

高等学校教学用书

金属的力学性质

冶金工业出版社

TG111
53

高等学校教学用书

金属的力学性质

北京钢铁学院 何肇基 主编

冶金工业出版社

A941468

高等学校教学用书

金属的力学性质

北京钢铁学院 何肇基 主编

*

冶金工业出版社出版

(北京灯市口74号)

新华书店北京发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092 1/16 印张 17 1/2 字数414千字

1982年11月第一版 1982年11月第一次印刷

印数00,001~8,000册

统一书号: 15062·3908 定价1.80元

前 言

本书是根据冶金工业部1977年教材工作会议上制订的教学计划及“金属力学性质”课程的教学大纲编写的。它主要是阐明金属材料在力或力与其他外界条件联合作用下所表现出的行为及性态的变化。

本书的重点是放在金属力学性质的物理概念和规律性方面。考虑到部分读者未曾学习过弹性力学，因此在本书第一章扼要介绍一些有关应力和应变状态的概念，这些概念不见得是本书需要直接引用的内容，但对于从事力学冶金工作的读者，掌握这些知识是有必要的。第二章到第六章是讨论金属材料在单纯的力或能的作用下所产生的变化，第七章到第九章则是叙述环境条件与力（能）联合作用下金属材料的力学性质。本书最后两章比较详细地叙述了金属的强度、强化和断裂行为的基本原理，侧重于从冶金和断裂机制来分析问题。

本书是由武汉钢铁学院及北京钢铁学院合作编写的，各章具体执笔的同志是：第一、二、三、七、八、九、十章——何肇基，第四、五章——彭心平、曹念孙，第六章——李承基，第十一章——宋沂生。宋沂生同志指导本书的编写并做最后的审定，何肇基同志担任全书的总成。武汉钢铁学院、昆明工学院及北京钢铁学院等单位的同志参加本书的讨论及审查，北京钢铁学院金相教研室全体老师对本书的编写工作给予了大力协助，作者对此表示衷心的感谢。书中有个别图和段落是借用兄弟院校教材的，未来得及征得同意，请原谅。

阅读本书的学生应先具备一定的金属学和工程力学方面的基本知识。我们力图做到把金属的宏观机械性能和微观的金属组织结构有机地联系起来，我们还尽可能的把力学冶金学科中比较成熟的新成就介绍给同学。但是参加编写工作的全体同志并不具备力学冶金方面的专门知识，我们仅仅是把这次编写工作看成是一次认真学习的好机会，仓促成书，缺点及错误在所难免，谨望读者不吝指正。

编 者

1981年12月

目 录

序	1
第一章 应力状态和应变状态	3
第一节 应力状态的概念	3
第二节 平面应力状态	4
第三节 空间应力状态	7
第四节 应力状态的不变量和应力偏量	8
第五节 一点的应变状态	10
第六节 应变状态的坐标转换和分解	11
第七节 应力状态的 Mohr 圆	13
第二章 金属的弹性	16
第一节 广义虎克定律	16
第二节 金属弹性的物理本质	21
第三节 金属的弹性模量	23
第四节 金属的滞弹性行为	26
第五节 滞弹性产生的物理原因	30
第三章 金属在静负荷作用下的性能	33
第一节 拉伸试验	33
第二节 强度理论	42
第三节 应力集中	48
第四节 其他静载试验方法	53
第四章 金属的冲击韧性	56
第一节 在冲击负荷作用下金属变形和断裂的特点	56
第二节 一次冲击试验	57
第三节 多次重复冲击试验	65
第五章 金属的断裂韧性	68
第一节 引言	68
第二节 断裂韧性的基本原理	70
第三节 平面应变断裂韧性的测试	78
第四节 J 积分及其测试原理	85
第五节 COD 基本原理和测试方法	92
第六节 提高金属材料断裂韧性的途径	95
第六章 金属的机械疲劳	102
第一节 金属疲劳的经验规律	102
第二节 疲劳裂纹的萌生、扩展及断裂	106
第三节 影响疲劳寿命的主要因素	114

