高等学校教学参考书

高等工程数学

上册

GAODENG GONGCHENG SHUXUE

人民铁道出版社

内 容 提 要

本书分上、下两册，上册内容包括线性代数、常微分方程、复变函数以及拉普拉斯变换的基本理论，和它们在机械、电系统等方面的应用。

本书适用于工程技术人员、工科大学高年级学生、教师自学，也可作为工科研究生的试用教材。

高等学校教学参考书
高等工程数学
上 册
黄克欧 谌安琦 范子亮 奚载青 编
人民铁道出版社出版
新华书店北京发行所发行
各 地 新 华 书 店 经 售
人民铁道出版社印刷厂印
开本：787×1092 印张：27.75 字数：701 千
1 9 7 9 年 7 月第 1 版 1 9 7 9 年 7 月第 1 次印刷
印数：0001—27,000册 定价：2.85元

前　　言

随着科学技术的迅速发展，特别是电子计算机的大量使用，工程技术中的许多数学方法获得了愈来愈广泛的应用。为使工作在各条战线上的工程技术人员、科研及教学人员迅速熟悉这些常用的数学理论和方法，有必要编写一本内容适中，既能系统地介绍工程技术中这些常用的数学理论和方法，又能对这些理论和方法的实际应用给予足够重视的应用数学书籍。本书的目的就是希望在这两方面对读者有所帮助。

为了便于读者自学，本书对所涉及到的数学理论作了适当的处理，对于一些必不可少的材料作了详细而系统的介绍，并力求写得通俗易懂；对于那些比较次要的材料或繁琐的数学证明则作了适当的删减。全书选择了大量的例题、插图和附表，并配有习题，绝大部分习题都给出了答案或提示。

本书分上、下两册。上册主要介绍线性代数、常微分方程、复变函数以及拉普拉斯变换的基本理论，和它们在机械系统、电系统等方面的应用。本书适用于工程技术人员、工科大学高年级学生、教师等自学，也可作为目前工科研究生的试用教材。我们假定读者已经熟悉微积分的基础知识（例如樊映川等编《高等数学讲义》），故不再包含这方面的材料。

由于时间仓卒、编者水平所限，书中难免出现错误和不妥之处，欢迎读者批评指正。在编写过程中，得到西南交通大学基础课部、电机系、机械系等部门许多同志的帮助，庄永宽同志为本书绘制了全部插图，为此向他们表示衷心的感谢。

编者　一九七八年仲夏

于西南交通大学

目　录

第二章 常微分方程

第三章 复变函数

第四章 拉普拉斯变换

第一章 线性代数

§1 行 列 式

1.1 行列式的一般概念

行列式是解线性代数方程组的一个重要工具。例如我们知道，二元线性方程组

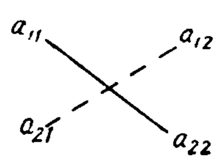
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

若$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则其解为：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.2}$$

由于公式（1.2）不便于记忆，因此来研究解的结构。首先注意到它们的分母 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，是由方程组（1.1）未知数的系数构成的。若按这些系数在方程组（1.1）的位置列成下表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$



我们发现，公式（1.2）的分母等于从左上角到右下角对角线上两个元素的乘积减去从右上角到左下角对角线上两个元素的乘积，即右图中实线上的两数之积减去虚线上的两数之积。

于是，把代数和$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$称为二阶行列式，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22}称为行列式（1.3）的元素，并把横排叫行，竖排叫列。

显然，x_1的分子$b_1a_{22} - a_{12}b_2$就是将分母$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$中的$a_{11}$、$a_{21}$（$x_1$的系数）分别用$b_1$、$b_2$来代替，所以亦可用行列式表示为

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2。$$

同样，x_2的分子等于

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}。$$

因而公式（1.2）可写成行列式的形式：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}。$$

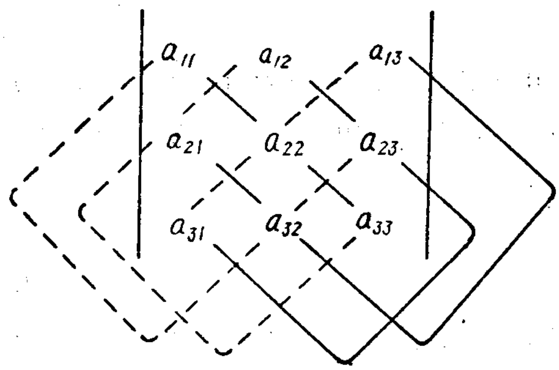
三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.4}$$

