高等学校试用教材

电路分析基础

下 册

李瀚荪 编

高等学校试用教材
电路分析基础
下 册
李瀚荪 编
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷一厂印装
*
开本 787×1092 1/32 印张 11.5 字数 278,000
1979 年 4 月第 1 版 1979 年 8 月第 1 次印刷
印数 00,001—75,000
书号 15012·0137 定价 0.95 元

前　言

本教材下册部分于 1978 年 11 月经教材审稿会议通过。仍承西安交通大学(主审单位)范丽娟、刘国柱两同志初审,部分兄弟院校代表参加集体审阅。参加审稿的学校有西安交通大学、合肥工业大学、北京邮电学院、北京工业大学、上海科技大学、南京工学院、北方交通大学、华南工学院和北京工业学院等。审稿同志提供了许多宝贵意见和建议,编者谨致以衷心的感谢。本教材初稿的全部习题承上海科技大学吴锡龙同志核算一遍,教材的全部插图承北京工业学院方霞辉同志绘制,特表谢意。

限于编者的水平,且编写时间十分仓促,错误和不妥之处一定不少,希望读者提出宝贵意见,以便今后修改时参考。来函请寄北京工业学院自动控制系电路教研室。

编者

1979 年 4 月

目　　录

第八章 正弦激励下电路的完全响应

本章是第六、七两章的继续，讨论正弦激励下简单线性动态电路完全响应的解法*。正弦激励是指随时间按正弦规律变化的电压或电流，即正弦电压或正弦电流。这类激励是常见的，例如，实验室正弦振荡器提供的电压就是正弦电压；电力系统提供的电压也是正弦电压。

第六章中已经指出：线性微分方程的完全解是由对应齐次方程的解和非齐次方程的特解组成的。前者的形式并不取决于激励的性质，也就是说，不论是在恒定激励时或是在正弦激励时，这一解答的形式并无区别。而特解则是取决于激励的形式的。因此，本章只需着重讨论正弦激励下特解的求法，“相量法”就是解决这一问题的简便方法，是本章所要讲的主要内容。由于相量法是建立在用复数代表正弦电压、正弦电流的基础上的，因此，本章将复习复数及其运算等问题，并加以必要的补充。这些内容在以后各章中也是要用到的，是分析正弦交流电路的基本工具，必须熟练掌握。

另外，有关正弦波形的数学描述，实际上与物理课中对机械振动的描述类似，在本书第七章也曾多次用过，但因属最基本的概念，为便于以后的学习，仍应予以足够的重视。

---

* 本教材只讨论线性时不变电路。时不变电路的含意见§6-6。

§8-1. 周期电压和电流

随时间变化的电压和电流称为变动的(*varying*)电压和电流，如图 8-1 各例所示。如果给出在选定参考方向下，电压或电流对时间的函数 $u(t)$或 $i(t)$，那末，在任一时刻 t，电压或电流的数值便可确定。变动的电压和电流在任一时刻的数值，称为它们的瞬时值(*instantaneous value*)。根据电压或电流瞬时值的正负号，结合参考方向便可确定电压降或电流的真实方向。图 8-1 所示各例，电压 u 的双下标即表明电压降的参考方向。

