

汇优秀试题之精萃 集思想方法之大成
筑能力培养之平台 走培优竞赛之新路

数学

培优竞赛



SHUXUE
PEIYOU JINGSAI
XINFANGFA

初三年级

新方法

黄东坡 著

湖北人民出版社

XINFANGFA

数学 培优竞赛

黄东坡 著

新方法

初三年级

数学竞赛培优新方法
初三

地址：武汉市武昌区洪山街33号
邮编：430071

出版人：李人杰
湖北人民出版社

定价：11.00元
ISBN 7-309-03385-5

印张：328
字数：787千字
开本：1092毫米×787毫米

湖北人民出版社
地址：武汉市武昌区洪山街33号

出版：2005年7月第1版
印刷：2005年11月第1次印刷

ISBN 7-309-03385-5

鄂新登字 01 号

数学培优竞赛新方法
初三年级

黄东坡 著

出版：湖北人民出版社
发行：

地址：武汉市解放大道新育村 33 号
邮编：430022

印刷：武汉市东华印刷厂
开本：787 毫米×1092 毫米 1/16
字数：358 千字

经销：湖北省新华书店
印张：14.5

版次：2002 年 7 月第 1 版

印次：2002 年 7 月第 1 次印刷

印数：1—12 120

定价：15.00 元

书号：ISBN 7-216-03392-2/G·907

序

2002年1月,湖北省新闻出版局组织评选出了2001年“最有影响的10本书”,名列榜首的是《康熙大帝》,排名第六的是《数学培优竞赛新帮手》(下简称《新帮手》)——黄东坡的大作,其余的8本书,也都选自不同的领域:政治、经济、科普、历史和艺术。从1月9日的《武汉晚报》得到这一消息后,我感到非常激动,因为《新帮手》的成功也是我的预期,证明我对该书的判断和鉴赏是正确的,向读者的举荐和承诺是可信的;我感到激动,还因为一本关于培优竞赛辅导的书,也能跻身于《康熙大帝》、《中国共产党历史图典》、《世界摄影名作欣赏》、《21世纪高级营销书库》等宏篇巨制之中,毕竟是一件意料之外的事。

面对《新帮手》的成就,本来可以弹冠相庆,作些修饰与补正的工作,但黄东坡并没有止于此,而是乘胜前进,继续探索,终于又一部新作《数学培优竞赛新方法》(下简称《新方法》)问世。我赞赏这样的精神,因为著书与教学满足同样的公理:没有最好的,只有不断地反思才可能更好。一打开《新方法》,你就会发现,它的创新之处在于:从知识的回眸说起,重过程;以“知识纵横”发轫,浸透着历史的信息,重思想;在标题后是一阙名言,紧扣主题的同时也关注着人文精神的滋养,这体现的是什么呢?一种改革的精神,一种数学教育的现代理念。同样,你也会发现《新方法》贯穿了现代数学教育的基本理念:比如课题组织与学习进程同步、与学生发展协调、与培优过程一致的基本设想;以典型问题为载体,着力反映教学真实,选材联系课本而又高于课本的基本原则;点拨、旁批和计白当黑的例题分析方式;着眼针对性、层次性以及开放互动性的训练材料;以及丰富性、实用性和有序性兼具的数学竞赛课程资源等,这些被实践所证明了的成功经验,在本书中又得以进一步张扬,成为作者的写作个性,这体现的是什么呢?是一种重视学术经验、重视教学积累的正确态度,既有反思,又有发展,不是否定,而是扬弃,这正是现代数学教育理念的精神所在。因此,我们说,体现现代数学教育理念,而且把这种理念转化为教学行为和写作实践,是本书的突出特点。

随着《义务教育国家课程标准》的颁布,数学教育正处于一个重要的变革时期,人们对数学的认识,对数学学习的认识,对数学价值与功能的认识,都在发生着显著的变化,它们将直接影响到中考数学、竞赛数学中内容的选取、题型的变化,影响到数学试题的立意、情境和设问方式,当这一切都在变化的时候,不能没有适应这种变化的培优竞赛读本。这是一个良好的机遇,看来,这个机遇又被黄东坡抓住了。我们期待着:有更多的老师会与作者达成共识,有更多的学生会从中受益。