解的一般表达式更为复杂，非常不便于记忆。因而仿照二元线性方程组的方法，引进三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}$$

它等于六项之和，可用右图帮助记忆三阶行列式的计算法则：实线上三元素之积取正号，虚线上三元素之积取负号，然后相加便得到行列式的值。这法则称为对角线法则。



例 1　三阶行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &=2\times(-4)\times 3+3\times 1\times 5+(-1)\times 1\times(-2) \\ &\quad-(-1)\times(-4)\times 5-3\times 1\times 3-2\times 1\times(-2) \\ &=-24+15+2-20-9+4 \\ &=-32 \end{aligned}$$

因而，三元线性方程组（1.4）的解写成行列式形式为：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}。$$

显然，解的行列式表达形式，结构规则，便于记忆。

例 2　解方程组

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=14 \\ x_1+x_2+x_3=10 \\ 2x_1+3x_2-x_3=1 \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=-3+4+3-2+2-9=-5,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}14 & 2 & 1\\ 10 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}=-14+2+30-1+20-42=-5,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3 & 14 & 1\\ 1 & 10 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-30+28+1-20+14-3=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}3 & 2 & 14\\ 1 & 1 & 10\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=3+40+42-28-2-90=-35,$$

∴
$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-5}{-5}=1,$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-10}{-5}=2,$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-35}{-5}=7。$$

可见用二阶、三阶行列式来解二元、三元线性方程组是很方便的，自然联想到在解 n 元线性方程组时，是否能用行列式这一工具，从而引进 n 阶行列式概念呢？

仿照二阶、三阶行列式，我们可用符号

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

来表示 n 阶行列式，其中元素 a_{ij} 的第一个足标 i 表示其所在的行数，第二个足标 j 表示其所在的列数。计算二阶、三阶行列式的对角线法则，应用到高阶（阶数大于3）行列式是不正确的。为了引进 n 阶行列式的定义，先介绍余子式、代数余子式的概念。

把行列式中某元素所在的行与列删去，剩下的元素组成的行列式，叫做这个元素的**余子式**。

例，行列式 $|A|$ 的元素 a_{23} 的余子式 M_{23} 为

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}}\\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}}\\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}}\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=M_{23}$$

若该元素所在的行为 i，列数为 j，则以 $(-1)^{i+j}$ 乘该元素的余子式，即 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 叫做这个元素的**代数余子式** A_{ij}。

上例中行列式 $|A|$ 的元素 a_{23} 的代数余子式 A_{23} 为

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

可见一个元素的代数余子式，由它的余子式前面添正号或负号而得到。添正号或者添负号，由该元素所在的行数和列数来决定。显然a_{11}的代数余子式是取正号的，而任意相邻的两个元素它们的代数余子式是异号的。取符号的规律如下图（以三阶行列式为例）

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

对于二阶、三阶行列式，用对角线法则可以证明它有下面这个重要性质，并把这个结果规定为二阶、三阶列式的定义。

行列式等于任意一行（或一列）的各元素乘以它们各自对应的代数余子式的乘积之和。按第 i 行展开为

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}A_{ij} \qquad (1.5)$$

$$(i=1,\ 2,\ 3)$$

按第 j 列展开为

$$|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}=\sum_{i=1}^{3}a_{ij}A_{ij} \qquad (1.5a)$$

$$(j=1,2,3)$$

例3 将例 1 的行列式 $|A|$ 分别按第 1 行 第 3 列展开。

解 行列式 $|A|$ 按第 1 行展开得

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=-20+6-18=-32$$

行列式按第三列展开得

$$|A|=(-1)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$=-18+19-33=-32$$

可以看到行列式按不同行或列展开计算的结果相等，而且与例 1 的计算结果一样。

利用这个性质，我们将给出 n 阶行列式的定义。我们知道，行列式某一元素的代数余子式的阶数总是比原行列式降低一阶的，而二阶、三阶行列式是有明确的定义。于是我们将用归纳的方法给出 n 阶行列式的定义。