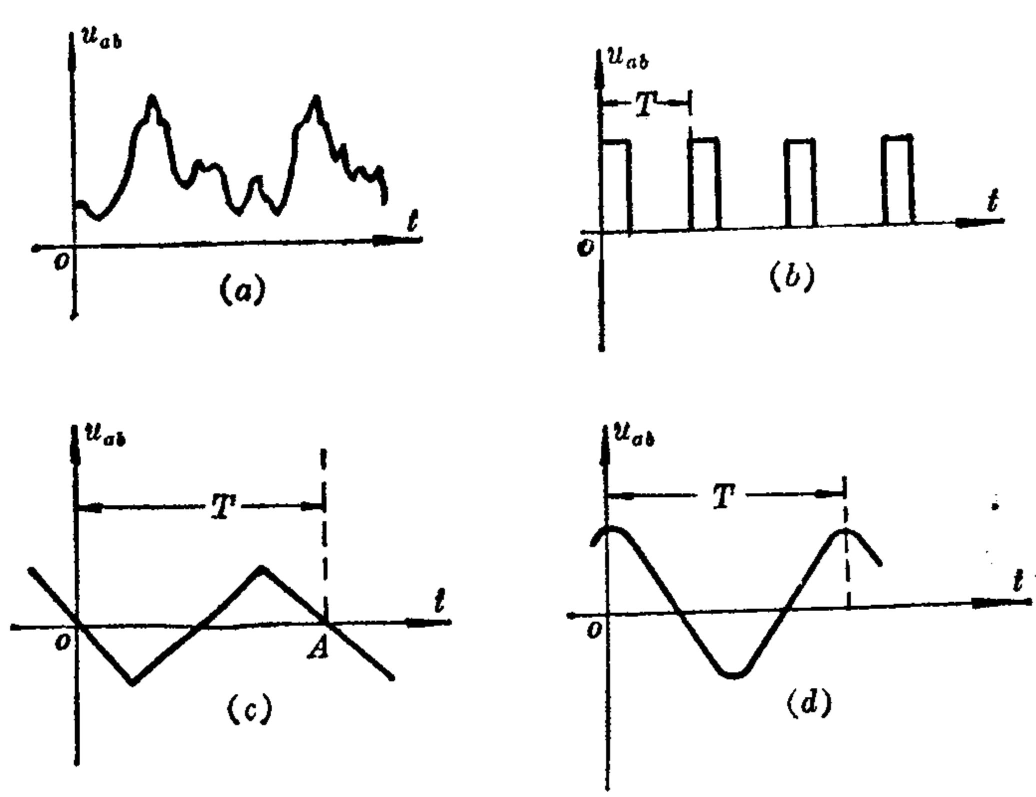

图 8-1 变动的电压

电压或电流对时间的函数关系不仅可用解析式表示，也可用如图 8-1 所示的图象，即波形图表示。事实上，我们常用示波器来研究电压或电流对时间的函数关系，示波器上呈现的就是这些函数的波形。因此，波形(*waveform*)一词常用以泛指电压、电流

等对时间 t 的函数关系，不论这一关系表示为解析的还是图象的。

如果变动的电压和电流的每个值在经过相等的时间后重复出现，那末，这种变动的电压和电流便是周期性的(*periodic*)，称为周期电压和周期电流。以电压为例，周期电压应满足

$$u(t)=u(t+KT) \tag{8-1}$$

其中 K 为任何正整数。这就是说，在时刻 t 和时刻 $t+KT$ 的瞬时值是相等的，对所有的 t 都是如此。图 8-1(*b*)、(*c*)、(*d*) 所示即为周期电压的几个例子。T 称为**周期** (*period*)，它是波形(函数)再次重复出现所需的最短时间间隔，单位为秒(s)。

在 t 到 $t+T$ 间的部分波形称为该波形的一个循环(*cycle*)。例如，图 8-1(*c*) 所示波形 0 与 A 间的部分波形即为该波形的一个循环。

单位时间内的循环(周期)数称为**频率**(*frequency*)。以 f 表示频率，显然

$$f=\frac{1}{T} \tag{8-2}$$

频率的单位为赫兹(代号为赫或Hz)。

如果周期电压、电流的大小和方向都随时间变化，那末，这种周期电压、电流便是交变的，称为交变电压、交变电流。但是，交变一词通常只限于描述在一个周期内平均值为零、亦即正半循环和负半循环面积相等的波形。图 8-1(*c*)和(*d*) 便是具有这种含意的交变电压的例子。交变电流通常简称为交流。

思考题 图 8-1 所示为 u_{ab} 的波形，问 u_{ba} 的波形应如何？

练习题

8-1. 求图 8-2 所示各波形的周期和频率。

(5μs, 200kHz; 0.03s, 33.3Hz; 70ps, 14.3GHz; 0.2s, 5Hz)

