经济与金融高级教程

Advanced Textbooks in Economics and Finance

丛书主编 邹恒甫

Editor in Chief Heng-fu Zou

经济学拓扑方法

Topological Methods in Economics

王则柯 左再思 李志强 编著

WAN[illegible] Zaisi, LI Zhiqiang

北京大学出版社

Peking University Press

经济与金融高级教程
Advanced Textbooks in Economics and Finance
丛书主编 邹恒甫
Editor in Chief Heng-fu Zou

经济学拓扑方法

Topological Methods in Economics

王则柯 左再思 李志强 编著
WANG Zeke, ZUO Zaisi, LI Zhiqiang

北京大学出版社
Peking University Press

图书在版编目(CIP)数据

经济学拓扑方法/王则柯,左再思,李志强编著. - 北京:北京大学出版社,2002.1

ISBN 7-301-04945-5

Ⅰ. 经… Ⅱ. ①王… ②左… ③李… Ⅲ. 拓扑-应用-经济学-高等学校-教材 Ⅳ. F224

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 22718 号

书　　名: 经济学拓扑方法
著作责任者: 王则柯　左再思　李志强
责 任 编 辑: 梁鸿飞
标 准 书 号: ISBN 7-301-04945-5/F·415
出　版　者: 北京大学出版社
地　　址: 北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址: http://cbs.pku.edu.cn
电　　话: 出版部 62752015　发行部 62754140　编辑部 62753121
电 子 信 箱: zpup@pup.pku.edu.cn
排　版　者: 兴盛达打字服务社　62549189
印　刷　者: **北京大学印刷厂**
发　行　者: 北京大学出版社
经　销　者: 新华书店
787 毫米×1092 毫米　16 开本　21 印张　340 千字
2002 年 1 月第 1 版　2002 年 1 月第 1 次印刷
定　　价: 32.00 元

经济与金融高级教程
编者说明

为了让全国高等学校经济和金融专业高年级本科生、硕士生和博士生全面深入地学习当代经济理论和金融理论，我们特组编了两套丛书：《经济与金融高级教程》和《现代经济学前沿丛书》，它们分别由北京大学出版社和武汉大学出版社出版。

作为两套丛书的第一批出版物，《现代经济学前沿丛书》已出高级微观经济学、高级宏观经济学、计量经济学、金融经济学、高级金融理论、经济增长理论、国际贸易理论和国际金融理论等八种；而《经济与金融高级教程》则拟出经济学中的优化方法、经济学拓扑方法、动态经济学方法、产业组织理论、货币理论、财政理论、一般均衡理论、金融衍生工具、金融市场的计量方法、博弈论与信息经济学等九种。两套丛书的第二批出版物将包括发展经济学理论、劳动经济学理论、公司财务理论、资本市场理论、时间序列分析、政治经济学理论和金融数学专题等。同时，为了使中国经济学和金融学的研究与国际主流经济学接轨，我们组编了《经济与金融高级研究丛书》（北京大学出版社）和一份经济学和金融学英文学术杂志 *Annals of Economics and Finance*。高级研究丛书和杂志将刊布有一定原创性的学术研究专著和论文。

所有参与编写和出版这些教材、专著和杂志的同仁都付出了巨大的心血。我们期望广大青年同学通过我们的工作学到一些国际上第一流的经济学和金融学研究成果。同学们在学习我们编写的教材的同时，必须认真地攻读国际上在相关领域里第一流的原版教材和经典论文，并努力掌握微积分、线

性代数、概率统计和现代优化理论等应用数学工具。如有独到见解和发现,望用英文撰稿给我们主编的 *Annals of Economics and Finance*。

最后,我们期望同学们指出丛书中的缺点和错误,以便我们在重印和再版时加以修正。曾子说:"以文会友,以友辅仁。"(《论语·颜渊》)此话用在这里是再恰当不过了。这里的"仁",我们特采用子夏的解释:"博学而笃志,切问而近思,仁在其中矣。"(《论语·子张》)让我们以此共勉。