第七章 金属的高温强度	128
第一节 前言	128
第二节 高温力学性能试验方法	129
第三节 金属的蠕变	131
第四节 金属的高温强度	137
第八章 金属的应力腐蚀	141
第一节 概述	141
第二节 阳极反应敏感型应力腐蚀	144
第三节 氢脆型应力腐蚀	149
第四节 应力腐蚀试验	157
第九章 辐照对金属结构材料性能的影响	159
第一节 基本概念	159
第二节 辐照损伤	164
第十章 金属的强度与强化	171
第一节 纯金属单晶体的强度	171
第二节 晶界强化	175
第三节 固溶强化	183
第四节 分散强化	193
第五节 应变强化	199
第六节 马氏体强化	207
第七节 晶须的强度	211
第八节 非晶态金属的强度	214
第九节 纤维增强复合材料的抗变形能力	218
第十一章 金属的断裂	225
第一节 引言	225
第二节 断裂类型	226
第三节 理论断裂强度	226
第四节 Griffith的裂口理论	228
第五节 脆性裂纹的失稳扩展	233
第六节 脆性固体中缺陷的统计分布	236
第七节 裂纹在承受应力情况下的位错模拟	237
第八节 Bilby-Cottrell-Swinden(BCS)模型	241
第九节 Griffith 方程与拉伸断裂	245
第十节 断口形貌与断裂机理	248
第十一节 本质脆性和塑性	259
第十二节 塑性-脆性转化	262
第十三节 裂纹形核	265
第十四节 塑性-脆性转化理论	267

序

近二十年来, 由于工程技术及自然科学发展的需要, 在冶金学的领域中出现了一个新的学科分枝——力学冶金, 它是研究在力或力和其他外界因素联合作用下, 金属的行为和性态及其变化的一门科学。

力学冶金包含着相当广泛的研究内容, 它既需要研究金属在力的作用下表现出的种种规律性, 以指导金属的变形和加工的具体实践, 同时, 它还要研究金属材料在各种机械性能试验过程中所发生的行为, 说明由此而获得的机械性能指标的物理意义, 并对其实用范围进行鉴定; 更重要的是它必须把金属表现的力学行为和冶金学联系起来, 探讨有关变形和断裂的微观机理, 用以解释各种变形、强化、断裂的宏观现象, 研究冶金因素对这些过程的影响及其实质, 最后在金属的内在状态和外界条件与力学行为之间建立起有机的联系。通过对这些规律性和物理本质的探讨, 给金属材料的加工、使用和研制以理论指导。也就是说, 在掌握这门学科原理的基础上, 掌握各种金属材料能够承受而不致失效的临界受载范围, 了解在不同的应力状态下使用时选择金属材料的基本原则, 为如何以最低的能耗、最大的效率来进行金属加工提供理论根据; 对新的合金材料的设计、冶金质量的改善从力学性能的角度提出合理的建议, 等等。因此, 这是一门与生产实际结合很密切的科学。同时, 由于内容相当广泛, 它需要从其他有关的学科中吸取大量成熟的理论和实验规律来充实。这门学科和力学、金属学与金属物理、金属材料学等学科的联系是相当紧密的。

这门学科是从下面几个观点出发来开展研究的:

1. 宏观强度理论——把研究的对象假定为连续的、均质的、在多数情形下是各向同性的介质, 从物体的宏观应力和应变关系出发, 以有限的材料常数为基础, 建立起物体受载后的数学方程, 最终导出材料强度和变形的数学关系。属于这个领域内容的包括连续介质的弹性理论、塑性理论等。

2. 微观强度理论——以金属是由原子通过金属键结合而成的晶体这样的前提出发, 利用晶体结构理论、晶体缺陷理论等来解释材料的力学性质, 确定机械行为与材料内部组织之间的相互关系, 对改善金属的力学性质提出方向性的意见。这种理论是在金属学和金属物理的研究成果上进一步发展起来的。

3. 断裂力学理论——是最近二十年间迅速兴起的一门新兴学科, 它是宏观强度理论向微观区域延伸的一个新分支, 主要研究材料的破断行为。它和前者的区别是引入了物体内部存在不连续性的假定, 研究对象的体积可缩小到亚微观区域, 但是研究的方法基本上仍属于宏观力学的范畴, 不过已有借助于微观强度理论进行分析的尝试。

宏观和微观强度理论无论是在研究的前提上还是在研究的方法上都有很大的差别, 它们要解决的任务也并不相同, 力学冶金的任务之一就是要把它们各自研究的成果统一成有机的、完整的科学规律, 建成独立的学科体系。这是一个很困难并且远未完成的任务, 我们现在还只能根据不同的需要分别选择合适的理论来解决不同的实际问题。一般说来, 物

体中仍然保持连续介质特性的物理点的最大线尺寸为 $10\sim 100\text{nm}$ ，而其性能可以用宏观试验结果来表示的物理点的最小尺寸是 $0.1\sim 1\text{mm}$ ，宏观强度理论研究的是大体积范围内（cm级以上）材料表现的性能，其中最主要的是弹性和塑性，断裂力学可以深入到 10^{-2}mm 的亚微观区域用以讨论裂纹扩张的特性，但是在研究与金属的组织、结构有关的力学性质方面，诸如解释滑移、屈服、强化、断裂等现象的本质时，我们就不能再把对象考虑成均匀的介质，而必须通过晶体结构理论、位错理论、相变理论等，从流变与断裂的原子运动过程来说明材料的性态和冶金因素的作用。