定义 行列式

$$|A|=|a_{ij}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于任意一行（或列）每个元素与它们各自的代数余子式乘积之和。即：

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{1.6}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

式（1.6）习惯称为行列式按某行（或列）的展开式。

这定义使 n 阶行列式可转化成 n 个（$n-1$）阶行列式，它们中的任一个又可转化成（$n-1$）个（$n-2$）阶行列式，依次下去，最后扩展到仅含有二阶或三阶行列式，它们是能用对角线法则求得的。

必须注意，只有证明了行列式按不同的行（或列）的展开式都相等，这个定义才有意义。从例3可见，一个三阶行列式按不同的行与列展开，计算的结果是相同的，这个结论推广到 n 阶行列式也成立。

定理 n 阶行列式任意一行（或列）的每个元素与它们对应的代数余子式乘积之和都是相等的。（证明从略）

我们再举一个四阶行列式的例子，来验明定理的正确性。

例4 求行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

按第三行，第一列的展开式。

解 按第三行的展开式：

$$|A| = 0\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 75 + 180 - 105 = 150$$

按第一列展开式：

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & -2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -32 + 192 + 0 - 10 = 150$$

虽然按不同的行、列展开，但它们的结果相等。

例5 求证对角行列式

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn},$$

其中未写出的元素皆等于零。

解　行列式按第一行展开，除a_{11}外，第一行元素等于零。有

$$|B|=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn}\end{vmatrix}=\cdots$$

$$=a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn}。$$

例 6　求证三角形行列式

$$|B|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn},$$

其中未写出的元素皆等于零。

解　仿照例 5，行列式按第一列展开，除a_{11}外第一列元素都等于零。有

$$|B|=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & \\ & & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \ddots & \\ & & a_{nn}\end{vmatrix}=\cdots=a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn},$$

作为三角形行列式的特例，k阶约当块的特征矩阵的行列式（简称约当块行列式）显然等于：

$$|\lambda E-J|=\begin{vmatrix} (\lambda-a) & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & (\lambda-a) & -1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & (\lambda-a) & -1 \\ & & & & (\lambda-a)\end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-a)\cdots(\lambda-a)=(\lambda-a)^k。$$

1.2　拉普拉斯展开定理

首先推广余子式和代数余子式的概念。在n阶行列式$|A|$中任意选定k行k列，位于这些行与列相交处的元素所构成的k阶行列式，称为行列式$|A|$的一个k阶子式。显然行列式的元素就是 1 阶子式。删去$|A|$的某个k阶子式N所在的行和列之后，剩下的（$n-k$）阶行列式M，称为N的余子式，若N所在的行的序数为i_1，i_2，$\cdots i_k$，所在列的序数为j_1，j_2，$\cdots j_k$，那么

$$(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}M$$

称为N的代数余子式。

例　5 阶行列式包含第二、三行，第一、四列的二阶子式以及它的余子式、代数余子式。由下图

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55}\end{vmatrix}$$

可得

$$N=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix},\qquad M=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}$$

代数余子式为

$$(-1)^{2+3+1+4}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}。$$

定理（拉普拉斯展开定理） 在 n 阶行列式 $|A|$ 中，任意选定 k（$1\leqslant k\leqslant n-1$）行（或列），由这 k 行（或列）元素所构成的一切可能的 k 阶子式与它们对应的代数余子式乘积之和，等于行列式 $|A|$。（证明从略）

这定理常常称为行列式按某几行展开。使用这定理时，必须注意到定理要求的是一切可能的 k 阶子式，若 n 阶行列式选定 k 行（列）后，这 k 行元素所构成的一切 k 阶子式共有 $C_n^k\left(=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}\right)$ 个。

例 7 将例 4 的行列式 $|A|$ 按第一、二行展开。

解

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

选定第一、二行后，一、二行中的 k 阶子式共有 $C_4^2=6$ 个，根据拉普拉斯展开定理，有

$$\begin{aligned}|A|&=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}\\&+\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+1+4}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\\&+\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+2+4}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+3+4}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}\\&=(-5)(-16)+(-10)(16)+(-15)(-16)+(-5)(-3)\\&\quad+(-10)(2)+(-5)(1)=150。\end{aligned}$$