邹恒甫

2000年8月11日,于北京大学

前 言

最近几十年，拓扑学方法在理论经济学方面的应用，发展很快，成果丰富。例如，在经济均衡理论的框架内，使市场供求关系达到平衡的所谓均衡价格，被归结为数学上的“不动点”。理论经济学方面的阿罗—德布鲁(Arrow-Debreu)模型，就是把理想条件下的市场经济表现为一个不动点问题，然后运用拓扑学的不动点定理，论证经济将达到均衡。这是理论经济学对市场经济信念的论证，是经济学家成功运用拓扑学方法取得成果的范例。这可以说是数学对经济学的推动。另一方面，在数理经济学家参与以前，即使可以根据不动点定理确定问题有解，数学家往往也不知道怎样才能把肯定存在的解求出来。这方面的突破，最终由普林斯顿大学数学博士出身的耶鲁大学经济学家斯卡夫(H. Scarf)教授做出。斯卡夫开创的不动点计算方法，是当代数学发展的大事，是经济学家的研究推动和贡献于数学发展的范例。博弈论方面有类似的情况。纳什定理论定，每个有限博弈都存在至少一个纳什均衡。这是博弈论的基石。纳什(J. Nash)证明他的定理的工具，也是拓扑学里面的不动点定理。至此我们提到过的四位经济学家，有三位获得了诺贝尔经济学奖，他们是阿罗、德布鲁和纳什。阿罗和德布鲁都坦言，纳什在博弈论中运用不动点定理论证均衡的存在性的开创性工作，给了他们在经济均衡理论方面的工作以很大的启示。

由于这样的背景，广大读者迫切需要一本适合他们阅读的著作，以便了解和掌握拓扑学的基础概念和基本方法，了解和掌握拓扑学的典型应用，特别是在经济学方面的应用。这就是我们编著这本《经济学拓扑方法》的动机。

20世纪最后的几十年，拓扑学在包括理论经济学在内的其他领域的应用之所以发展很快，并不是代数拓扑学和微分拓扑学的高深理论和最新成果的杰作，而主要是因为拓扑学本质上整体的讨论方式适应了其他领域的要求，是因为拓扑学的一些基本方法在其他领域得到了应用。基于这样的认识，我们编著这本书，就是要向读者，特别是向关

心理论经济学发展的读者,介绍拓扑学的比较容易掌握和比较有应用价值的基础概念和基本方法。

本书第一部分是点集拓扑学基础,主要介绍拓扑空间、同胚映射、紧致性和连通性。因为应用问题本身常常是在欧氏空间和度量空间里面提出来的,所以我们完全不讲度量化问题。第二部分是代数拓扑学技巧,在经济学研究中用得比较多的是同伦的概念和单纯剖分的做法。第三部分是微分拓扑学初步,其中的Sard定理,是说明"好"的情况发生的概率为1的数学命题,从而你不必因为个别"坏"的情况可能存在而束手无策。德布鲁在获奖演说中,就谈到斯梅尔(S. Smale)教授向他介绍这个定理,使他豁然开朗。后面两个部分共六章,集中谈具体的经济学应用,特别是前面提到的经济学家的工作。

经济学提供思考和分析经济现象的科学方法。至于数理经济学,其特点则是从一些经济学假设出发,建立经济机理的数学模型,并采用数学方法,推导出相应的结果,与现实经济现象对证。这理应是非常严密的一门科学。

本书在多年的讲稿的基础上写成。我们水平有限,虽兢兢业业写作,仍难免疏漏乃至错误。不足之处,诚望读者和专家指正。则柯的电子信箱是 lnswzk@zsu.edu.cn,预先感谢各位的批评。北京大学史树中教授的著述,使我们得到许多教益。在本书付梓的时候,谨向史教授表示由衷的感谢。还要感谢国家自然科学基金重点项目课题《金融数学》(批准号:10131030)的资助,感谢北京大学光华管理学院邹恒甫教授和香港城市大学党创寅教授对本书写作的鼓励,感谢北京大学光华管理学院龚六堂博士、张圣平博士以及北京大学出版社梁鸿飞先生对本书出版的支持。张圣平博士甚至帮助整理原稿,校正清样,改正了初稿的若干错漏。李杰同学协助部分索引的编制。在此一并致谢。

谨以本书献给中国科学院院士江泽涵教授、吴文俊教授和姜伯驹教授。我们现在能够做一些有用的工作,离不开老师们的教诲和后来的鼓励。

作　者

记于2001年夏

目 录

第一部分 点集拓扑学基础

这部分的内容,包括点集拓扑学的基本概念和若干最基本的结果.这些基本内容不仅是学习近现代数学所不可缺少的基础知识,在理论经济学方面也有许多应用.