和金属的其他物理性能一样，在力学性质中，有一些是受组织的变化影响不大的，这些性质是由组成物体的各物理点共同变化而引起的，称为组织不敏感的性质。例如在弹性变形中，物体的变形实际上取决于所有微小体积的共同变形，而与组织关系不大。另外一类是对组织敏感的性质，这些性质往往取决于所有物理点中最弱的部分。比如说，在疲劳断裂时，裂纹总是在材料内部最薄弱的部位首先形核，同样也是沿着最薄弱的组织向前扩展的，所以疲劳强度就有很大的组织敏感性。外界条件和内在状态的变化对这类性质的影响相当显著，在工程中广为应用的机械性能指标中，大部分是属于组织敏感的，因此对这类性质的研究也倍受注意。显然，用宏观强度理论来研究这些组织敏感性的性质是不会有效果的，因为这种理论研究的对象是连续、均匀的介质，它没有考虑材料内部细节的变化和从而引起性质的波动，这样就难于对各种冶金因素影响的效果作深入的分析了。因此，在力学冶金中更侧重于使用微观强度理论来讨论和研究问题。

在一定的意义上说，力学冶金仍然是一门实验科学，它的进步和成熟同金属学、金属物理、力学等学科实验的进步是分不开的。比如说，电子显微镜就是很重要的实验工具，它的发展为金属的变形和断裂行为的直观研究提供了极大的方便，对建立金属的组织状态和力学性质的关系给予很有力的支持，并为金属的位错理论提供了多方面的实验证明。今后，力学冶金这门学科仍然期待着取得显微技术、射线技术、物理性能测试技术和力学性能试验技术的新成就来丰富其内容、验证其理论、发展和充实自己。

力学冶金领域的内容是不能以一本基础教材全部囊括的，即令我们把内容限制在基本的力学冶金原理方面，仍然有大量的内容不得不割舍，例如磨损、腐蚀疲劳等就没有列入，而且有些内容的叙述不得不采取比较简单和粗糙的方式，对力学性质规律性的分析多数只停留在定性的阐述上，很少进行定量的推导，有关力学性能的试验在这本书里只作起码的介绍，不讨论具体的方法和技术要求，这一切均需读者从适当的参考书籍中自行查阅。

第一章 应力状态和应变状态

第一节 应力状态的概念

作用在物体上的力可以分为两种类型：体力和面力。

体力分布在物体的整个体积内，如重力、磁力、离心力等都属于体力。一般情形下，体力在物体各个部分的大小和方向都是不相同的。为了把它的分布情况描述下来，就要建立物体中某一点所受到的力的概念。连续介质体内，在某点的周围取一个微小的体积 ΔV ，若作用在这个微体积上的体力为 ΔP ，当 ΔV 趋于无穷小并逼近 P 点时， $\Delta P/\Delta V$ 之极限就称为该物体在该点所受到的体力。

$$F = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta V}$$

F 是矢量，因次为力·长度⁻³①。

如果力仅作用在物体的表面（截面）上，这种力叫作面力。大气压力或者一个物体对另一个物体的作用力等都属面力的范畴。依类似的方法，可以把作用于物体某个面上一点的面力 σ 用下式定义：

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta S}$$

ΔR 是作用在过该点的小面积 ΔS 上的面力。 σ 也是矢量，因次为力·长度⁻²。

应力是面力的一种，当物体中的内力是沿截面均匀分布的时候，应力被定义为单位截面面积上的内力，如果应力的分布不均匀，就要按上面的式子来确定截面上某一点的应力矢量。但是应力不仅仅是有方向和大小，量，它还与所在的截面的位向有关，通过同一点的不同截面上应力矢量并不是相同的。只有首先把截面的位向确定后，我们才能用一个矢量来表示其上任何一点的应力。所谓一点的应力状态，指的是能够描述过该点的任何截面上的应力状态的一组应力，这显然不是只用一个应力矢量就能够规定下来的，下面讨论它的表示方法。