裴光亚

2002年5月于武昌水果湖

审视反思 萌动突破

2001年10月,我来到广州,参加骨干教师国家级培训,在三个月的培训中,我有幸聆听到国内外著名专家学者关于国家课程标准、基础教育改革、数学教育进展、东西方数学教育比较等方面的演讲,他们高屋建瓴、总揽全局的讲演,极大地开阔了我的视野,我看到一场数学教育的范式革命已悄然拉开了序幕。

岁末回到武汉,我全面分析了一年来全国各地中考试题、各级竞赛试题,透过试题,能感受到颁布不久的《义务教育国家课程标准》(以下简称《标准》)给命题者带来的深刻影响,把握到他们清晰的命题思路:逼近课程标准,通过命题的改革与创新,反映新的数学教育理念,具体体现在:

- 设计新颖的试题,在新的情景下考查基础知识和基本技能,组合填空、完形填空、多项选择、阅读理解问题崭露头角;
- 削弱几何证明难度,强调数形结合,引入几何动态;
- 改变问题的设问方式,变封闭为开放,给学生以主动的思考空间;
- 要求运用学过的数学知识,通过观察、试验、联想、演绎、归纳、类比、分析、综合等思维形式,对数学问题进行探索和研究,探索性问题、发展性问题大量涌现;
- 通过类比和联想、延伸和推广,考查数学创新能力;
- 倡导数学建模、数学应用,贴近社会实际、体现时代要求的情景应用题应运而生

.....

本套书就是这次培训学习与分析思考的结晶,它以《标准》为指导,将初中数学组织为90个专题讲座,以最新中考、竞赛试题为载体,运用开放互动式写作方式,注重数学思想方法的介绍、数学思维的培养、数学意识的培育、跨学科的综合渗透、数学文化氛围的营造,本套书的编写宗旨是:知识能力并举、培优竞赛兼顾、激发学习兴趣、优化学习过程、追求人文关怀、培养数学美感。

愿读者能透过本书的创意,优化教学过程,优化学习过程,从中感受到数学教育改革、试题创新设计的一缕气息。

多年来,湖北大学数学系汪江松先生、武汉市教研室胡顺先生给了我很多的支持和帮助。百忙之中,裴光亚先生又欣然作序。在写作过程中,湖北省水果湖第二中学领导、老师给了我关怀,武汉魏红女士、柯华女士、张立临先生,江苏海门范红洪小姐,广州留美博士朱洁华女士等给予了我帮助,在此一并表示诚挚的谢意。

黄东坡

2002年5月于湖北省水果湖第二中学

目 录

代 数 篇

- ① 追问求根公式 (1)
- ② 判别式——二次方程的根的检测器 (5)
- ③ 充满活力的韦达定理 (10)
- ④ 明快简捷——构造方程的妙用 (15)
- ⑤ 一元二次方程的整数解 (20)
- ⑥ 转化——可化为一元二次方程的方程 (24)
- ⑦ 化归——解方程组的基本思想 (29)
- ⑧ 由常量数学到变量数学 (34)
- ⑨ 坐标平面上的直线 (40)
- ⑩ 抛物线 (46)
- ⑪ 双曲线 (53)
- ⑫ 方程与函数 (59)
- ⑬ 怎样求最值 (64)
- ⑭ 图表信息问题 (69)
- ⑮ 统计的思想方法 (76)

几 何 篇

- ⑯ 锐角三角函数 (84)
- ⑰ 解直角三角形 (89)
- ⑱ 圆的基本性质 (94)
- ⑲ 转化灵活的圆中角 (101)
- ⑳ 直线与圆 (107)
- ㉑ 从三角形的内切圆谈起 (113)
- ㉒ 圆幂定理 (119)
- ㉓ 圆与圆 (126)
- ㉔ 几何的定值与最值 (133)

综 合 篇

- ㉕ 简单的数学建模 (140)
- ㉖ 开放性问题评说 (145)
- ㉗ 动态几何问题透视 (152)
- ㉘ 避免漏解的奥秘 (157)
- ㉙ 由正难则反切入 (162)
- ㉚ 从创新构造入手 (166)
- 参考答案 (170)

1 追问求根公式

在真实的生命里,每桩事业都是由信心开始,并由信心跨出第一步.