第一章介绍拓扑空间的基本概念和性质、连续映射的基本概念和性质,第二章集中讨论紧致性和连通性.

经济学问题通常是在欧几里德空间里面提出来的,所以本书讨论的方法,也可以说是“欧氏空间的拓扑学方法”.一般拓扑学教程,因为抽象地定义流形等拓扑学对象,因而把流形适当地“嵌入”到欧氏空间以利用欧氏空间的优良性质,是一个重要的考虑.可以说,度量化做的就是嵌入问题.我们则一开始就置身于欧氏空间,在欧氏空间中建立拓扑学概念和讨论拓扑学方法,所以我们完全不谈拓扑空间的度量化问题.这是与许多点集拓扑学著作不同的地方.

第一章　拓扑空间与同胚映射

§1.1　集合与映射

本节列出集合论的一些最基本的概念和事实,作为全书的预备.

假定读者已经熟悉**集合**(set)、**子集**(subset)、集合的**并**(union)和集合的**交**(intersection)等概念,简单复习如下.集合常用大写的英文字母表示,集合中的元素常用小写的英文字母表示.a 是集合 A 中的元素,记作 $a\in A$.这时,也说元素 a 属于集合 A.在本书中,集合中的元素又常称为集合中的点.点 a 不属于集合 A,则记作 $a\notin A$.

设 A,B 都是点的集合.当集合 B 的元素都是集合 A 的元素的时候,称集合 B 是集合 A 的子集,记作 $B\subset A$ 或 $A\supset B$.这时也说集合 A 包含集合 B,或者集合 B 包含于集合 A.当 $A\supset B$ 同时 $B\supset A$ 时,说集合 A 和集合 B 相等,记作 $A=B$.因为 $B=A$ 是 $B\subset A$ 的一个特款,所以当 $B\subset A$ 但是 $B\neq A$ 时,特别称 B 为 A 的**真子集**(proper subset).

一个集合总可以看成是由另一个更大的集合中的符合一定条件的点或元素组成的子集.这时,我们采用

$$A = \{x \in S : p(x)\}$$

的表示法，表示集合 A 由(更大的集合) S 中所有使得命题 $p(x)$ 成立的点 x 组成. 当这个更大的集合 S 是不言而喻的时候，我们也可以简单地只写 $A=\{x: p(x)\}$.

在本书中，**整数集**、**有理数集**、**实数集**和**复数集**将分别记作 $\mathscr{Z}, \mathscr{Q}, \mathscr{R}, \mathscr{C}$. **非负整数集**、**非负有理数集**、**非负实数集**、**正实数集**将分别记作 $\mathscr{Z}_+$, $\mathscr{Q}_+, \mathscr{R}_+, \mathscr{R}_{++}$. 按照上述表示法，

$$\mathscr{Z}_+ = \{x \in \mathscr{Z}: x \geqslant 0\}$$
$$\mathscr{Q}_+ = \{x \in \mathscr{Q}: x \geqslant 0\}$$
$$\mathscr{R}_+ = \{x \in \mathscr{R}: x \geqslant 0\}$$
$$\mathscr{R}_{++} = \{x \in \mathscr{R}: x > 0\}$$

空集(empty set)将用符号 $\varnothing$ 表示.

我们规定，空集是惟一的；空集是一切集合的子集，但是逻辑要求我们不把空集算作任何集合的真子集. 注意，界定集合的命题，比如说 $p(x)$，是关于点 x 的命题. 因为空集里面没有点，所以关于空集里面的点是否(都)具有性质 $p(x)$ 的检验，总是能够通过. 在这个意义上，空集(的点)自然具有一切所述的性质，这是空集不包含任何元素的事实的逻辑结果.

集合 A 与集合 B 的并集记作 $A \cup B$，集合 A 与集合 B 的交集记作 $A \cap B$. 这样，我们有

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ 或者 } x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ 同时 } x \in B\}$$

当 $A \cap B = \varnothing$ 时，我们说 A 与 B 不相交.

设 A 和 B 是作为某同一个更大的集合的子集的两个集合. 称由属于 A 但不属于 B 的元素所组成的集合为 A 对 B 的**差集**(difference set, 或者 relative complement)，记作 $A \setminus B$. 就是：

$$A \setminus B = \{x: x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$$

特别，当 $B \subset A$ 时，称 $A \setminus B$ 为集合 B 关于集合 A 的**余集**(complement). 在不致混淆的时候，允许把差集称为余集.

