



高等学校规划教材
工科电子类

电磁场解析方法

刘鹏程 编



电子工业出版社

电 磁 场 解 析 方 法

刘 鹏 程 编

電 子 工 業 出 版 社.

内 容 提 要

本书系电子工业部规划出版的高校工科类专业教材。较全面地阐述了电磁场边值问题的常用解析解法。对每一种方法均在论述基本原理的基础上给出结合实际的典型应用举例,内容丰富,具有实用价值。书末附有习题及参考文献,供读者深入学习。

电磁场解析方法

刘鹏程 编

责任编辑:卢美

电子工业出版社 出版

北京市海淀区万寿路 173 信箱 (100036)

电子工业出版社发行 各地新华书店经销

北京市燕山联营印刷厂印刷

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 12.75 字数: 33 千字

1995 年 8 月第一版 1995 年 8 月北京第一次印刷

印数: 1000 册 定价: 10 元

ISBN 7-5053-2975-8/G · 244

前 言

本教材系按电子工业部高校工科类专业教材“八五”出版规划，由电磁场与微波技术教材编审委员会电磁场编审小组评选审定，并推荐出版。责任编委是中国科技大学钱景仁教授，由上海科技大学林炽森教授担任主审。

本教材较全面地阐述了电磁场边值问题的常用解析解法。电磁场解析方法是求解工程电磁场边值问题的一类重要方法。它具有丰富的内容和广泛的实用价值。该方法与电磁场的数值方法相结合又相互补充，二者各有其特点和不同的应用范围。全书共分八章。第一章电磁场方程，这是电磁场解析方法的基本出发点，各种解析法就是求解这些方程及其边值问题的数学物理方法。本章将给出各种形式的电磁场方程以及各场量间的关系，这是电磁场解析法的理论基础。第二章至第七章阐述了在电磁场工程中几种常用的解析方法，其中包括分离变量法、矢量亥姆霍兹方程的直接解法、格林函数法、保角变换法、微扰法、变分法、积分变换法以及威纳-霍普夫法等。对每一种方法均在论述基本原理的基础上给出结合实际的典型应用举例，使读者不仅全面了解各种方法，而且使之学以致用，提高分析问题和解决问题的能力。第八章论述了计算电磁场问题中复积分的最陡下降法，介绍了计算各种复积分的数学技巧。只有掌握这些计算方法和技巧，才能使一些解析法所得积分的工程计算得以实现。书末附有习题及参考文献，以便读者深入学习。

本教材是在充分研究电磁场解析方法知识结构的基础上，根据各种方法的内在联系，并兼顾认识论的规律，按照由浅入深的顺序编写的。它是编者对电磁场解析方法进行多年教学和研究的总结。在编写中编者吸取了听课学生对该课程的意见和建议，并从有关博士论文和硕士论文中提取素材及典型算例，在全面阐述电磁场边值问题的解析方法的基础上，介绍了这些方法的近代发展。

在本教材的编写过程中，得到老一辈专家的指导和我的好友傅德民、龚书喜和褚庆昕等同志的鼓励和切磋，并在书中吸取了他们的一些成果，上海科技大学林炽森教授审阅了全稿，对书中的内容提出许多指导性意见，使本书的质量获得提高，在此一并表示诚挚的谢意。由于编者水平有限加之时间仓促，不妥之处肯定存在，诚恳希望读者批评指正。

编 者

1994年10月于西安电子科技大学

1994.10.15

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作的规定,我部承担了全国高等学校和中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力,有关出版社的紧密配合,从1978~1990年,已编审、出版了三个轮次教材,及时供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要,贯彻国家教委《高等教育“八五”期间教材建设规划纲要》的精神,“以全面提高教材质量水平为中心,保证重点教材,保持教材相对稳定,适当扩大教材品种,逐步完善教材配套”,作为“八五”期间工科电子类专业教材建设工作的指导思想,组织我部所属的八个高等学校教材编审委员会和四个中等专业学校专业教学指导委员会,在总结前三轮教材工作的基础上,根据教育形势的发展和教学改革的需要,制订了1991~1995年的“八五”(第四轮)教材编审出版规划。列入规划的,以主要专业主干课程教材及其辅助教材为主的教材约300余种。这批教材的评选推荐和编审工作,由各编委会或教学指导委员会组织进行。