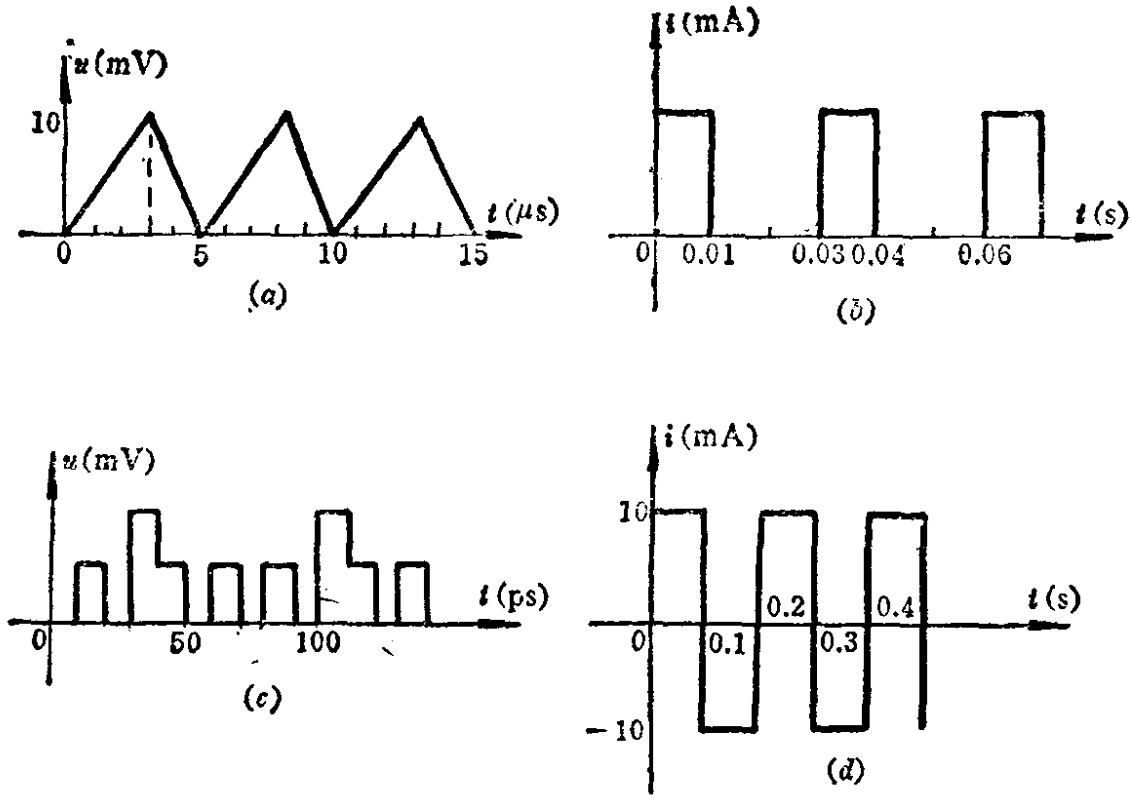

图 8-2 练习题 8-1

§8-2. 正弦电压和电流

随时间按正弦规律变化的电压和电流称为正弦(*sinusoidal*)电压和正弦电流，它们都属正弦波。正弦波是周期波形的基本形式，在电路理论中和实际工作中都占有极其重要的地位。正弦电压如图 8-1(*d*)及图 8-3 所示。所谓正弦规律即简谐规律，既可用时间的 sin 函数表示，也可用时间的 cos 函数表示，本书采用cos函数，仍可称为正弦波。以图 8-3 所示正弦电压来说，其瞬时值可表示为

$$u(t)=U_m\cos\omega t \tag{8-3}$$

其中 U_m 为电压的最大值或振幅(*amplitude*)，是一个常量，ωt 是一个随时间变化的角度，ω 则是一个与频率 f 有关的常量。

ω 与频率 f 是什么关系呢？我们已经知道，电压变化一个循环

所需的时间为T，而cos函数变化一个循环则变化了2π 弧度。这就是说，如从图8-3所示波形的时间坐标0点开始，在完成一个循环的变化后，ωt 的数值应为 2π，而所经历的时间为T。故得$\omega T=2\pi$，即

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f \tag{8-4}$$

这就是ω与频率f的关系。由此可见，ω是一个与频率成正比的常数，它相当于一种角速度，表示了每秒变化的弧度数$\left(\frac{2\pi}{T}\right)$，故称为角频率(*angular frequency*)，单位为弧度/秒(rad/s)。我国电力系统提供的正弦电压，频率为50 Hz，角频率为100π rad/s，即314 rad/s。应该指出，在作理论分析时，常把角频率简称为频率，因此，在作实际计算时，必须注意到两者的实际区别，考虑2π这一乘数。在以后的讨论中，我们也常把ω径称为频率。

在作波形图时，常把横坐标定为ωt而并不一定是时间t，两者的差别仅在于比例常数ω。在图8-3中，我们把两种横坐标都列出，以资比较。以ωt为横坐标的波形图可适用于任何ω值，因为不论ω是多少，一个循环总是2π弧度。