注意，本书不用 $A-B$ 表示 A 对 B 的差集. 这个符号将另有含义.

现在，我们将两个集合的并和两个集合的交的概念和运算，作下述推广.

定义 1.1.1

设 $\mathscr{A}=\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是以 Λ 为指标集的一族集合. 称由各 $A_\lambda,\lambda\in\Lambda$, 中的所有元素所组成的集合为 $\mathscr{A}$ 中集合的**并集**，记作 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$. 称由同时属于各 $A_\lambda,\lambda\in\Lambda$ 的元素所组成的集合为 $\mathscr{A}$ 中集合的**交集**，记作 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$.

下面是集合论中一个非常有用的公式.

De Morgan 公式　设 $\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是集合 X 的一族子集，那么

$$X\setminus\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(X\setminus A_\lambda)$$
$$X\setminus\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(X\setminus A_\lambda)$$

公式给出集合的并运算和交运算之间的一种对偶关系：并集的余集等于余集的交集，交集的余集等于余集的并集.

作为练习，读者可自行完成 De Morgan 公式的证明.

我们说在集合 X 上已经确立了**二元关系**(binary relation) R，指的是：对于 X 中任意(有序的)两点 x 和 y，可以确定地判断 x 对 y 是否具有这种关系，当 x 对 y 具有这种关系时，记作 xRy.

定义 1.1.2

设在集合 X 上确立了二元关系 R.

(1) 若对任意 $x\in X$ 都有 xRx，则称关系 R 是**自反**的(reflexive).

(2) 若当 xRy 时必有 yRx，则称关系 R 是**对称**的(symmetric).

(3) 若当 xRy 并且 yRz 时必有 xRz，则称关系 R 是**传递**的(transitive).

称自反的、对称的并且传递的关系为**等价关系**(equivalence relation).

等价关系常记作 $\sim$. 也就是说，当 $x\in X,y\in X$ 具有这种关系时就记作 $x\sim y$. 这时，说 x 与 y 是**等价**的(equivalent).

设 $\sim$ 是确立在集合 X 上的一个等价关系，又 $x\in X$，则称 $\{y\in X:y\sim x\}$ 为 x 所在的**等价类**(equivalence class)，记作 $[x]$.

定义 1.1.3

设 $\mathscr{A}=\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是集合 X 的一族子集.称 $\mathscr{A}$是 X 的一个**分割**(partition),如果:

(1) $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$;

(2) 若 $A_\lambda\cap A_\mu\neq\varnothing$, $\lambda,\mu\in\Lambda$,则 $A_\lambda=A_\mu$.

条件(2)说明,$\mathscr{A}$中任意两个不同的子集之交为空.所以 $\mathscr{A}$是 X 的一个分割,就是把 X 分割为互不相交的子集,这些子集组成集合族 $\mathscr{A}$.

命题 1.1.1　设~是集合 X 上的一个等价关系,则集合 X 按等价关系~分成的等价类的全体构成 X 的一个分割.

这就是说,$X=\bigcup_{x\in X}[x]$,并且对于任意两点 $x,y\in X$,$[x]\cap[y]=\varnothing$ 和$[x]=[y]$两者必居其一,只居其一.所以,任一集合按确定在该集合上的任一等价关系分割为若干个等价类.

作为等价关系的定义和集合的分割的定义的一个练习,请读者自行证明上述命题.

X 按等价关系~分成的等价类的全体也是一个集合,称为 X 关于等价关系~的**商**(quotient)集合,记作 $X/\sim$.

现在,叙述集合之间的单值映射的概念.

定义 1.1.4

设 X 和 Y 是集合,如果对 X 中的每一点 x,存在 Y 中的惟一的一点(记作)$f(x)$与之对应,则称 f 是X 到 Y 的一个**映射**(mapping),记作 $f:X\to Y$.这时,X 称为 f 的**定义域**(domain),Y 称为 f 的**值域**(range).设 $x\in X$,称 $f(x)\in Y$ 为 x 在映射 f 下的**象**(image)或简单地称为 x 的象.

设 $f:X\to Y$ 是一个映射,$A\subset X$,$B\subset Y$,则称集合

$$f(A)=\{f(x):x\in A\}$$

为 A 在映射 f 下的**象**,称集合

$$f^{-1}(B)=\{x:f(x)\in B\}$$

为 B 在映射 f 下的**原象**(inverse image 或者 preimage).特别地,集合

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$$

就称为映射 f 的象.当然 $f(X) \subset Y$.