这批教材的书稿,其一是从通过教学实践,师生反应较好的讲义中经院校推荐,由编审委员会(小组)评选择优产生出来的,其二是在认真遴选主编人的条件下进行约编的,其三是经过质量调查在前几轮组织编写出版的教材中修编的。广大编审者、各编审委员会(小组)、教学指导委员会和有关出版社,为保证教材的出版和提高教材的质量,作出了不懈的努力。

限于水平和经验,这批教材的编审、出版工作还可能有缺点和不足之处,希望使用教材的单位,广大教师和同学积极提出批评和建议,共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

目 录

第一章 电磁场方程	1
1.1 麦克斯韦方程	1
1.1.1 积分形式与微分形式	1
1.1.2 复数形式	1
1.1.3 独立方程与定解方程	2
1.1.4 广义麦克斯韦方程	2
1.2 边界条件及阻抗边界条件	3
1.2.1 电磁场量的边界条件	3
1.2.2 里昂托维奇边界条件	5
1.2.3 阻抗边界条件	7
1.3 电磁场量的波动方程	9
1.3.1 无耗媒质中的波动方程	9
1.3.2 有耗媒质中的波动方程	11
1.3.3 双各向同性媒质中的场方程	12
1.4 电磁场的位函数方程	12
1.4.1 矢位和标位方程	12
1.4.2 赫兹矢量位方程	15
1.4.3 得拜(Debye)位方程及场位关系	17
第二章 分离变量法	19
2.1 分离变量法的理论基础	19
2.1.1 变量分离的充要条件	19
2.1.2 迭加原理	21
2.1.3 本征值理论	22
2.2 常用坐标系中的分离变量解及应用举例	23
2.2.1 直角坐标系中的分离变量解及应用举例	23
2.2.2 圆柱坐标系中的分离变量解及应用举例	28
2.2.3 球坐标系中的分离变量解及应用举例	33
2.3 椭圆柱坐标系中的分离变量解及其应用举例	37
2.3.1 椭圆柱坐标系	37
2.3.2 椭圆柱坐标系中的分离变量解	38
2.3.3 椭圆柱对平面波的散射	41
2.4 旋转椭球坐标系中的分离变量解及其应用举例	43
2.4.1 旋转椭球坐标系	43
2.4.2 旋转椭球坐标系的分离变量解	44
2.4.3 球面波及平面波的椭球函数展开	47
第三章 矢量亥姆霍兹方程的直接解法	50

3.1 矢量亥姆霍兹方程的解	50
3.1.1 直角坐标系及圆柱坐标系中解的构成	50
3.1.2 球坐标系中解的构成	52
3.1.3 无源区场的矢量波函数展开	52
3.2 三种常用坐标系中的矢量波函数	54
3.2.1 直角坐标系中的矢量波函数	54
3.2.2 圆柱坐标系中的矢量波函数	56
3.2.3 球坐标系中的矢量波函数	57
3.3 球矢量波函数展开及其应用举例	58
3.3.1 电磁场的球面波展开	58
3.3.2 单元球面波的性质	59
3.3.3 球面波展开式中加权系数的确定	62
3.3.4 利用球面波展开法计算反射面天线的聚焦场	66
3.4 旋转椭球矢量波函数及其应用	67
3.4.1 旋转椭球坐标系中的矢量波函数	68
3.4.2 长旋转椭球体散射场的计算	70
第四章 格林函数与并矢格林函数法	74
4.1 格林函数及其基本解	74
4.1.1 格林函数	74
4.1.2 格林函数的性质及分类	75
4.1.3 自由空间格林函数的基本解	76
4.2 电磁场的格林函数解	78
4.2.1 非齐次标量亥姆霍兹方程的格林函数解	78
4.2.2 电磁场矢量波动方程的格林函数解	80
4.2.3 格林函数的级数解	81
4.3 并矢格林函数	83
4.3.1 并矢格林函数及分类	83
4.3.2 并矢格林函数的性质	85
4.3.3 自由空间的并矢格林函数	87
4.4 电磁场的并矢格林函数解	88
4.4.1 非齐次矢量亥姆霍兹方程的并矢格林函数解	88
4.4.2 并矢格林函数的本征函数展开	90
4.4.3 电磁场平直地面边值问题的并矢格林函数解	94
第五章 保角变换法	97
5.1 复位函数法	97
5.1.1 复位函数法的基本原理	97
5.1.2 复位函数法的应用举例	100
5.2 保角变换法	103
5.2.1 保角变换	104

