x'y'$ 中的坐标是$(-x_0, -y_0)$. 这样，直接应用变换公式(1)就能得到逆变换公式(2).

转轴 设 $O'x'y'$ 是由 Oxy 绕 O 转动角度 θ 得到的，一点M的新旧坐标分别为(x', y')和(x, y).

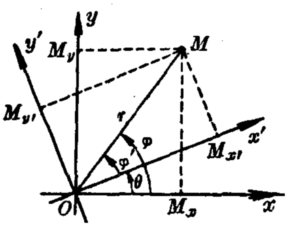

图 1.14

令 $|OM| = |O'M| = r$, φ 为 Ox 到 OM 的角度，φ' 为 Ox' 到 OM 的角度(图 1.14). 显然，

$$\varphi = \varphi' + \theta. \tag{3}$$

容易看出，

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \tag{4}$$

而

$$\begin{cases} x' = r\cos\varphi', \\ y' = r\sin\varphi'. \end{cases} \tag{5}$$

由(3)和(4)，

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi = r\cos(\varphi' + \theta) \\ &= r(\cos\varphi'\cos\theta - \sin\varphi'\sin\theta) \\ &= (r\cos\varphi')\cos\theta - (r\sin\varphi')\sin\theta. \end{aligned}$$

再由(5)，即得

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta.$$

同样，

$$\begin{aligned} y &= r\sin\varphi = r\sin(\varphi'+\theta) \\ &= r(\sin\varphi'\cos\theta+\cos\varphi'\sin\theta) \\ &= (r\sin\varphi')\cos\theta+(r\cos\varphi')\sin\theta \\ &= x'\sin\theta+y'\cos\theta. \end{aligned}$$

于是，得到转轴的坐标变换公式:

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta. \end{cases} \tag{6}$$

把 Oxy 看成是由 $O'x'y'$ 绕 O' 转动角度 $-\theta$ 得到的，应用坐标变换公式(6)，便得到逆变换公式:

$$\begin{cases} x' = x\cos(-\theta) - y\sin(-\theta), \\ y' = x\sin(-\theta) + y\cos(-\theta). \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases} \tag{7}$$

当然，这个逆变换公式也可以由反解(6)得到.

一般坐标变换的公式 设新坐标系 $O'x'y'$ 的原点 O' 在旧坐标系 Oxy 中的坐标为 (x_0, y_0)，Ox 轴到 $O'x'$ 轴的角度为 θ，一点 M 的新旧坐标分别为 (x', y') 和 (x, y).

平移 Oxy 使坐标原点与 O' 重合，得到坐标系 $O'x''y''$，设 M 在 $O'x''y''$ 中的坐标为 (x'', y'')(参看图 1.12).

由§4中移轴的坐标变换公式(1)，

$$\begin{cases} x = x'' + x_0, \\ y = y'' + y_0. \end{cases} \tag{8}$$

再由§4中转轴的坐标变换公式(6)，

$$\begin{cases} x'' = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y'' = x'\sin\theta + y'\cos\theta. \end{cases} \tag{9}$$

将(9)代入(8)，便得到一般的坐标变换公式:

试读结束：需要全本请在线购买：www.ertongbook.com