——史格勒

知识纵横

形如 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的方程叫一元二次方程 (quadratic equation in one variable), 配方法 (solving by of completing the square)、公式法 (solving by formula)、因式分解法 (solving by factorization) 是解一元二次方程的基本方法. 而公式法是解一元二次方程的最普遍、最具有一般性的方法.

求根公式 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 内涵丰富: 它包含了初中阶段已学过的全部代数运算; 它回答了一元二次方程的诸如怎样求实根、实根的个数、何时有实根等基本问题; 它展示了数学的简洁美.

降次转化是解方程的基本思想, 有些条件中含有 (或可转化为) 一元二次方程相关的问题, 直接求解可能给解题带来许多不便, 往往不是去解这个二次方程, 而是对方程进行适当的变形来代换, 从而使问题易于解决. 解题时常用到变形降次、整体代入、构造零值多项式等技巧与方法.

例题求解

【例 1】若 $x^2 + xy + y = 14$, $y^2 + xy + x = 28$, 则 $x + y$ 的值为

(2001 年 TI 杯全国初中数学竞赛题)

思路点拨 恰当处理两个等式, 解关于 $x + y$ 的一元二次方程.

链接

一部代数史就是研究方程、讨论方程根的历史. 一元三次方程或更高次数的方程, 是否也如一元二次方程有求根公式? 16 世纪意大利数学家卡当给出了三次和四次方程的公式解; 19 世纪 20 年代, 挪威数学家阿贝尔意识到一般的四次以上方程没有公式解; 大约又过了十年, 法国数学家伽罗华彻底回答了这个问题, 并创立群、环、域等概念, 深刻影响着物理学、现代数学的发展.

【例2】 设 x_1, x_2 是二次方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 的两个根, 那么 $x_1^3 - 4x_2^2 + 19$ 的值等于().

- A. -4 B. 8 C. 6 D. 0

(全国初中数学联赛题)

思路点拨 求出 x_1, x_2 的值再代入计算, 则计算繁难, 解题的关键是利用根的定义及变形, 使多项式降次, 如 $x_1^2 = 3 - x_1, x_2^2 = 3 - x_2$.

【例3】 解关于 x 的方程 $(a-1)x^2 - 2ax + a = 0$.

思路点拨 因不知晓原方程的类型, 故需分 $a-1=0$ 及 $a-1 \neq 0$ 两种情况讨论.

【例4】 设方程 $x^2 - |2x - 1| - 4 = 0$, 求满足该方程的所有根之和.

(2000年重庆市竞赛题)

思路点拨 通过讨论, 脱去绝对值符号, 把绝对值方程转化为一般的一元二次方程求解.

【例5】 是否存在某个实数 m , 使得方程 $x^2 + mx + 2 = 0$ 和 $x^2 + 2x + m = 0$ 有且只有一个公共的实根? 如果存在, 求出这个实数 m 及两方程的公共实根; 如果不存在, 请说明理由.

思路点拨 假设存在实数 m , 使这两个方程有且只有一个公共实根 x_0 , 将 x_0 分别代入两个方程, 联立后消去 x_0^2 项, 求出 x_0 及 m 值.

链接

一元二次方程常见的变形形式有:

(1) 把方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 直接作零值多项式代换;

(2) 把方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 变形为 $ax^2 = -bx - c$, 代换后降次;

(3) 把方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 变形为 $ax^2 + bx = -c$ 或 $ax^2 + c = -bx$, 代换后使之转化关系或整体地消去 x .

解含字母系数方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 时, 在未指明方程类型时, 应分 $a=0$ 及 $a \neq 0$ 两种情况讨论; 解绝对值方程需脱去绝对值符号, 并用到绝对值一些性质, 如 $|x|^2 = |x^2| = x^2$.