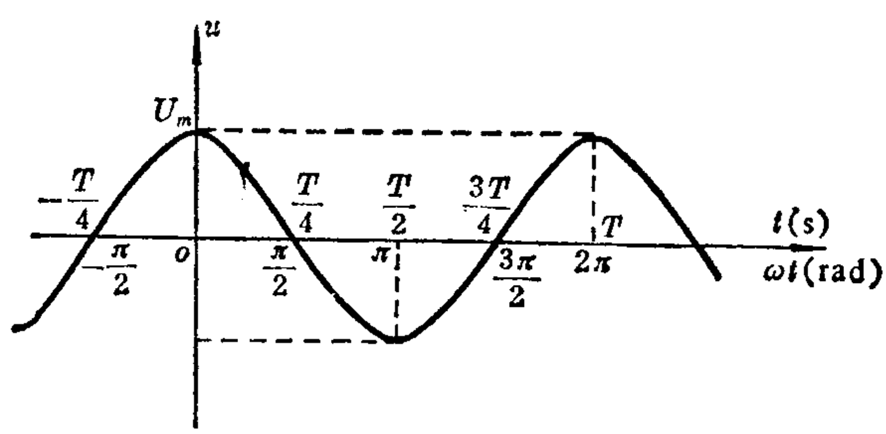

图8-3 正弦电压波形

在一般情况下，时间的起点不一定恰好选在正弦波为正最大值的瞬间。例如，图8-4所示正弦电压，以角度来计量，时间起点选在离正弦波正最大值瞬间之后为ϕ角处。也就是说，当$\omega t=-\phi$

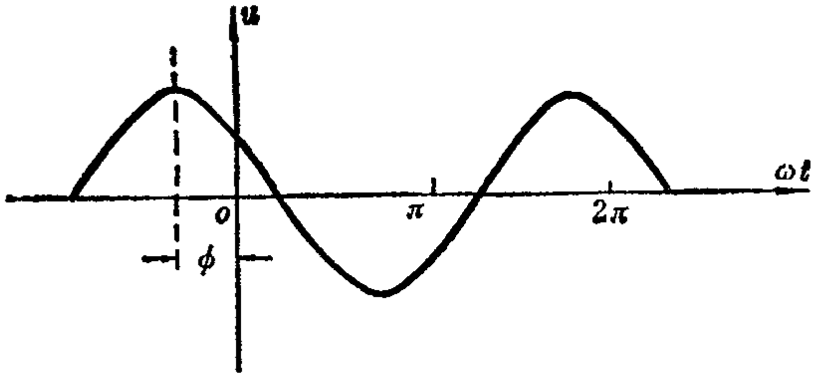

图 8-4　初相角

时，才有 $u=U_m$。因此，该正弦电压应表示为

$$u(t)=U_m\cos(\omega t+\phi) \tag{8-5}$$

ϕ 称为初相角，简称**初相** (*initial phase*)。它反映了正弦波初始值的大小，即

$$u(0)=U_m\cos\phi$$

如果正弦波的正最大值发生在时间起点之前如图 8-4 所示，则(8-5)式中的 ϕ 为正值，如果正弦波的正最大值发生在时间起点之后，则(8-5) 式中的 ϕ 为负值（试自己绘出这种情况的波形图）。必须注意，这里所讲的正最大值是指最靠近时间起点者来说的，这就是说，初相 ϕ 总是小于或充其量等于 π。

初相 ϕ 本应用弧度为单位，但在工程上为方便起见也常用度为单位，必要时再化为弧度。

正弦波一般表示式——(8-5)式中的$(\omega t+\phi)$称为相位角，简称**相位**。不同的相位对应着不同的瞬时值，因此，相位表示了正弦波变化的进程。

显然，根据(8-4)式，正弦波的一般表示式，仍以电压为例，还可写成

$$\begin{aligned}u(t)&=U_m\cos(2\pi ft+\phi)\\&=U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\phi\right)\end{aligned} \tag{8-6}$$