结果与例 4 一样，但步骤比例 4 繁琐些。

通常很少用拉普拉斯展开式来计算行列式，主要是用按一行（列）的展开公式，但若某些行（列）含零元素较多，若按这几行（列）展开，会简便些。例如

例 8 求条形行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

解　由于第一、二行含零元素较多，所以按第一、二行展开。又因为其中的第四、五列的元素都等于零，第一、二行中包含第四或者第五列的二阶子式显然等于零，不予考虑，故二阶子式只要计算三个就可以。

$$|A|=\begin{vmatrix}3&1\\2&3\end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix}3&1&0\\2&3&1\\0&2&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&0\\2&1\end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix}2&1&0\\0&3&1\\0&2&3\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}1&0\\3&1\end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix}0&1&0\\0&3&1\\0&2&3\end{vmatrix}=105-42=63。$$

例 9　求下列约当行列式（空白处的元素等于零）的值。

$$|\lambda E-J|=\begin{vmatrix}(\lambda-a)&-1&0&&&&&&\\0&(\lambda-a)&-1&&&&&&\\0&0&(\lambda-a)&&&&&&\\&&&(\lambda-b)&-1&0&0&&\\&&&0&(\lambda-b)&-1&0&&\\&&&0&0&(\lambda-b)&-1&&\\&&&0&0&0&(\lambda-b)&&\\&&&&&&&(\lambda-c)&-1\\&&&&&&&0&(\lambda-c)\end{vmatrix}$$

解　虚线是为了显示行列式的特点而加的，每个小块都是一个约当块行列式，故行列式可简写成：

$$|\lambda E-J|=\begin{vmatrix}\lambda E-J_1&&\\&\lambda E-J_2&\\&&\lambda E-J_3\end{vmatrix}$$

将行列式 $|\lambda E-J|$ 按前三行展开得

$$|\lambda E-J|=\begin{vmatrix}(\lambda-a)&-1&0\\0&(\lambda-a)&-1\\0&0&(\lambda-a)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}(\lambda-b)&-1&0&0&&\\0&(\lambda-b)&-1&0&&\\0&0&(\lambda-b)&-1&&\\0&0&0&(\lambda-b)&&\\&&&&(\lambda-c)&-1\\&&&&0&(\lambda-c)\end{vmatrix}$$

第二个行列式再按前四行展开，由例 6 的结果有

$$|\lambda E-J|=\begin{vmatrix}(\lambda-a)&-1&0\\0&(\lambda-a)&-1\\0&0&(\lambda-a)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}(\lambda-b)&-1&0&0\\0&(\lambda-b)&-1&0\\0&0&(\lambda-b)&-1\\0&0&0&(\lambda-b)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}(\lambda-c)&-1\\0&(\lambda-c)\end{vmatrix}$$

$$=|\lambda E-J_1|\cdot|\lambda E-J_2|\cdot|\lambda E-J_3|=(\lambda-a)^3\cdot(\lambda-b)^4\cdot(\lambda-c)^2$$

类似，可推出更一般的约当行列式的求值公式：

$$|\lambda E-J|=\begin{vmatrix}\lambda E-J_1 & & & \\ & \lambda E-J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda E-J_m\end{vmatrix}=|\lambda E-J_1|\cdot|\lambda E-J_2|\cdots|\lambda E-J_m|=(\lambda-a)^{t_1}(\lambda-b)^{t_2}\cdots(\lambda-c)^{t_m}$$

其中t_i是约当块行列式的阶数。

1.3 行列式的性质

由行列式的定义和拉普拉斯展开定理，可推出行列式的一些性质。

下面引入转置行列式的概念，若把行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n}\end{vmatrix}$$