解公共根问题的基本策略是: 当方程的根有简单形式表示时, 利用公共根相等求解; 当方程的根不便于求出时, 可设出公共根, 设而不求, 通过消去二次项寻找解题突破口.

学 力 训 练

基础夯实

1. 已知 a, b 是实数, 且 $\sqrt{2a+6} + |b-\sqrt{2}| = 0$, 那么关于 x 的方程 $(a+2)x^2 + b^2x = a-1$ 的根为_____.

(2001年北京市海淀区中考题)

2. 已知 $x^2 - 3x - 2 = 0$, 那么代数式 $\frac{(x-1)^3 - x^2 + 1}{x-1}$ 的值是_____.

(2001年四川省中考题)

3. 方程 $(2001x)^2 - 2000 \times 2002x - 1 = 0$ 的较大根为 α ; 方程 $x^2 + 2000x - 2001 = 0$ 的较小根为 β , 则 $\alpha - \beta =$ _____.

4. 若两个方程 $x^2 + ax + b = 0$ 和 $x^2 + bx + a = 0$ 只有一个公共根, 则().

- A. $a = b$ B. $a + b = 0$ C. $a + b = 1$ D. $a + b = -1$

(第十六届江苏省竞赛题)

5. 已知 $\frac{1}{a} - |a| = 1$, 则 $\frac{1}{a} + |a|$ 的值为().

- A. $\pm\sqrt{5}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\pm\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$ 或 1

(2001年重庆市中考题)

6. 方程 $(x+1)|x+1| - x|x| + 1 = 0$ 的实根的个数是().

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

7. 解下列关于 x 的方程:

(1) $(m-1)x^2 + (2m-1)x + m - 3 = 0$;

(2) $x^2 - |x| - 1 = 0$; (3) $|x^2 + 4x - 5| = 6 - 2x$.

8. 已知 a 是方程 $x^2 + x - \frac{1}{4} = 0$ 的根, 求 $\frac{a^3 - 1}{a^5 + a^4 - a^3 - a^2}$ 的值.

9. 阅读材料, 解答问题:

为解方程 $(x^2 - 1)^2 - 5(x^2 - 1) + 4 = 0$, 我们可以将 $x^2 - 1$ 视为一个整体, 然后使 $x^2 - 1 = y$, 则 $(x^2 - 1)^2 = y^2$, 原方程化为 $y^2 - 5y + 4 = 0$ ①, 解得 $y_1 = 1, y_2 = 4$, 当 $y = 1$ 时, $x^2 - 1 = 1$, 解得 $x = \pm\sqrt{2}$; 当 $y = 4$ 时, $x^2 - 1 = 4$, 解得 $x = \pm\sqrt{5}$, 故原方程的解为 $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = \sqrt{5}, x_4 = -\sqrt{5}$.

解答问题:

(1) 填空: 在由原方程得到方程①的过程中, 利用_____法达到了降次的目的, 体现了_____的数学思想.

(2) 解方程 $x^4 - x^2 - 6 = 0$. (2001年大连市中考题)



对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 而言;

(1) 若 $a + b + c = 0$, 则方程必有一根为 1;

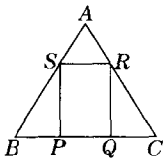
(2) 若 $a - b + c = 0$, 则方程必有一根为 -1, 反之亦然.