5.2.2 保角变换法的应用举例	106
5.3 多边形边界的许瓦兹-克里斯多弗(Schwartz-Christoffel)变换	107
5.3.1 许瓦兹-克里斯多弗变换	107
5.3.2 许瓦兹-克里斯多弗变换的应用举例	109
5.4 保角变换法的应用举例	111
第六章 微扰法与变分法	117
6.1 微扰法	117
6.1.1 谐振腔的微扰	117
6.1.2 波导的微扰	121
6.1.3 微扰法的应用举例	123
6.2 增量参数法	126
6.2.1 增量传输常数法	126
6.2.2 增量频率法	128
6.2.3 增量参数法的应用举例	130
6.3 变分法的基本原理	133
6.3.1 泛函与变分	133
6.3.2 变分问题的直接解法	134
6.3.3 变分问题的间接解法	135
6.4 变分法在电磁场计算中的应用	137
6.4.1 电容 C 的稳定公式	137
6.4.2 导出各种特征量稳定性公式的一般方法	140
6.4.3 变分法的应用举例	142
第七章 积分变换法与威纳-霍普夫(Wiener-Hopf)法	150
7.1 傅立叶变换与拉普拉斯变换	150
7.1.1 傅立叶变换	150
7.1.2 拉普拉斯变换	152
7.1.3 应用举例	153
7.2 积分变换法在电磁场边值问题中的应用	155
7.3 威纳-霍普夫法	159
7.3.1 威纳-霍普夫积分方程的解法	160
7.3.2 积分核 $K(\xi)$ 的分解方法	162
7.4 威纳-霍普夫法在电磁场计算中的应用	164
第八章 计算复积分的最陡下降法	168
8.1 最陡下降法的原理及计算公式	168
8.2 鞍点附近存在极点时的最陡下降法	172
8.3 支点对积分贡献的计算方法	176
8.4 电磁场问题中复积分计算举例	178
习 题	183
参考文献	190

第一章 电磁场方程

电磁场方程描述了电磁场的基本性质及运动规律,同时也是求解电磁场问题的基本依据。电磁场的解析解法,就是求解这些电磁场方程边值问题的数学物理方法。因此,在研究电磁场的各种解法之前,有必要对电磁场各种形式的方程予以介绍。本章将概述电磁场方程及其各种位函数方程。

1.1 麦克斯韦方程

1.1.1 积分形式与微分形式

麦克斯韦方程的积分形式为

$$\oint_L \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.1-1a)$$

$$\oint_L \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.1-1b)$$

$$\oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.1-1c)$$

$$\oint_S \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \quad (1.1-1d)$$

麦克斯韦方程的微分形式为

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.1-2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.1-2b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.1-2c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (1.1-2d)$$

在上述公式中 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ 为磁场强度, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 为电场强度, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ 为磁感应强度, $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ 为电位移, $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 为电流密度, $\rho(\mathbf{r}, t)$ 为电荷密度, 这些物理量都是时间及空间的函数。其中, 电流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 通常包括产生电磁场的源电流, 媒质中的传导电流和运流电流(或称为位移电流)。

电流连续性方程的积分形式与微分形式分别为

$$\oint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \quad (1.1-3a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.1-3b)$$

1.1.2 复数形式

若场源及各场量随时间作简谐变化, 这种时变电磁场称为简谐场或时谐场。由于时谐

场对时间的变化规律是单色的, 为了消去时间因子, 引入复振幅矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ 及 $\rho(\mathbf{r})$ 。这些量是单一角频率 ω 的函数, 当采用 $e^{j\omega t}$ 为时间因子时, 复振幅矢量与场矢量的瞬时值间的关系为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}[\mathbf{A}(\mathbf{r})e^{j\omega t}] \quad (1.1-4)$$

