

二 景 一 用 丛 书

黄 坪 编 著

高中数学

★ 情景 ★
★ 背景 ★
★ 应用 ★

知识背景大扫描
学习情景新设置
应用问题全接触

南京师范大学出版社

前 言

数学学习中不重视应用问题的训练,是数学学习的一种失落.为了提高同学们在分析思维能力基础上的综合应用问题的能力,在平时的学习中,通过设置相应的学习情景、引入一些实际的问题来组织学习是一种极好的方法.我们现行的数学教材已经注意到了这一点,但这方面的素材还挖掘得不够.课堂里相当多的老师对应用问题的教学意识还不够强烈,所谓“去两头,留中间”的现象还依然存在着,影响着素质教育的实施.我们有的老师虽然也在考虑应用问题的教学,但由于手头资料的缺乏,常常未能使美好的愿望得到实现.本书的出版若能解决以上提到的一点点问题,编者也将感到十分满足.

编写本书有几点想法,也是本书追求的几个特点:

1. 强调相关的数学知识在实际中的应用.数学是一门十分注重逻辑推理的学科,我们在学习数学知识的同时,首先要考虑这两个问题:这些数学知识是从哪里来的,除了数学知识本身的逻辑体系之外,还有没有现实的意义?学习数学除了从数学的旧知识引入外,能不能换一种方式进行——从知识产生的实际背景和社会价值出发引入所要学的知识?我想,这样我们的数学学习将更有生命力.另外,我们还要考虑一个问题:学到的数学知识最终用到哪里去?答:回到社会实践中去!

2. 提高解决数学综合问题的能力.应用问题离同学们的现实生活实践比较接近,离现实世界也比较接近.通过解应用题,培养同学们阅读分析、提炼信息和解决实际问题的能力,这是当今社会需要的一种综合能力.中学阶段,不通过这方面的训练,是不能提高同

学们在未来社会里的竞争能力的.在高中学习的三年里,有的老师和同学在高一、高二年级不重视应用题的训练,虽然在高三复习时,也做了不少应用题,但许多同学在高考中却发挥不好,这就说明应用题的训练不是一蹴而成的,解决问题的能力需要相当长的时间积累.因此,本书通过不同学习情景的设计,引导同学们将学到的知识进行同步的应用训练,既有新知识学习阶段的应用题,又有高三复习阶段的综合应用问题.

3. 为高中数学老师和同学们提供较为详尽的应用题教学和学习的资料,为高中推进研究性学习提供值得参考的素材.甚至可以说,每一道题都为同学们开展研究性学习打开了一扇窗,我们可以以此为出发点,对应用题中提到的背景材料,进行实地考察,进行调查研究,亮出你的观点,得到更深入的第一手资料,本书只是为你提供一些研究的线索和方向.相信本书的出版,至少为高中数学研究性学习提供较为宽泛的课题.

4. 为取得高考高分提供有效的训练材料.数学应用题是高考中考查同学们的综合潜能和应变能力的必考题,许多考生是在应用题上拉开分数的.高考应用题都是经过人工改造,抽象、概括过的实际问题,是半建模的实际问题,因此,本书的应用题是以中学数学重要知识为背景,加上实际问题的包装来组织的.

阅读本书还有几个注意点,这里作些说明:

1. 熟练掌握“三基”是提高解决数学应用问题能力的基础.

数学学习的第一关,必须熟练掌握组成数学知识结构中的基础知识、基本技能和基本数学思想方法.在教材中,数学的知识结构是十分严谨的,知识产生的思想脉络也十分清晰,学好这些基础知识,对于解决综合性的应用问题是非常必要的.综合能力不能凭空产生,没有平时扎扎实实的基本功,想一下子来解决难题是不现实的.一般地说,解决一个应用题要涉及很多数学基础知识,本书的编写虽然是按照课本的章节来组织的,但不可能把用到的知识