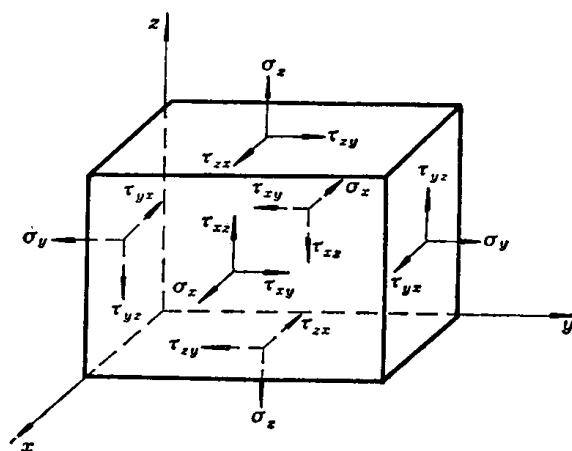


图 1-1 作用在单元六面体上的应力分量

在受力的物体内部取一个微小的六面体，沿着它的三条棱边建立直角坐标系(图1-1)，

① 这里只考虑在力的作用下仍然处在平衡状态的物体，不讨论发生平移或转动的情况，因此对产生力矩等情形不去分析。

在这个单元体的每个面上都作用有一个应力矢量，如果单元体的体积足够小，就可以认为这个六面体上的应力是均匀分布的。同时，因为物体各点的内力是平衡的，因此每一个面上的应力与其相对的面上的应力是等值反向的。把这些应力矢量分别称为 P_x 、 P_y 、 P_z （ P_x 指作用在以 x 为法线方向的面上的应力，余同），其中每一个应力又能分解成一个法向力和两个切向力。

$$[P] = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1-1)$$

这些面和应力分量的正负号规定方法是：截面上的外法线方向循着坐标轴的正向者，该面为正面；外法线方向沿坐标的负向者，该面为负面。在正面上的应力，以坐标的正方向为正；在负面的应力则以坐标的负方向为正。例如图1-1上的六面体中，垂直 y 方向的右边的面是正面，因此图上表示的 σ_y 是正向， τ_{yx} 和 τ_{yz} 也是正的。而这六面体的底面是负面，在这个面上标志出的应力 σ_z 、 τ_{zx} 、 τ_{zy} 都沿着坐标的负方向，故这三个应力也是正的。所以，按这种规定，图1-1上所有的应力分量都是以正方向标志的。

在上述的六个切应力分量中，根据单元体的力矩平衡的条件，可以证明在互相垂直的两个面上，垂直于公共棱边的切应力是互等的。

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

于是就剩下六个独立的应力分量了

$$\begin{matrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z \\ \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{matrix}$$

这就是在直角坐标系统中用以描述任一点应力状态的应力组。一点的应力状态只需用这三个正应力分量和三个切应力分量来表示，当我们已知这一组应力后，将能求出经过该点的任何截面上的正应力和切应力。做到这点是很必要的，例如在弹性和塑性状态的分析中，

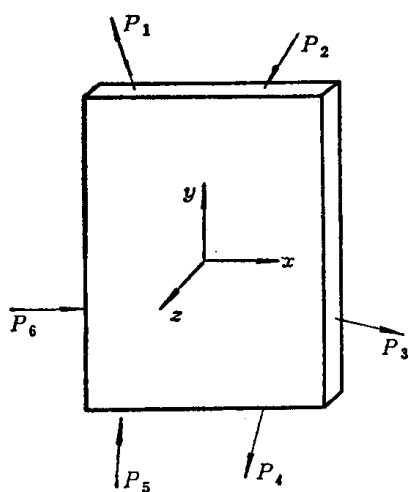


图 1-2 平面应力状态

我们往往希望求得某一点的最大正应力或最大切应力，而不是仅仅满足于用规定的坐标系来表示一点的应力状态，因为正应力和切应力常和材料的强度或物体的变形有直接的联系。为此，先从比较简单的平面应力状态谈起。

第二节 平面应力状态

设有一块等厚薄板， z 方向的厚度远小于其他两个方向的厚度，它所受的载荷全部都与板面平行（图1-2），这时可以认为板只处于两向受力的状态，在 z 面上没有应力的作用。

$$\sigma_z = 0 \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

因此，应力系统将由正应力 σ_x 、 σ_y 及切应力 τ_{xy} 所组成。在这种情形下，物体所处的受力状态就称为平面应力状态。

若这薄板上某一点在 x 、 y 方向的应力分量如图1-3(a)所示，如果要求通过该点的任

何一个(与 xy 面相垂直的)截面上的应力分量时, 考虑一个如图1-3(b)那样的单元体, 它和原有单元体的对应面有大小为 θ 的交角。我们将把在 xy 轴上已知的 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 转换成以 x' 、 y' 为坐标轴的应力值。现讨论图1-3(a)中截面 PP' 上的应力 S 。如图1-3(c)所示, 设 PP' 在单元体中截出的面积为 A , 在这个面上的应力沿 x 、 y 方向的分量是 S_x 和 S_y , 沿 x' 、 y' 方向的应力是 $\sigma_{x'}$ (正应力) 和 $\tau_{x'y'}$ (切应力)。把各应力分量的投影关系列出来;