由此可见，一个正弦波由三个参数完全确定，这三个参数是：最大

值、频率（或角频率或周期）以及初相，这三者称为正弦波的三要素。

恒定电流（电压）也可以看成是频率为零（f 或 $\omega=0$，而 $T=\infty$）、初相 ϕ 为零的正弦电流（电压）。

例 8-1 图 8-5 为正弦交流电路中一元件，已知在所设参考方向下，电流可表示为

$$i(t)=100\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{mA}$$

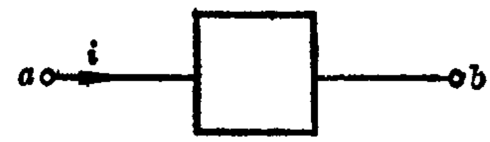

图 8-5 例 8-1

$\omega=2\pi$ rad/s。

试求在(1)$t=0.5$ s 时；(2)$\omega t=2.5\pi$rad 时；(3)$\omega t=90^\circ$时，电流的大小及方向。

解： 已知在选定参考方向下正弦波的函数表示式即可求出任何时刻电流的大小及方向。

(1) 当 $t=0.5$ s 时

$$\begin{aligned}i&=100\cos\left(2\pi\times0.5-\frac{\pi}{4}\right)\\&=100\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-100\cos\frac{\pi}{4}\\&=-100\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-70.7\mathrm{mA}\end{aligned}$$

电流为负值，表示在这一时刻电流的真实方向与参考方向相反，即由 b 流向 a。

(2) 在正弦交流电路问题中，时间常用相应的角度 ωt 表示，计算更为方便。当 $\omega t=2.5\pi$ rad 时

$$\begin{aligned}i&=100\cos\left(2.5\pi-\frac{\pi}{4}\right)=100\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)\\&=100\cos\frac{\pi}{4}\\&=70.7\ \mathrm{mA}\end{aligned}$$

电流为正值，表示在这一时刻电流的真实方向与参考方向相同，即由 a 流向 b。

（3）当 $\omega t=90°$ 时，由于电流表示式中初相已用弧度表示，因此 90° 应先化为弧度，再行代入。由于 90° 即$\frac{\pi}{2}$弧度，故

$$i=100\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=100\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=70.7\ \mathrm{mA}$$

答案与 $\omega t=2.5\pi$ rad 时一致，这是因为 $\omega t=2.5\pi$ 和 $\omega t=0.5\pi$ 相差 2π，即这两个时刻刚好相差一个周期，所以相同的数值重复出现。

例 8-2 电压波形如图 8-6 所示。

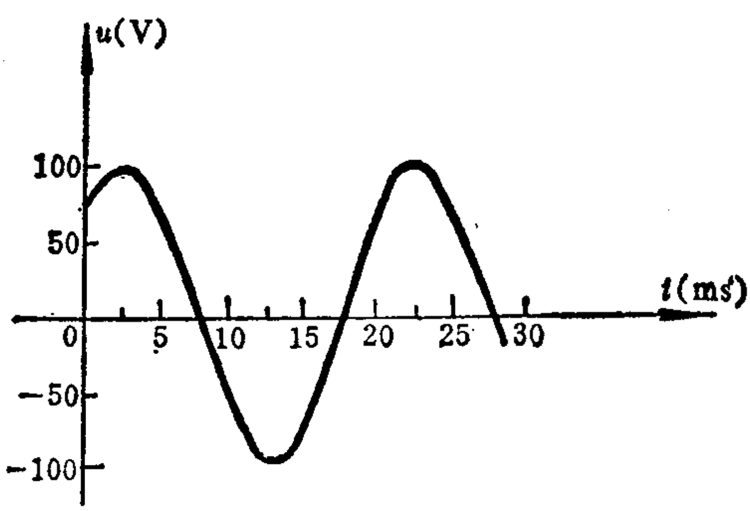

图 8-6 例 8-2

（1）试求 T、f 及 ω；

（2）用 cos 函数，写出 $u(t)$表示式；

（3）用 sin 函数，写出 $u(t)$表示式。

解：（1）从波形图可知，从第一个正最大值到第二个正最大值所需的时间为

$$22.5-2.5=20\ \mathrm{ms}$$

此即为完成一个循环所需的时间，即周期 T。故得

$$T=20\text{ ms}$$

由(8-2)式

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{20\times10^{-3}}=50\text{ Hz}$$

由(8-4)式

$$\omega=2\pi f=2\pi\times50=100\pi=314\text{ rad/s}$$

(2) 由波形图可知，由坐标原点(即时间起点)到第一个正最大值所需时间为2.5 ms，如用ωt为横坐标则所对应的角度应为

$$\omega\times2.5\times10^{-3}=100\pi\times2.5\times10^{-3}=\frac{\pi}{4}\text{rad}$$