分割得很细,同学们在学完一章内容后,要把每一章节的基础知识进行系统化、条理化的整理,从总结数学思想方法的高度来建构自己的认知体系,这样,碰到应用问题就不那么害怕了;否则,即使建立了数学模型,也不能将问题解决到底.我们在这里为什么说“三基”,而不是习惯上所说的“双基”,就是为了强调基本数学思想方法在解决应用题中的重要性,用数学思想方法去解决模拟实际问题的应用题,是中学数学学习解决实际问题的一座桥梁,是理论与实际相结合在中学数学学习中的一个方向.中学里解决的数学问题毕竟和现实世界里的实际问题还有一定的差距,我们不是不要同学们去解决真正意义上的数学现实问题,而是为了强调学好数学基础知识的重要性,并处理好两者的关系.我们认为目前的应用问题的训练和高考的导向是正确的,不像“文革”那时,为了理论联系实际,就不学基础知识,到头来,所谓的联系实际也是低层次的.打好基础,为将来解决现实世界的实际问题作准备,是我们进行应用题训练的朴素想法,没有基础知识的准备,而好高骛远,恰恰是不合实际的做法.

2. 掌握应用题求解的类型和一般程序是解决数学应用问题的关键.

对数学应用问题,目前主要有两种分类,一种是按数学知识分类,另一种是按问题本身的属性分类.为了和同学们学习同步,本书是按照数学知识的进展来分类的.有时亦有交叉,如在高三复习阶段,我们就不再按知识来分类了.如求最值问题,按数学知识的方法进行的分类有二次函数配方法、三角函数法、基本不等式法、判别式法、几何法等.按问题情形进行分类,把最值问题分为营销类、决策类、工程类、设计类等.综合当前数学教学中的问题,我们按照第二种分类,可涉及以下几个方面.

有关比率、增长方面的问题.这些问题来自于经济生活(如银行利率)、体育活动、生物(人口)增长等方面.所需的知识是一般常

识和有关比例、方程和指数等基本理论。

有关优化方面的问题. 这些问题来自于投资、风险、旅游以及体育活动等方面的有关最值问题. 所需的是有关函数的基本理论。

相关学科方面的问题. 这些问题来自于物理、化学、生物以及地理等相关学科的生活常识. 求解这些问题需要相关学科的基本理论。

有关估算方面的问题. 这些问题来自于计算、度量、预算、决策等方面的问题。

数学的应用是通过数学问题来实现的. 因此, 要应用数学的理论解决实际问题, 首先要用这个理论建立起数学模型, 通过对数学模型的研究和解决, 最终使得问题本身获得解决。

数学应用题求解的一般程序:

① 语言翻译 将实际问题用数学语言(或符号)加以表述. 这一步, 阅读理解是解题入门的重要一关, 通过阅读弄清题意, 要顺畅地用数学语言、符号或图表, 准确地表示问题中的数量关系, 确定解题方向。

② 建立模型 根据问题的条件, 确定各种量之间的关系, 找到问题条件和结论的联系, 要把实际问题的内在联系与数学知识进行联想、转化, 抽象成数学问题, 抽取出涉及问题本质的数学结构, 建立起相应的数学模型, 如函数模型、方程模型、不等式模型等。

③ 数学求解 根据建立的数学模型在数学知识的范围内进行求解, 得出数学结论。

④ 实际验证 将数学结论还原成实际问题, 这一步要做的是确认模型的解是不是实际问题的解, 并进而发展或深入研究这个问题。

在这四个步骤中, 建立数学模型是最主要的一步. 它是应用问题区别于其他数学问题的重要标志。

进行数学应用题的教学,是培养同学们分析问题和解决问题能力的需要,学习数学的最基本的目的是为了应用数学理论来解决实际问题.一方面数学理论本身的建立,要通过它的应用来证明其必然性;另一方面,在应用的过程中,同学们的思维素质、个性品质得到发展.如果数学教学仅仅停留在数学纯知识的范围内进行所谓数学知识和能力的训练,不管实际应用,就不符合时代的要求.我们认为数学应用能力的训练和基础知识的训练是不能截然分开的,将学到的知识进行应用,在应用中巩固基础和培养数学化的能力,是数学能力的一个显著标志.

3. 搞清一般性应用题与有问题的应用题是培养我们实践能力的重要途径.