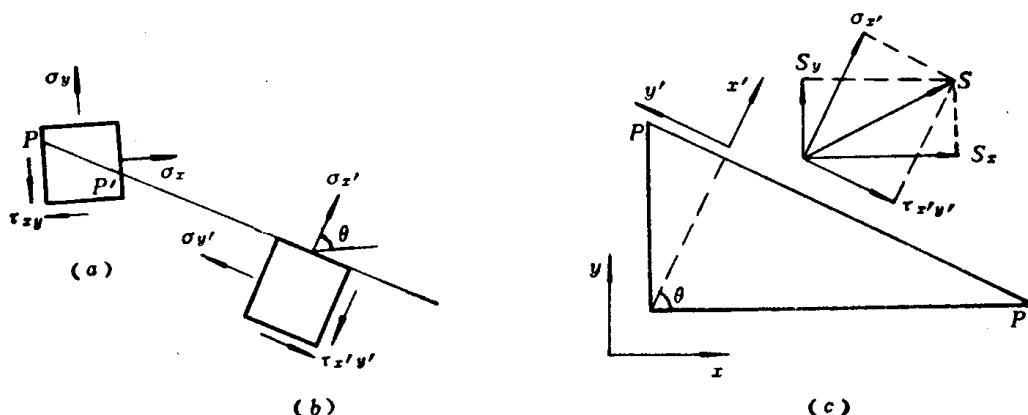


图 1-3 不同坐标系中应力分量的转换

$$\begin{aligned} S_x A &= \sigma_x A \cos \theta + \tau_{xy} A \sin \theta \\ S_y A &= \sigma_y A \sin \theta + \tau_{xy} A \cos \theta \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta \\ S_y &= \sigma_y \sin \theta + \tau_{xy} \cos \theta \end{aligned} \quad (1-2)$$

这两个应力沿斜面的法向 x' 的分量各为 $S_x \cos \theta$ 与 $S_y \sin \theta$ 。因此作用在斜面上的法向应力

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= S_x \cos \theta + S_y \sin \theta \\ &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (1-3a)$$

同理可以求得作用在斜面上的切应力

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} &= -S_x \sin \theta + S_y \cos \theta \\ &= \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (1-3b)$$

上面讨论的截面是以 x' 为法向的, 如果斜面以 y' 为法向, 则依同样的方法可以求出 $\sigma_{y'}$ 和 $\tau_{x'y'}$, 其中 $\tau_{x'y'}$ 和公式(1-3b)相同, 而 $\sigma_{y'}$ 为

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (1-3c)$$

公式(1-3)这一组方程是在不同的坐标系中一点的应力状态的转换方程。当某点在一个坐标轴上的应力分量为已知时, 就可以利用这组公式来确定夹角为 θ 的另一个坐标系上的应力分量, 这组公式也可以改写成

$$\sigma_{x'} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (1-4a)$$

$$\sigma_{y'} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (1-4b)$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (1-4c)$$

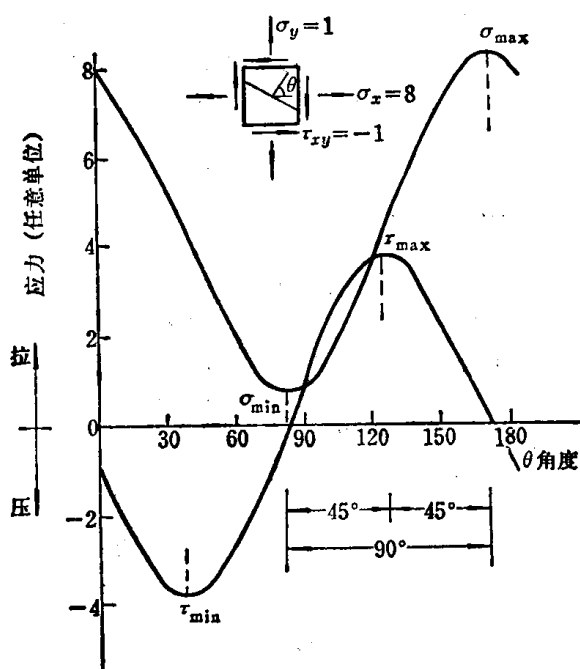


图 1-4 一点的应力随截面取向的变化 (平面问题)