定义 1.1.5

设 $f: X \to Y$ 是一个映射,若 $f(X) = Y$,则称 f 是**满映射**(surjection).若对任意 $x, x' \in X$,只要 $x \neq x'$ 就有 $f(x) \neq f(x')$,则称 f 是**单映射**(injection).若 f 既是满映射又是单映射,则称 f 是**双映射**(bijection)或**一一对应**(one-to-one correspondance).

注意,单映射的条件也可以叙述为:对于任意 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是空集或只含一个点的**独点集**(singleton).这里,我们自然地将 $f^{-1}(y)$ 看作是 $f^{-1}(B)$,其中 $B = \{y\}$ 是只含一个点 y 的独点集.

定义 1.1.6

设 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 都是映射,称按 $g \circ f(x) = g(f(x))$, $x \in X$ 确定的映射 $g \circ f: X \to Z$ 为 f 和 g 的**复合映射**(composed mapping).

定义 1.1.7

设 X 是一个集合,称按 $1_X(x) = x$, $x \in X$ 确定的映射 $1_X: X \to X$ 为 X 上的**恒同**映射(identity mapping).X 上的恒同映射亦常简记作 $1: X \to X$.设 $f: X \to Y$ 是一个映射,$A \subset X$,称按 $f|_A(x) = f(x)$, $x \in A$ 确定的映射 $f|_A: A \to Y$ 为 f 在 A 上的**局限**(restriction),这时,相应地称 $f: X \to Y$ 为 $f|_A: A \to Y$ 在 X 上的**扩张**(extension).特别地,X 上的恒同映射 $1_X: X \to X$ 在 $A \subset X$ 上的局限 $1_X|_A: A \to X$ 称为 A 到 X 的**包含**(inclusion)映射,常记作 $i: A \to X$.

设 $\sim$ 是集合 X 上的一个等价关系,则称按 $\pi(x) = [x]$, $x \in X$ 确定的映射 $\pi: X \to X/\sim$ 为 X 到其商空间 $X/\sim$ 的自然**射影**或自然**投射**(projection).

最后,叙述集合的笛卡儿积的概念.

定义 1.1.8

设 X 和 Y 是集合.称由所有形如 (x, y), $x \in X$, $y \in Y$ 的有序偶组成的集合为 X 和 Y 的**笛卡儿积**(Cartesian product),记作 $X \times Y$.也就是,

$$X \times Y = \{(x, y): x \in X, y \in Y\}$$

这里我们规定$(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$当且仅当 $x_1 = x_2$ 和 $y_1 = y_2$.

类似地，有限个集合 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的笛卡儿积是

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \cdots, x_n): x_i \in X_i, i = 1, \cdots, n\}$$

或者，写成紧凑的形式 $\Pi_{i=1}^{n} X_i$.

这时，集合 X 上的一个关系 R 可看作是笛卡儿积 $X \times X$ 的一个子集. 若$(x, y) \in R$，就写作 xRy. 特别地，集合 X 到集合 Y 的一个映射 f 可以看作是笛卡儿积 $X \times Y$ 的一个子集：$f \subset X \times Y$，并且符合：对于每个 $x \in X$，有惟一的一个 $y \in Y$ 使得$(x, y) \in f$. 这时，如果$(x, y) \in f$，我们就写 $y = f(x)$.

习　题

1. 证明集合包含关系的传递性：$A \supset B, B \supset C$ 蕴涵 $A \supset C$.

2. 设 $a, b \in R, a < b$，记

$$[a, b] = \{x \in R: a \leqslant x \leqslant b\}$$
$$(a, b) = \{x \in R: a < x < b\}$$
$$[a, b) = \{x \in R: a \leqslant x < b\}$$
$$(a, b] = \{x \in R: a < x \leqslant b\}$$

分别叫作以 a, b 为端点的闭区间，开区间，半开区间.

求：$[0,2) \cup [1,3]$, $(2,5) \cup (1,6)$, $[1,4] \cap (1,5]$, $[0,1] \cap (1,2)$, $[2,3] \setminus (2,3)$, $[1,5] \setminus (0,4)$, $[1,2] \setminus [3,4]$.

3. 证明并、交运算满足交换律与结合律：

$A \cup B = B \cup A$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$A \cap B = B \cap A$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.