说到应用问题,我们不能不提到“问题解决”.从1980年美国提出“问题解决”的概念之后,至今已形成数学教学的时代潮流,“问题解决”中的问题,不等于同学们天天做的习题,数学中的应用题,相当多的是有问题的问题,每一道应用题都有其实际的社会背景,而社会问题是相当复杂的,有时很难交代清楚,一不小心就成了问题.华东师大张奠宙教授在《数学教育研究导引》一书中,对“问题”作了以下五个方面的概括,所谓“问题”,是指:

- (1) 对同学们来说不是常规的,不能靠简单的模仿来解决;
- (2) 可以是一种情景,其中隐含的数学问题要同学们自己去提出、求解并作出解释;
- (3) 具有趣味和魅力,能引起同学们的思考和向同学们提出智力挑战;
- (4) 不一定有终极的答案,各种不同水平的同学都可以由浅入深地作出回答;
- (5) 解决它往往需伴以个人或小组的数学活动.

对照这五个特征,数学应用题是目前中学数学学习中最具有问题成分的数学问题,应引起我们足够的重视.为了更有效地进行

数学能力的训练,我们应更多地能力训练提供广泛的、广阔的问题环境和学习情景,问题的应用性正是数学能力训练适宜的问题环境和学习情景。

问题不等于考题,有时有问题的考题反而成了问题.这里我们举一个例子.

2002 年全国春季高考题第 12 题:

用一张钢板制作一个容积为 4 m^3 的无盖长方体水箱,可用的长方形钢板有四种不同的规格(长 $\times$ 宽的尺寸如各选项所示,单位均为 m).若既要够用,又要所剩最少,则应选择钢板的规格是

().

A. 2×5 B. 2×5.5

C. 2×6.1 D. 3×5

本题的标准答案选 C.

设制作的长方体三度为 a 、 b 、 c ,则体积 $V = abc = 4$,

表面积 $S = 2bc + 2ac + ab \geq 3 \sqrt[3]{4(abc)^2} = 12$.

故排除 A、B、C、D 两块钢板均够用.

要表面积最小,当且仅当 $2bc = 2ac = ab$,即 $a = b = 2c$,

此时的制作方法如图:



即制作一个底面积为 2×2 ,四个侧面均为 2×1 的无盖长方体.因为第四块的面积大于第三块的面积,似乎答案选 C.

问题出在后一句话上,“又要所剩最少”.刚才剩下 0.2 平方米的钢板面积,我们完全可以使所剩的钢板面积为零.即不定方程

$$\begin{cases} abc = 4 \\ 2bc + 2ac + ab = 15 \end{cases}$$
有解,这是做得到的,虽然做长方体的用料较

多,但所剩最少.同样可以用 2×6.1 的钢板做,使所剩面积也为

零.因此,C、D都应该是够用,且所剩最少的钢板规格.两个答案都应该是正确的答案.

要选择答案C,需要对“又要所剩最少”作修正,改为用价格相同的四块不同规格的钢板做无盖长方体,除了够用,又要最合算.所谓最合算,指的是在够用的前提下,用料最省,所剩最少.

因此,这是一个有问题的考题,而且,数学模型的建立也相当开放,如果要求在四块钢板上截去四个小正方形,再问同样的问题,本题答案就选D了.你能回答吗?

4. 了解高考应用题的发展历史是高考致胜的重要法宝.

高考应用题在背景公平的前提下,综合考查学生的阅读理解能力、捕捉解题信息的能力、运用所学的数学知识正确分析问题和解决问题的能力.随着素质教育的进一步推进,要求同学们应用所学知识解决实际问题的趋势日益明显.近几年的高考数学试题增强了对密切联系生产和生活实际的应用性问题的考查力度.加强应用意识的培养和考查是时代发展的需要,是培养同学们综合实践能力和数学创新能力的需要,同时也是由数学学科的特点所决定的.从1993年开始,数学高考试题逐年加强了应用问题的考查.现将从1993年以来高考中应用题的考查情况列表如下:

年度	题号	问题情境	建模类型	分值	合计	总分
1993 年	17 小题	贺卡分配	排列	3	12	120
	20 小题	灯光照明	几何	3		
	21 小题	商品抽样	组合	3		
	22 小题	泳池造价	不等式	3		
1994 年	5 小题	细胞分裂	函数	4	13	150
	10 小题	任务分配	排列组合	4		
	20 小题	物理测量	不等式	5		
1995 年	20 小题	空盒放球	排列组合	5	17	150
	24 大题	淡水养鱼	函数,不等式	12		

续表

年度	题号	问题情境	建模类型	分值	合计	总分
1996 年	23 大题	人口、土地	方程、不等式	10	10	150
1997 年	22 大题	汽车运费	函数	12	12	150
1998 年	11 小题	分配方案	排列组合	5	17	150
	22 大题	污水处理	函数、不等式	12		
1999 年	16 小题	作物间作	排列	4	16	150
	22 大题	轧钢问题	数列	12		
2000 年	6 小题	税收问题	函数	5	21	150
	13 小题	分配方案	排列	4		
	21 大题	市场经济	函数	12		
2001 年	11 小题	屋顶设计	几何	5	22	150
	12 小题	信息流量	排列组合	5		
	21 大题	旅游经济	函数、数列、不等式	12		
2002 年						

(由于文理试卷应用题基本相同,因此,以上数据均以理科高考试题为准.)