图 1-4 是根据方程 (1-4) 画出的斜面上的正、切应力随 θ 角变化的一个例子, 它可以更直观地帮助我们了解以下的一些概念。

(1) 主平面, 主方向, 主应力: 切应力为零的截面称为主平面, 主平面的法向是主方向。主方向是很容易得来的, 只要令 $\tau_{x'y'} = 0$, 就能从式 (1-4c) 计算出

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (1-5)$$

θ 有两个根: $\theta_1, \theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$ 。这两个根确定了相互垂直的一对无切应力的平面。

主应力是主平面上的正应力, 用上式得到的 θ_1 或 θ_2 值代回 (1-4) 式中就能得到主应力值 σ_1 和 σ_2 , 可以证明这两个主应力是所有截面上的正应力中的最大值和最小值

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= \sigma_1 \\ \sigma_{\min} &= \sigma_2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \left[\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} \quad (1-6)$$

规定主应力 $\sigma_1 \geq \sigma_2$, 至于上式中哪个是 σ_1 , 哪个是 σ_2 , 一般需要等计算出结果后才能根据其代数值的大小来确定。

(2) 最大切应力: 切应力也是 θ 角的函数, 若使式 (1-4c) 对 θ 求导, 并令 $\frac{d}{d\theta} \tau_{x'y'} = 0$, 那么与求主应力的方法相同, 也能确定最大 (最小) 切应力出现平面的角度 θ_s 及其对应的应力值 $\tau_{\max}$ 、 $\tau_{\min}$ 。

$$\operatorname{tg} 2\theta_s = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} \quad (1-7)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{aligned} \right\} = \pm \left[\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} \quad (1-8)$$

将公式 (1-6) 中 σ_1 与 σ_2 相减, 并与公式 (1-8) 比较就能看出

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{aligned} \right\} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (1-9)$$

所以, 通过二维应力状态的分析, 我们可以得到一些概念:

(1) 公式 (1-3) 或 (1-4) 是描述在平面应力状态下通过物体中一点的任意平面上的正应力和切应力的方程。

(2) 截面上一点的正应力和切应力的大小都随截面的位向而改变, 是以 π 为周期的函数。

(3) 最大与最小的正应力均出现在切应力为零的平面上, 所以它就是主应力。两主平面互相垂直。

最大和最小切应力也在正交的两个面上产生, 大小相等方向相反。

(4) 最大切应力和最大正应力出现的平面有 45° 的交角。
这些结论可以推广到空间应力状态中。

第三节 空间应力状态

在一般的情形下, 受力物体中的任何一点处的受力情况应当用六个应力分量表示。为了求得过一点的任意平面上的应力转换方程时所用的分析方法与平面应力状态下是类似的, 只不过稍为复杂一些罢了。这里只介绍其中主要的结果, 不再详细推导。

在 P 点附近作一个微小的四面体(图1-5), 其中三个面与坐标面平行, 斜面的外法线方向余弦是 l 、 m 、 n 。若作用在斜面上的总应力 P 沿三轴的分量为 P_x 、 P_y 、 P_z 。则各应力分量间有如下关系:

斜面的应力分量为

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ P_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ P_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

斜面上的总应力为

$$P = (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2)^{1/2} \quad (1-11)$$

斜面上的正应力为

$$\begin{aligned} \sigma_n &= P_x l + P_y m + P_z n \\ &= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2(\tau_{xy} mn + \tau_{xz} nl + \tau_{yz} lm) \end{aligned} \quad (1-12)$$

斜面上的切应力为

$$\tau = (P^2 - \sigma_n^2)^{1/2}$$

如果这个斜面是主平面, 则 P 就是主应力, 我们用 σ 作为主应力的符号, 这时候 $P = \sigma_n = \sigma$, 而 $\tau = 0$ 。 σ 在各轴上的投影是

$$P_x = \sigma l \quad P_y = \sigma m \quad P_z = \sigma n$$

把这几个式子代入式(1-10)中就得

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n &= 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

另外根据方向余弦的关系

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (1-14)$$

利用这四个方程可以解出主应力 σ 及其对应的应力主轴的方向余弦 l 、 m 、 n 。在求解的时候应当看到由于方向余弦不能都为零, 因此齐次线性方程组(1-13)中的系数构成的行列式应等于零。