式中 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 代表任一复振幅矢量, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ 为其瞬时值矢量。

在频域内, 麦克斯韦方程及电流连续性方程的复数形式为

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) + j\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}) \quad (1.1-5a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (1.1-5b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.1-5c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \quad (1.1-5d)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = -j\omega \rho(\mathbf{r}) \quad (1.1-5e)$$

1.1.3 独立方程与定解方程

公式(1.1-5)中的五个方程并不是完全独立的, 其中只有三个方程是独立的, 这三个独立的方程可以是方程(1.1-5a)、(1.1-5b)及(1.1-5d), 也可选择方程(1.1-5a)、(1.1-5b)和(1.1-5c)。不难看出三个独立方程中, 有两个矢量方程和一个标量方程, 共代表 7 个标量方程, 然而方程中却含有 16 个标量未知数。因此这三个独立方程是非定解的。该方程组不足以求解全部 16 个未知数, 为了求解全部电磁场量, 需要补充下列三个方程, (对于各向同性媒质)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{J}(\mathbf{r}) &= \sigma \mathbf{E}^e + \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{aligned} \right\} \quad (1.1-6)$$

式中 $\mathbf{E}^e$ 为局外电场, 通常是已知的, ϵ 为介电常数, μ 为磁导率, σ 为电导率。这三个矢量方程代表九个标量方程, 再加上前述三个基本方程代表的七个标量方程, 共计可建立十六个标量方程, 从而可以求解全部电磁场量。方程(1.1-6)为均匀各向同性媒质的特性方程或称本构方程, 将方程(1.1-6)代入方程(1.1-5a)及(1.1-5b)中可得

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \sigma \mathbf{E}^e + \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}) + j\omega \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -j\omega \mu \mathbf{H} \end{aligned} \right\} \quad (1.1-7)$$

由方程(1.1-7)可求解出场量 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$, 而后利用方程(1.1-6)可求出其他各量。

1.1.4 广义麦克斯韦方程

众所周知, 我们把电流及电荷看成是产生电磁场的源, 但是对于某些电磁场问题的分析, 引入磁荷及磁流的假想概念是有益的。可把这些磁性源看成复杂形式电性源的等效。

设 ρ^m 为磁荷密度, $\mathbf{J}^m$ 为磁流密度, 它们满足的磁荷守恒定律为

$$\nabla \cdot \mathbf{J}^m(\mathbf{r}) = -j\omega \rho^m(\mathbf{r}) \quad (1.1-8)$$

若将电场及磁场分为两个部分, 一部分为电荷及电流产生的, 以 $\mathbf{E}^e$ 及 $\mathbf{H}^e$ 表示; 另一部分为磁荷及磁流产生的, 以 $\mathbf{E}^m$ 及 $\mathbf{H}^m$ 表示, 则

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^m \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}^e + \mathbf{H}^m \end{aligned} \right\} \quad (1.1-9)$$

于是, 电荷及电流产生的电磁场方程和磁荷及磁流产生的电磁场方程分别为

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}^e(\mathbf{r}) &= \mathbf{J}(\mathbf{r}) + j\omega\epsilon\mathbf{E}^e(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{E}^e(\mathbf{r}) &= -j\omega\mu\mathbf{H}^e(\mathbf{r}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}^e(\mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D}^e(\mathbf{r}) &= \rho(\mathbf{r}) \end{aligned} \right. \quad (1.1-10)$$

及

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}^m(\mathbf{r}) &= j\omega\epsilon\mathbf{E}^m(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{E}^m(\mathbf{r}) &= -\mathbf{J}^m(\mathbf{r}) - j\omega\mu\mathbf{H}^m(\mathbf{r}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}^m(\mathbf{r}) &= \rho^m(\mathbf{r}) \\ \nabla \cdot \mathbf{D}^m(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (1.1-11)$$