此即为用cos函数来表示正弦波时的初相ϕ，但因正最大值发生在原点之后，故得

$$u(t)=100\cos\left(100\pi t-\frac{\pi}{4}\right)\text{V}$$

或

$$u(t)=100\cos(100\pi t-45^\circ)\text{V}$$

其中电压最大值为100V，是由波形图得知的。初学时往往对表示式中初相角的正负号不易判断，这里介绍一种方法：由已知的波形图中可以看出当变量$\omega t=\frac{\pi}{4}$时，电压达到正最大值，而对一个cos函数来说，应在0°时函数达到正最大值。因此，在写电压的表示式时相位角应写为$\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)$，这样才能在把$\omega t$用$\frac{\pi}{4}$代入时，使相位角为0°，电压为正最大值。

(3) 有些书里用sin函数来表示正弦波。如果已知用cos函数来表示的式子，只要运用三角公式 $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$就可得出用sin函数来表示的式子。本例中$x=100\pi t-\frac{\pi}{4}$，故得

$$u(t)=100\cos\left(100\pi t-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=100\sin\left(100\pi t-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=100\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{4}\right)\quad \text{V}$$

在正弦交流电路中经常遇到同频率的正弦波，它们只在最大值及初相上可能有所差别。图 8-7 所示的两个正弦电压，其频率相同而最大值、初相不同，可分别表示为

$$u_1(t)=U_{1m}\cos(\omega t+\phi_1)$$
$$u_2(t)=U_{2m}\cos(\omega t+\phi_2)$$

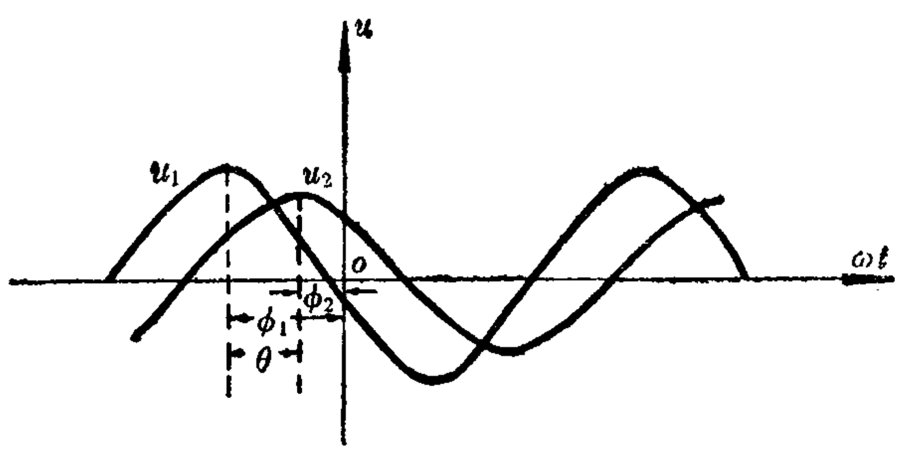

图 8-7　不同相的正弦波

初相不同，表明它们随时间变化的“步调”不可能一致。例如，它们不可能同时到达各自的正最大值。从波形图可以看到，电压u_2比电压 u_1 到达正最大值要晚些。在 ωt 轴上整个 u_2 波形好像从与整个 u_1 波形“步调”一致的位置向后(向右)移动了($\phi_1-\phi_2$)角度。这两个同频率正弦波的初相角之差，称为相位差角，简称相位差(*phase difference*)。用 θ 表示相位差，则

$$\theta=\phi_1-\phi_2 \tag{8-7}$$

事实上，两个同频率正弦波在任何瞬间的相位角之差总是等于初相角之差的，如

$$(\omega t+\phi_1)-(\omega t+\phi_2)=\phi_1-\phi_2=\theta$$

这也就是相位差角名称的来由。如果 $\theta>0$，这意味着 u_2 比 u_1 后到正最大值，如图 8-7 所示，我们就说 u_2 在相位上滞后(*lag*)u_1 角 θ 或 u_2 在时间上滞后 $u_1\theta/\omega$ 秒。如果 $\theta<0$，这意味着 u_2 比 u_1 先到正最大值（试自己绘出波形图），我们就说 u_2 在相位上超前(*lead*)u_1 角 θ，或 u_2 在时间上超前 $u_1\theta/\omega$ 秒。另外，滞后和超前是相对的，u_2 超前 u_1 也就是 u_1 滞后 u_2。