从表中可看出:从 1995 年开始,应用题成为每年高考必考的一道大题,分值除了 1996 年的 10 分外,每年均为 12 分,近几年在选择填空中,也增加了应用题的考查,且分值逐年上升.因此,今后的数学高考应用试题在保持稳定的基础上,会在突出建模能力、所给材料具有原创性以及一题多模等方面给予进一步的重视,同时,统计图表等作为数学应用的一部分,其发展趋势也不容忽视.

从表中,我们还可以看出,密切结合课本知识,着重考查本学科的重点内容(如函数、数列、不等式等),同时,结合我国的实际情况和当前改革开放的形势,从有关热点问题(如人口、土地、金融、

投资、环保等)的角度来编拟试题,既是突出数学在解决实际问题时的应用价值,同时也是对同学们进行国情教育,体现了思想教育、德育教育在数学教育中的渗透.

以上谈了本书的几个特点和应用题学习中要注意的几个方面.我们相信同学们通过本书的学习,数学应用能力和综合分析能力一定会大大的提高.

黄 坪

2002 年 5 月 1 日

作者简介

黄坪,男,1963年11月生,江苏南通人.毕业于南京师范大学数学系.江苏省南通第一中学数学特级教师.首届国家级中学数学骨干教师培训班学员.江苏省中学数学研究会“思维与数学教学”专题协作组成员.已在《数学通报》、《数学通讯》、《数学教学》等全国十余家中学数学研究刊物发表了有关思维与数学教学研究方面的学术论文三十多篇,出版过个人理论专著《中学数学思维教学探究》一书,合作编写的数学论著十余部.

目 录

第一章 集合与简易逻辑	(1)
1.1 容斥原理	(1)
知识背景提要	(1)
情景分类例举	(1)
应用问题练习	(6)
1.2 简易逻辑	(7)
知识背景提要	(7)
情景分类例举	(7)
应用问题练习	(11)
第二章 函数	(14)
2.1 一次函数	(14)
知识背景提要	(14)
情景分类例举	(14)
应用问题练习	(18)
2.2 二次函数	(21)
知识背景提要	(21)
情景分类例举	(22)
应用问题练习	(27)
2.3 分式函数	(34)
知识背景提要	(34)
情景分类例举	(35)

应用问题练习	(39)
2.4 无理函数	(43)
知识背景提要	(43)
情景分类例举	(43)
应用问题练习	(46)
2.5 指数、对数函数	(49)
知识背景提要	(49)
情景分类例举	(49)
应用问题练习	(53)
第三章 数列	(56)
3.1 等差数列	(56)
知识背景提要	(56)
情景分类例举	(56)
应用问题练习	(59)
3.2 等比数列	(61)
知识背景提要	(61)
情景分类例举	(62)
应用问题练习	(67)
3.3 等差、等比数列	(74)
知识背景提要	(74)
情景分类例举	(74)
应用问题练习	(79)
第四章 三角函数	(90)
4.1 正弦定理和余弦定理	(90)
知识背景提要	(90)
情景分类例举	(90)
应用问题练习	(95)
4.2 三角函数的图像与性质	(101)

知识背景提要·····	(101)
情景分类例举·····	(101)
应用问题练习·····	(107)
第五章 平面向量 ·····	(113)
知识背景提要·····	(113)
情景分类例举·····	(113)
应用问题练习·····	(119)
第六章 不等式 ·····	(124)
6.1 大小比较 ·····	(124)
知识背景提要·····	(124)
情景分类例举·····	(124)
应用问题练习·····	(133)
6.2 基本不等式 ·····	(139)
知识背景提要·····	(139)
情景分类例举·····	(140)
应用问题练习·····	(147)
第七章 直线与圆的方程 ·····	(154)
7.1 线性规划 ·····	(154)
知识背景提要·····	(154)
情景分类例举·····	(155)
应用问题练习·····	(161)
7.2 直线与圆 ·····	(165)
知识背景提要·····	(165)
情景分类例举·····	(165)
应用问题练习·····	(173)
第八章 圆锥曲线 ·····	(179)
知识背景提要·····	(179)
情景分类例举·····	(179)