方程(1.1-10)称为电性源的麦克斯韦方程, 而方程(1.1-11)称为磁性源的麦克斯韦方程。比较上述两组方程可见, 它们之间存在下列对应关系:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{H}^e &\sim -\mathbf{E}^m \\ \mathbf{E}^e &\sim \mathbf{H}^m \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} \epsilon &\sim \mu \\ \mu &\sim \epsilon \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{J} &\sim \mathbf{J}^m \\ \rho &\sim \rho^m \end{aligned} \right. \quad (1.1-12)$$

这种对应关系通常称为对偶原理或二重性原理。利用这种对应关系, 可以直接由电荷及电流产生的电磁场导出分布特性相同的磁荷及磁流产生的电磁场, 仅需置换各个对应参数, 不用重新计算。

在均匀各向同性线性媒质中, 当电性源 $\mathbf{J}$, ρ 和磁性源 $\mathbf{J}^m$, ρ^m 同时存在时, 那么, 由电荷及电流、磁荷及磁流共同产生的简谐电磁场所满足的方程为

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \mathbf{J}(\mathbf{r}) + j\omega\epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\mathbf{J}^m(\mathbf{r}) - j\omega\mu\mathbf{H}(\mathbf{r}) \\ \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \rho^m(\mathbf{r}) \\ \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \rho(\mathbf{r}) \end{aligned} \right. \quad (1.1-13)$$

方程(1.1-13)称为广义麦克斯韦方程。

1.2 边界条件及阻抗边界条件

1.2.1 电磁场量的边界条件

电磁场在各种媒质边界面上的边界条件可归纳如下:

1. 一般媒质边界面上电磁场的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) &= \mathbf{J}_s \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) &= \rho_s \\ \nabla_s \cdot \mathbf{J}_s + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) &= -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1.2-1)$$

式中, $\nabla_s \cdot \mathbf{J}_s$ 为 $\mathbf{J}_s$ 的二维散度, $\nabla_s \cdot \mathbf{J}_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_l \mathbf{l}_i \cdot \mathbf{J}_i dl}{\Delta S}$, 其中 $\mathbf{l}_i$ 为与 l 线垂直的单位矢量, $\mathbf{n}$ 为由媒质 2 指向媒质 1 的界面法向单位矢量。见图 1-1 所示。

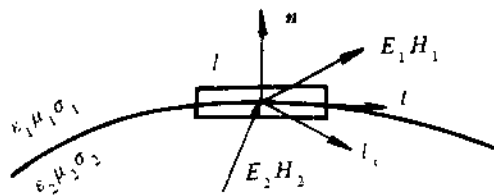


图 1-1 媒质边界

2. 在媒质 1 为导电媒质而媒质 2 为理想导体的分界面上, 有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_2 = \mathbf{H}_2 = \mathbf{D}_2 = \mathbf{B}_2 &= 0 \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 &= \mathbf{J}_s \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1 &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 &= \rho_s \\ \nabla_s \cdot \mathbf{J}_s + \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_1 &= -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1.2-2)$$

3. 在两媒质均不是理想导体的分界面上, 由于 $\mathbf{J}_s = 0$, 则边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) &= 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) &= \rho_s \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) &= -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1.2-3)$$

4. 在两种理想介质的分界面上, 由于 $\mathbf{J}_s = 0$, $\rho_s = 0$, 则边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) &= 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2-4)$$

5. 对于广义麦克斯韦方程 其场在一般媒质分界面上的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) &= \mathbf{J}_s \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= -\mathbf{J}_s^m \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) &= \rho_s^m \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) &= \rho_s \end{aligned} \right\} \quad (1.2-5)$$

6. 前面给出的边界条件式(1.2-1)至(1.2-5)均对静止界面而言, 当分界面相对观察者以速度 $\mathbf{v}$ 匀速运动时, 场在运动界面上的边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) &= \mathbf{J}_s \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) &= \rho_s \end{aligned} \right\} \quad (1.2-6)$$

若界面为静止的, $\mathbf{v} = 0$, 或者当 $\mathbf{v} \perp \mathbf{n}$ 时, 式(1.2-6)还原为静止边界条件。