的行变成同序数的列，就得到一个新的行列式

$$|A^T|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

则称 $|A^T|$ 为 $|A|$ 的**转置行列式**。显然 $|A|$ 也是 $|A^T|$ 的转置行列式。

性质 1　行列式和它的转置行列式相等。

这个性质对二阶行列式显然是成立的，根据行列式的定义，用数学归纳法可证明这个结果是正确的。（证明从略）

例如行列式 $|A|$ 与它的转置行列式 $|A^T|$ 为

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & -1\\ -2 & 3 & 5\end{vmatrix}=13,\quad |A^T|=\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & 0 & 3\\ 4 & -1 & 5\end{vmatrix}=13。$$

可见它们是相等的。

这个性质说明行列式的行和列的地位是相同的，对行成立的性质，对列也必成立，反之亦然。

性质 2　若行列式某一行（列）的全部元素等于零，则行列式等于零。

只要将行列式按元素都等于零的这行（列）展开，显然它的每一项都等于零，故行列式等于零。

性质 3　若行列式任意两行（或列）交换位置，则行列式绝对值不变而符号相反。

证明对于二阶行列式，这个性质显然是成立的。这是因为：

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},\quad \begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{11} & a_{12}\end{vmatrix}=a_{21}a_{12}-a_{22}a_{11}。$$

对于 n 阶行列式，现将行列式按互换位置的这两行展开，由于仅将这两行互换位置，而其他各行元素不动，所以由这两行元素组成的任一个二阶子式都仅仅改变其符号，而它们对应的代数余子式则与原来完全相同，所以展开式的每一项也是仅改变符号，因此整个行列式绝对值不变而符号相反。

性质 4　把行列式的某一行（或列）的每个元素同乘以数 k，等于以数 k 乘该行列式。

证明　设行列式第 i 行每个元素都乘以数 k，将行列式按第 i 行展开，由公式（1.6）得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (ka_{ij})A_{ij} = k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5　若行列式的第 i 行（或列）的各元素都可写成二项之和：

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \qquad (j=1,\ \cdots,\ n)$$

则行列式等于两个行列式之和，其中一个行列式的第 i 行（或列）元素为 b_1，…，b_n，另一个行列式第 i 行（或列）元素为 c_1，…，c_n，而其他元素与原行列式的相同。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1+c_1 & \cdots & b_n+c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明　原行列式按第 i 行展开，由公式（1.6）原行列式等于：

$$\sum_{j=1}^{n} (b_j + c_j)A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_jA_{ij} + \sum_{j=1}^{n} c_jA_{ij}$$

所以性质得证。

由这些性质可以推出另外的一些性质：

性质 6　行列式某二行（列）相同，则行列式等于零。

证明　将行列式的相同的这二行互换位置，由性质 2 得知它们符号相反，又因为这二行相同，互换位后，这二个行列式是一样的。所以 $|A| = -|A|$，即 $2|A| = 0$，故 $|A| = 0$。

性质 7　行列式某二行（列）成比例，则行列式等于零。

由性质 4 得知，将成比例的二行中的某一行乘以一个适当的数，就可使这二行相同，由性质 6 便可得证。

性质 8　以数 k 乘行列式的某一行（列）的每个元素，然后加到另一行（列）的对应元素上，则行列式不变。

证明　根据性质 4 和性质 6 可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{j1} & \cdots & ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 9　行列式某一行（或列）的每个元素与另一行（或列）相对应元素的代数余子式乘积之和等于零。即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \quad (i \neq j) \tag{1.7}$$

或

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{il} = 0 \quad (k \neq l)$$

证明　现作一个行列式 $|B|$，它是将原行列式 $|A|$ 的第 j 行的元素换成 $|A|$ 的第 i 行的元素，然后将 $|B|$ 按 j 行展开。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } j \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{matrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$$

又因为行列式 $|B|$ 的第 i 行、第 j 行相同，根据性质 6，$|B| = 0$，故式（1.7）的第一个等式成立；第二个等式可类似地证明（从略）。

将公式（1.6）与（1.7）合并起来，得到一个很重要的公式：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} |A|, & \text{若 } i = j \\ 0, & \text{若 } i \neq j \end{cases} \tag{1.8}$$

要注意到，公式中和式的各项只是列数 k 在变，而行数 i 与 j 是固定的。若 $i = j$ 时，则和式等于 $|A|$，这就是公式（1.6）；若 $i \neq j$ 时，则和式等于零,这就是性质9公式（1.7）。

若引进符号