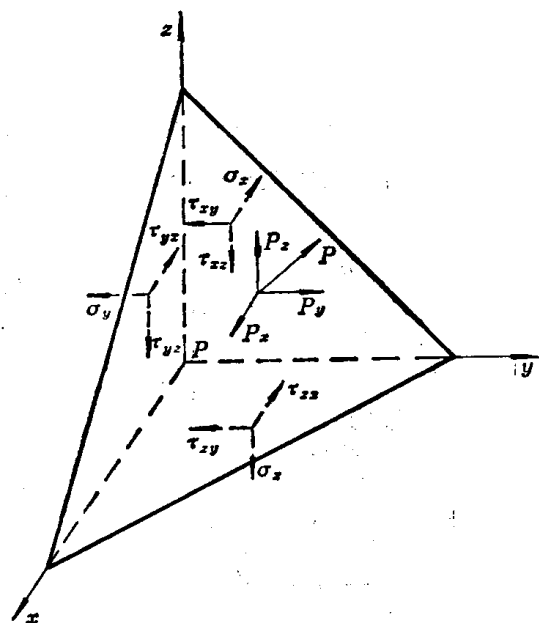


图 1-5 作用在单元四面体上的应力分量

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

分解后得到一个三次方程

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (1-15)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \\ I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz} \end{aligned} \right\} \quad (1-16)$$

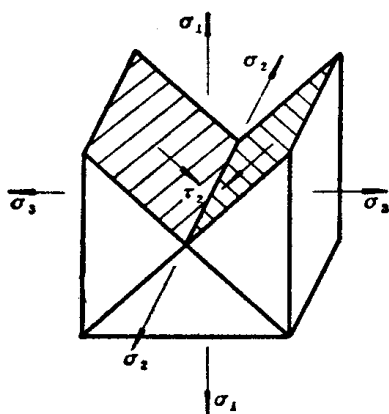


图 1-6 最大切应力出现的平面
 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

式 (1-15) 称为应力状态的特征方程，由它解出的三个根分别就是主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 ，而与之对应的 l 、 m 、 n 就是应力主轴的方向余弦。显然，三个主应力和它的方向一经给定，一点的应力状态就肯定下来了。

在空间应力状态中，平分各主平面夹角的截面上的切应力称为主切应力，它的大小

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) & \tau_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \\ \tau_3 &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \end{aligned} \quad (1-17)$$

如果主应力 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ，则 τ_2 就是绝对值最大的切应力，它作用在平分 σ_1 与 σ_3 的平面上，方向是垂直 σ_2 的 (图 1-6)。

第四节 应力状态的不变量和应力偏量

除了主应力、主切应力及对应的平面、方向之外，在一点的应力状态中还能提取出一些特殊的性质，这些性质在变形体的弹性与塑性分析时是经常要用到的。

注意公式 (1-15)，这个方程中的几个系数都是由一点的应力沿三个轴的分量组成的。尽管随着坐标系的改变，应力分量的数值会发生变化，然而这三个系数都是恒定的，原因是对于任何一点的应力状态，它的主应力和应力主轴是确定的，这和坐标系的选取或计算方法没有关系，这个三次方程的根自然也不受坐标系取向的影响，所以它的系数是应该不变的。于是，我们把这三组与坐标无关的应力分量的组合分别称为应力状态的第一、二、三不变量，它就是式 (1-16) 中的 I_1 、 I_2 和 I_3 。

不妨把应力分量列成一个行列式

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

那么，要记住这些不变量就不困难了。第三不变量就是这个行列式的数值，第一不变量则是它的主对角线几项相加，而第二不变量恰是主对角线各元素的子行列式之和

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

如果把坐标面转移到主平面中，就能直接求出这几个不变量的数值来。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

应力状态的不变量反映出一点应力状态的一些基本特点，在研究物体的变形性质时是有用处的。同样有价值的是一点的应力状态常被分解成两种应力状态的叠加，其中第一种应力使物体受到均匀的拉伸（压缩）力的作用，仅造成体积的变化而不改变它的形状，这种应力状态称为水压应力状态。第二种叫做偏斜应力状态。它使物体发生形状改变，但不影响其体积。设一点应力 $[P]$ 的九个分量如式（1-1）那样表示，水压应力状态 $[P_1]$ 就是

$$[P_1] = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} \quad (1-19)$$

于是偏斜应力 $[P_2]$ 就是总应力扣除掉水压应力后的结果

$$[P_2] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{bmatrix} \quad (1-20)$$

若总应力 $[P]$ 中的水压部分被全部提取了出来，在 $[P_2]$ 中的第一不变量就应当为零

$$I_1 = (\sigma_x - \sigma_0) + (\sigma_y - \sigma_0) + (\sigma_z - \sigma_0) = 0$$

$$\therefore \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (1-21)$$

σ_0 称作平均应力，因此 P 点的水压分量就是以 $\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ 为主应力的均匀受拉（压）