1.2.2 里昂托维奇边界条件

设有一均匀平面波, 由媒质 1 入射到媒质 2, 两媒质界面为平面边界, $\mathbf{n}$ 为其法向单位矢量, 见图 1-2 所示, 设 $\mathbf{k}_i$ 、 $\mathbf{k}_r$ 和 $\mathbf{k}_t$ 分别为入射波, 反射波和透射波的波矢量。对于平面波, 有如下场方程:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \mu \omega \mathbf{H} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} &= -\tilde{\epsilon} \omega \mathbf{E} \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2-7)$$

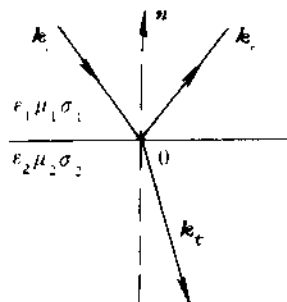


图 1-2 平面波对平面界面的入射

式中

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega}$$

当入射波垂直入射时, 界面法向矢量的方向与入射波矢量 $\mathbf{k}_i$ 及透射波矢量 $\mathbf{k}_t$ 的方向相反, 所以由方程(1.2-7)可写出在媒质 2 中的透射波场有如下关系。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= -\frac{1}{\omega \tilde{\epsilon}_2} \mathbf{k}_i \times \mathbf{H}_2 \\ &= \frac{k_i}{\omega \tilde{\epsilon}_2} \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 \\ &= Z_2 \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 \end{aligned} \quad (1.2-8)$$

式中

$$Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\tilde{\epsilon}_2}} \quad \tilde{\epsilon}_2 = \epsilon_2 - j \frac{\sigma_2}{\omega}$$

将式(1.2-8)代入边界条件

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 \quad (1.2-9)$$

中, 得

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \tilde{Z}_2 \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2) \quad (1.2-10)$$

当媒质不为理想导体时, 有

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 \quad (1.2-11)$$

则公式(1.2-10)可写为

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \tilde{Z}_2 \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1) \quad (1.2-12a)$$

同理可得

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = -\left(\frac{1}{\tilde{Z}_2}\right) \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1) \quad (1.2-12b)$$

公式(1.2-12)称为里昂托维奇(Leontovich)边界条件, 不难看出, 该边界条件把一种媒质中场的切向量与边界另一侧媒质中的波阻抗建立了联系。

由公式(1.2-12)可以写出其直角坐标和圆柱坐标的分量式, 在直角坐标系中, 若界面法向方向与 y 轴方向一致时, 即 $\mathbf{n} = \mathbf{e}_y$, 则有

$$\left. \begin{aligned} E_1 - (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{e}_y &= \tilde{Z}_2 \mathbf{e}_y \times \mathbf{H}_1 \\ H_1 - (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{H}_1) \mathbf{e}_y &= -\tilde{Y}_2 \mathbf{e}_y \times \mathbf{E}_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.2-13)$$

或合并写为

$$(\mathbf{I} - \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y) \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{H}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{Z}_2 \\ -\tilde{Y}_2 \end{Bmatrix} \mathbf{e}_y \times \begin{Bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{E}_1 \end{Bmatrix} \quad (1.2-14)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \\ \tilde{Y} &= \frac{1}{\tilde{Z}_2} \end{aligned}$$

公式(1.2-12a)标量分量式可写为

$$\left. \begin{aligned} E_{1x} &= \tilde{Z}_2 H_{1z} \\ E_{1z} &= -\tilde{Z}_2 H_{1x} \end{aligned} \right\} \quad (1.2-15)$$

在圆柱坐标系中, 若 $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\phi$, 则有

$$\left. \begin{aligned} E_1 - (\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{e}_\phi &= \tilde{Z}_2 \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{H}_1 \\ H_1 - (\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{H}_1) \mathbf{e}_\phi &= -\tilde{Y}_2 \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{E}_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.2-16)$$

或合并写为

$$(\mathbf{I} - \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\phi) \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{H}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{Z}_2 \\ -\tilde{Y}_2 \end{Bmatrix} \mathbf{e}_\phi \times \begin{Bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{E}_1 \end{Bmatrix} \quad (1.2-17)$$