应用问题练习	(187)
第九章 直线、平面、简单几何体	(194)
知识背景提要	(194)
情景分类例举	(194)
应用问题练习	(208)
第十章 排列、组合与概率	(219)
10.1 排列、组合	(219)
知识背景提要	(219)
情景分类例举	(219)
应用问题练习	(227)
10.2 概率、统计	(233)
知识背景提要	(233)
情景分类例举	(234)
应用问题练习	(240)
后记	(245)

第一章 集合与简易逻辑

1.1 容斥原理

知识背景提要

在数学的实际应用中,常会遇到有关集合中元素个数的问题,一般地,集合 A 中所含有元素的个数,称为集合 A 的势或基数,记作 $\text{card}(A)$. 例如,设 $A = \{a, b, c\}$, 则 $\text{card}(A) = 3$. 由于知识范围的局限,本节只研究有限集合. 显然,有限集合的势是有限正整数,且满足

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

这个事实常被称为包含排斥定理,简称容斥原理,它可以作为公式直接使用.

情景分类例举

◆典型例题解析

例 1 在城镇居民身份调查时,假设 15 人中有 12 人是工人, 5 人是干部, 3 人具有双重身份(编制是工人但做干部工作,即以工代干),则有几既不是工人又不是干部?

【解析】 分别用 A 、 B 表示工人、干部的集合,则

$\text{card}(A) = 12, \text{card}(B) = 5, \text{card}(A \cap B) = 3$, 由包含排斥定理得

$$\text{card}(A \cup B) = 12 + 5 - 3 = 14,$$

所以 15 人中,既不是工人又不是干部的人数为

$$15 - \text{card}(A \cup B) = 15 - 14 = 1,$$

所以 15 人中,既不是工人又不是干部的有 1 人.

〔评注〕 对于例 1,也可以利用维恩图来解.维恩图是一种图解集合的工具,通常规定用一个矩形区域来表示全集 U ,在此矩形内用一条封闭曲线的内部来表示 U 的子集,如图 1-1-1 所示,先在 $A \cap B$ 对应的区域内写上 3,表示 $\text{card}(A \cap B) = 3$,再在 A 中不包括 $A \cap B$ 的区域内写上 9,表示 $\text{card}(A) - \text{card}(A \cap B) = 9$,再在 B 中不包括 $A \cap B$ 的区域内写上 2,表示 $\text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) = 2$.将这三个区域内的数相加,得 14,即 $\text{card}(A \cup B) = 14$,最后从全集 U 的元素个数 15 中减去 14,即 $\text{card}(U) - \text{card}(A \cup B) = 15 - 14$,得所求答案为 1.当实际问题涉及到的集合个数越多时,就越能显示出维恩图的优越性.

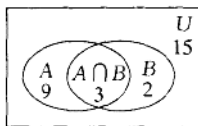


图 1-1-1

例 2 高一(3)班的学生中,参加语文课外小组的有 20 人,参加数学课外小组的有 22 人,既参加语文又参加数学小组的有 10 人,既未参加语文又未参加数学小组的有 15 人,问高一(3)班共有学生几人?

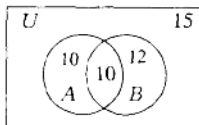


图 1-1-2

〔解析〕 设 $U = \{\text{高一(3)班学生}\}$,

$A = \{\text{高一(3)班参加语文小组的学生}\}$,

$B = \{\text{高一(3)班参加数学小组的学生}\}$,

则 $A \cap B = \{\text{高一(3)班既参加语文小组又参加数学小组的学生}\}$,

$C_U(A \cup B) = \{\text{高一(3)班既未参加语文小组又未参加数学小组的学生}\}$,

$$\begin{aligned} \text{有 } \text{card}(U) &= \text{card}[C_U(A \cup B)] + \text{card}(A \cup B) \\ &= \text{card}[C_U(A \cup B)] + \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) \end{aligned}$$

• 2 •