状态，整个 P 点的应力状态就分解成下式的样子。

$$[\text{总应力}] = [\text{水压分量}] + [\text{应力偏量}]$$

$$[P] = [P_1] + [P_2]$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{3} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \frac{2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z}{3} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \frac{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y}{3} \end{bmatrix} \quad (1-22)$$

第五节 一点的应变状态

应变是反映物体变形程度的物理量，对应变状态的分析有很多和应力状态的分析相似的地方。

为了描述物体内某一点的应变状态，最好先从位移函数谈起。假定在力的作用下物体内的一点从 $P(x, y, z)$ 移动到 $P'(x', y', z')$ ，这样改变可能是受力后物体形状变化的结果，也可能是物体移动了位置造成的（这里也不讨论刚体的平移和转动的情形）。不管怎样， $\overline{PP'}$ 就是表示 P 点位置变化的矢量。设它沿坐标轴分解的三个分量是 u 、 v 、 w ，一般说来，这些量是随 P 点的位置而变化的，是点坐标的函数，称作位移函数。

$$u = x' - x = U(x, y, z)$$

$$v = y' - y = V(x, y, z)$$

$$w = z' - z = W(x, y, z)$$

这三个位移分量以沿坐标轴的正向为正，负向为负。

现在再来讨论单元体变形的情形。以平面问题为例（图1-7），设单元体的两条棱边 OA 和 OB 变形后移动到 $O'A'$ 与 $O'B'$ ，这几个点的位移分量是：

$$O: u, v$$

$$A: u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

$$B: u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

在小变形的情形下， OA 线段在变形前后长度的相对变化为

$$\frac{O'A' - OA}{OA} = \frac{\left\{ dx + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - u \right\} - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

这就是正应变，正应变被定义为线段变形前后的相对伸缩。由上式可见，物体中一点沿坐标轴方向的正应变等于该方向的位移函数对距离的导数，以伸长为正，缩短为负。

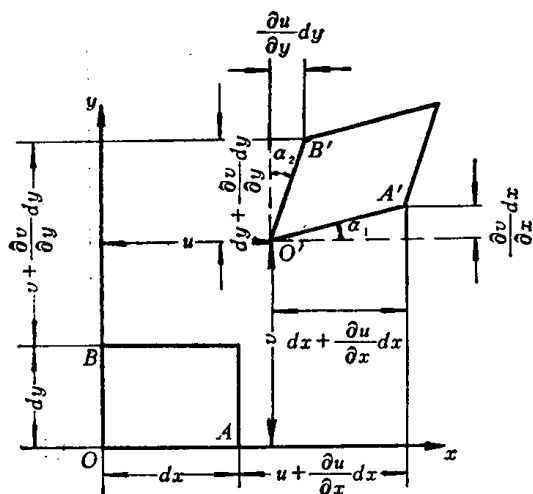


图 1-7 单元体的变形分析

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

但是物体的形状是以它的长度参量和角度参数共同决定的，正应变仅仅表示物体在长度方向上的变化，故此还必须要有表示角度参量相对变化的另一种指标，这就是角应变。角应变是指两个线段之间原有的直角的角度变化，以直角变小为正，变大为负。符号为 γ_{xy} ，它表示沿 x 和 y 两方向的线段直角夹角的改变。从图上可以看出，当 AOB 移到 $A'O'B'$ 后，其夹角的变化是

$$\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy}$$

在小变形时，分母中含有位移分量的导数一项相对于 $dx(dy)$ 来说是微小的，可以略去，则

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

按这种方法推广到三维的情形，就可以获得反映物体一点应变状态的九个分量（其中三对切应变是互等的）。

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (1-23)$$

它们都可以用位移函数来表示

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1-24)$$

所以，一点的应变状态同样是由六个参数确定的。

第六节 应变状态的坐标转换和分解

上面已经导出了应力状态的转换方程，应变状态的转换方程和前者只有一点点差别，

如果把公式 (1-12) 中的切应力 τ 换成切应变之半 $\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ ，各正应力 σ 的符号都改为正应变 ε ，于是一个倾斜平面上的正应变计算公式就得到了

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl + \gamma_{xy} lm \quad (1-25)$$

和应力状态相似，也存在三个互相垂直的方向，在其相应的面上没有切应变，这样的方向称为应变主轴，对应的面是主应变面，沿应变主轴方向的正应变是主应变 (ε_1 、 ε_2 、 ε_3)。对于各向同性体而言，主应变方向和主应力方向是重合的。以主应变方向为轴的单元体只受到纯粹的拉伸或压缩变形，变形后各个直角角度不改变。主应变是下面的三次方程的根

$$\varepsilon^3 - J_1 \varepsilon^2 + J_2 \varepsilon - J_3 = 0 \quad (1-26)$$