式中

$$\mathbf{I} = \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z$$

公式(1.2-12a)标量分量成为

$$\left. \begin{aligned} E_{1z} &= -Z_2 H_{1\rho} \\ E_{1\rho} &= Z_2 H_{1z} \end{aligned} \right\} \quad (1.2-18)$$

对于垂直入射的均匀平面波而言, 式(1.2-12)是严格正确的。如果媒质2为良导体, 媒质1为理想介质或空气, 则无论入射波的入射角为何值, 折射角均接近于零, 此时里昂托维奇边界条件(1.2-12)仍可近似应用。一般要求媒质2的复折射率的绝对值大于10, 即 $|\bar{n}| \geq 10$ 。如果曲面不是平面, 要求曲率半径 a 远大于穿透深度, 一般取曲率半径满足公式 $\text{Im}(\bar{n}) \geq 2.3 / ka$ 。

1.2.3 阻抗边界条件

阻抗边界条件是在具有阻抗面的散射目标表面上存在的一种电场与磁场所满足的关系式。里昂托维奇边界条件就是阻抗边界条件的一种, 所以又称为里昂托维奇阻抗边界条件。用里昂托维奇阻抗边界条件代替电磁场中一般边界条件, 可以大大简化许多非理想导体目标的电磁散射分析, 它在阻抗面的电磁散射中以及可穿透目标和涂层目标的电磁散射等许多领域都获得了广泛应用。但是, 里昂托维奇阻抗边界条件是近似边界条件, 它有一定的有效范围, 这就限制了里昂托维奇阻抗边界条件的应用。只要将推导里昂托维奇边界条件垂直入射的情况推广到具有任意入射角的一般斜入射的情况, 就可得到适用范围更广的阻抗边界条件。

由公式(1.2-7), 可将透射波的电场写为

$$E_2 = -\frac{k_i}{\varepsilon_2 \omega} \hat{k}_i \times H_2 = -Z_2 \hat{k}_i \times H_2 \quad (1.2-19)$$

其中 $\hat{k}_i$ 为透射波矢量 k_i 方向的单位矢量。

$$Z_2 = \frac{k_i}{\omega \varepsilon_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$$

在两媒质界面上, 当 J_s 与 ρ_s 为零时, 电磁场满足下列一般边界条件

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0 \quad (1.2-20a)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (1.2-20b)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (1.2-20c)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 0 \quad (1.2-20d)$$

将公式(1.2-19)代入式(1.2-20b)中得

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = -Z_2 \mathbf{n} \times (\hat{k}_i \times H_2) \quad (1.2-21)$$

利用矢量公式

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

上式可写为

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = -Z_2 [\hat{k}_i (\mathbf{n} \cdot H_2) - H_2 (\mathbf{n} \cdot \hat{k}_i)] \quad (1.2-22)$$

用 $\mathbf{n}$ 同时左叉乘上式两边, 得

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1) = -\hat{Z}_2 [\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{k}}_i (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_2) - \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i)] \quad (1.2-23)$$

由边界条件(1.2-20), 可导出

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_1, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 \quad (1.2-24)$$

将(1.2-24)式代入式(1.2-23)中可得

$$\mathbf{E}_1 - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1) = \hat{Z}_2 \left[\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{k}}_i \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_1 \right) - \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i) \right] \quad (1.2-25a)$$

同理可导出

$$\mathbf{H}_1 - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_1) = -\hat{Y}_2 \left[\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{k}}_i \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1 \right) - \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i) \right] \quad (1.2-25b)$$

式中 $\hat{Y}_2 = \frac{1}{\hat{Z}_2}$, 公式(1.2-25)为严格阻抗边界条件, 它比里昂托维奇边界条件复杂得多,

当均匀平面波垂直入射时, 即 $\hat{\mathbf{k}}_i = -\mathbf{n}$ 时, 公式(1.2-25)就化成公式(1.2-12)。

在直角坐标系中, 取 $\mathbf{n} = \mathbf{e}_y$, 设

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{e}_x E_{1x} + \mathbf{e}_y E_{1y} + \mathbf{e}_z E_{1z} \\ \mathbf{H}_1 &= \mathbf{e}_x H_{1x} + \mathbf{e}_y H_{1y} + \mathbf{e}_z H_{1z} \end{aligned} \right\} \quad (1.2-26)$$

$$\hat{\mathbf{k}}_i = \mathbf{e}_x k_{ix} + \mathbf{e}_y k_{iy} + \mathbf{e}_z k_{iz}, \quad |k_{ix}|^2 + |k_{iy}|^2 + |k_{iz}|^2 = 1 \quad (1.2-27)$$