如果相位差 θ 为零，则两个正弦波为同相位，简称同相，它们同时到达正最大值，变化“步调”一致，如图 8-8(*a*)所示。如果相位差 θ 为 $\pm\frac{\pi}{2}$（即 $\pm 90^\circ$），则两个正弦波为相位正交，如图 8-8(*b*)所示。如果相位差 θ 为 π（即 180°），则两个正弦波为反相位，简称反相，如图 8-8(*c*)所示。

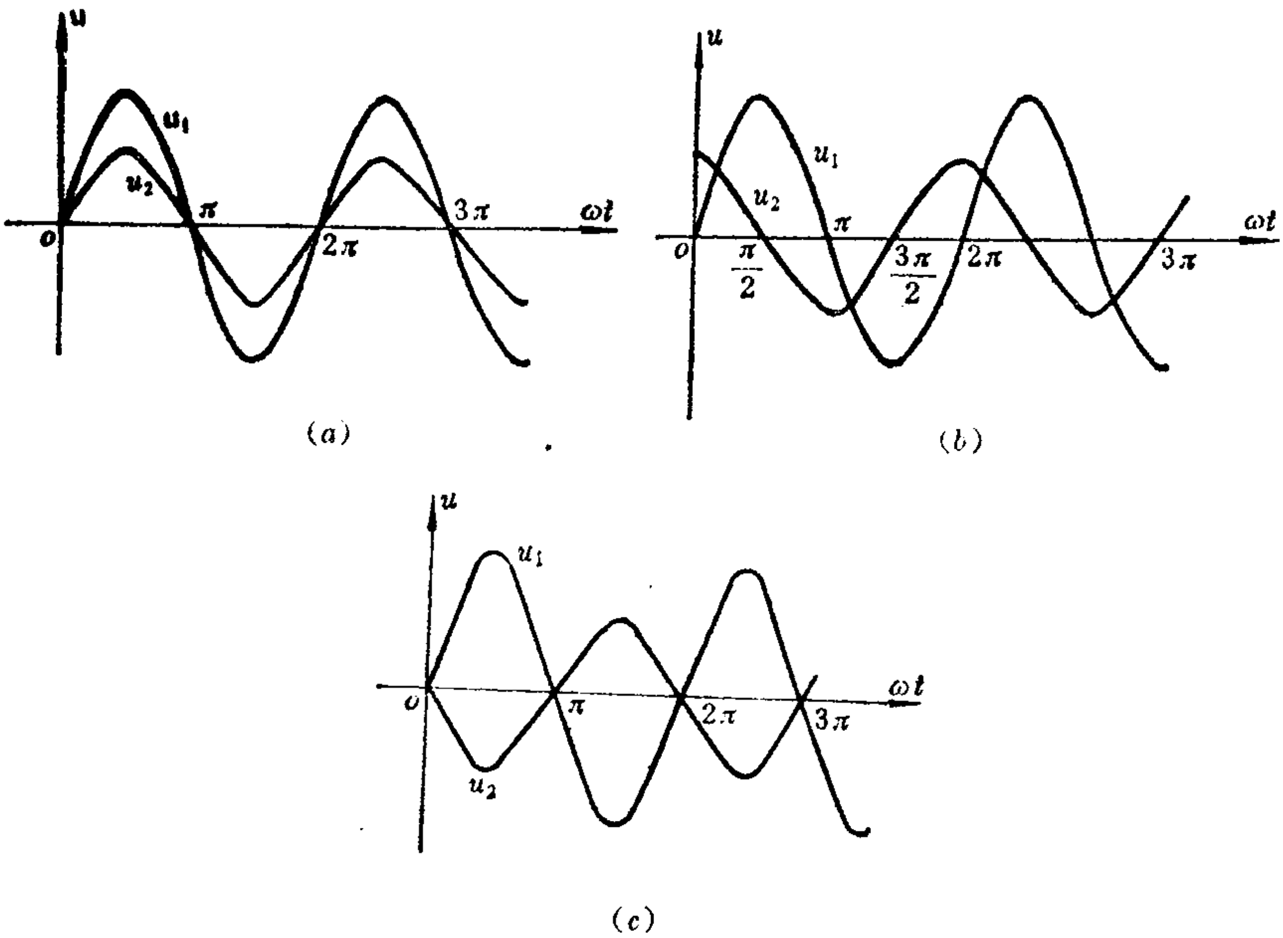

图 8-8 (*a*)同相(*b*)正交(*c*)反相