将式(1.2-26)代入式(1.2-25a)中, 得

$$\mathbf{e}_x E_{1x} + \mathbf{e}_z E_{1z} = \mathbf{e}_x \hat{Z}_2 (k_{iz} H_{1y} \frac{\mu_1}{\mu_2} - k_{iy} H_{1z}) - \mathbf{e}_z \hat{Z}_2 (k_{ix} H_{1y} \frac{\mu_1}{\mu_2} - k_{iy} H_{1x}) \quad (1.2-28)$$

$$\left. \begin{aligned} E_{1x} &= \hat{Z}_2 (k_{iz} H_{1y} \frac{\mu_1}{\mu_2} - k_{iy} H_{1z}) \\ E_{1z} &= -\hat{Z}_2 (k_{ix} H_{1y} \frac{\mu_1}{\mu_2} - k_{iy} H_{1x}) \end{aligned} \right\} \quad (1.2-29)$$

同理可导出式(1.2-29)的另一种等价形式

$$\left. \begin{aligned} H_{1x} &= -\hat{Y}_2 (k_{iz} E_{1y} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - k_{iy} E_{1z}) \\ H_{1z} &= \hat{Y}_2 (k_{ix} E_{1y} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - k_{iy} E_{1x}) \end{aligned} \right\} \quad (1.2-30)$$

在圆柱坐标系中, 采用类似直角坐标系中的方法, 可导出阻抗边界条件为

$$\left. \begin{aligned} E_{1\rho} &= Z_2 \left(k_{tz} \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{1\varphi} - k_{t\varphi} H_{1z} \right) \\ E_{1z} &= Z_2 \left(k_{t\rho} \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{1\varphi} - k_{t\varphi} H_{1\rho} \right) \\ H_{1\rho} &= -Y_2 \left(k_{tz} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1\varphi} - k_{t\varphi} E_{1z} \right) \\ H_{1z} &= Y_2 \left(k_{t\rho} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1\varphi} - k_{t\varphi} E_{1\rho} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.2-31)$$

其中 $k_{t\rho}$, $k_{t\varphi}$, k_{tz} 为单位矢量 $\hat{k}_t = \hat{e}_\rho k_{t\rho} + \hat{e}_\varphi k_{t\varphi} + \hat{e}_z k_{tz}$ 的分量。

1.3 电磁场量的波动方程

由麦克斯韦方程可以导出物理量的波动方程，它定量地描述了电磁场量的时空变化规律及与场源的依从关系。每个方程中只有一个未知场量，该方程不仅说明了电磁场的波动性，而且通过该方程可定量的计算出电磁场的空间分布。电磁场解析法就是研究这些方程边值问题的解析求解。

1.3.1 无耗媒质中的波动方程

在无耗($\sigma=0$)的各向同性线性媒质中，如果媒质是均匀的(ε, μ 与位置无关)，且只存在电性源 J, ρ ，由麦克斯韦方程(1.1-2)可导出波动方程为

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= \nabla \times \mathbf{J} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1.3-1)$$

利用矢量恒等式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \quad (1.3-2)$$

方程(1.3-1)可写为

$$\left. \begin{aligned} \left(\nabla^2 - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{H} &= -\nabla \times \mathbf{J} \\ \left(\nabla^2 - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} &= \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.3-3)$$

对于简谐电磁场，时间因子取 $e^{j\omega t}$ 时上述方程可化为

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} - k^2 \mathbf{H} &= \nabla \times \mathbf{J} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} &= -j\omega\mu \mathbf{J} \end{aligned} \right\} \quad (1.3-4)$$

和