能力拓展

10. 若 $x^2 - 5x + 1 = 0$, 则 $2x^2 - 9x + 3 + \frac{5}{x^2 + 1} =$ _____.
11. 已知 m, n 是有理数, 方程 $x^2 + mx + n = 0$ 有一个根是 $\sqrt{5} - 2$, 则 $m + n$ 的值为 _____.
12. 已知 $x = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$, 那么 $\frac{3}{4}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{4}x + 1 =$ _____.
(“希望杯”邀请赛试题)
13. 对于方程 $x^2 - 2|x| + 2 = m$, 如果方程实根的个数恰为 3 个, 则 m 值等于().
A. 1 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 2.5 (北京市竞赛题)
14. 自然数 n 满足 $(n^2 - 2n - 2)^{n^2 + 47} = (n^2 - 2n - 2)^{16n - 16}$, 这样的 n 的个数是().
A. 2 B. 1 C. 3 D. 4
(第十五届江苏省竞赛题)
15. 已知 a, b 都是负实数, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a-b} = 0$, 那么 $\frac{b}{a}$ 的值是().
A. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
16. 已知 $x = \sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$, 求 $\frac{x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 18x + 23}{x^2 - 8x + 15}$ 的值.
17. 已知 m, n 是一元二次方程 $x^2 + 2001x + 7 = 0$ 的两个根, 求 $(m^2 + 2000m + 6)(n^2 + 2002n + 8)$ 的值.
18. 首项系数不相等的两个二次方程
 $(a-1)x^2 - (a^2+2)x + (a^2+2a) = 0$ ①
 $(b-1)x^2 - (b^2+2)x + (b^2+2b) = 0$ ②
 (其中 a, b 为正整数) 有一个公共根, 求 $\frac{a^b + b^a}{a^{-b} + b^{-a}}$ 的值.

综合创新

19. 已知方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两根 α, β 也是方程 $x^4 - px^2 + q = 0$ 的根, 求 p, q 的值.
(四川省选拔赛题)
20. 如图, 锐角 $\triangle ABC$ 中, $PQRS$ 是 $\triangle ABC$ 的内接矩形, 且 $S_{\triangle ABC} = nS_{\text{矩形}PQRS}$, 其中 n 为不小于 3 的自然数. 求证: $\frac{BS}{AB}$ 为无理数.



(上海市竞赛题)

2 判别式——二次方程的根的检测器

思考时,必须要对思考的对象发生“兴趣”,不断地刺激它,并且要持之久而不懈怠。

——叔本华

知识纵横

为了检查产品质量是否合格,工厂里通常使用各种检验仪器,为了辨别钞票的真伪,银行里常常使用验钞机,类似地,在解一元二次方程有关问题时,最好能知道根的特性:如是否有实数根,有几个实数根,根的符号特点等。我们形象地说,判别式是一元二次方程根的“检测器”,在以下方面有着广泛的应用:

利用判别式,判定方程实根的个数、根的特性;

运用判别式,建立等式、不等式,求方程中参数或参数的取值范围;

通过判别式,证明与方程相关的代数问题;

借助判别式,运用一元二次方程必定有解的代数模型,解几何存在性问题、最值问题。

例题求解

【例1】 已知关于 x 的一元二次方程 $(1-2k)x^2 - 2\sqrt{k+1}x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根,那么 k 的取值范围是_____。

(2001年广西中考题)

思路点拨 利用判别式建立关于 k 的不等式组,注意 $1-2k$ 、 $k+1$ 的隐含制约。

【例2】 已知三个关于 y 的方程: $y^2 - y + a = 0$, $(a-1)y^2 + 2a + 1 = 0$ 和 $(a-2)y^2 + 2a - 1 = 0$,若其中至少有两个方程有实根,则实数 a 的取值范围是()。

链接

运用判别式解题,需要注意的是:

(1) 解含参数的一元二次方程,必须注意二次项系数不为0的隐含制约;

(2) 在解涉及多个一元二次方程的问题时,需在整体方法、降次消元等方法思想的引导下,综合运用方程、不等式的知识。

A. $a \leq 2$

B. $a \leq \frac{1}{4}$ 或 $1 \leq a \leq 2$

C. $a \geq 1$

D. $\frac{1}{4} \leq a \leq 1$

(山东省竞赛题)

思路点拨 “至少有两个方程有实根”有多种情形,从分类讨论入手,解关于 a 的不等式组,综合判断选择.

【例3】 已知关于 x 的方程 $x^2 - (k+2)x + 2k = 0$,

(1) 求证:无论 k 取任何实数值,方程总有实数根;

(2) 若等腰三角形 ABC 的一边长 $a = 1$,另两边长 b, c 恰好是这个方程的两个根,求 $\triangle ABC$ 的周长.

(2001年湖北省荆门市中考题)

思路点拨 对于(1)只需证明 $\Delta \geq 0$;对于(2)由于未指明底与腰,须分 $b = c$ 或 b, c 中有一个与 a 相等两种情况讨论,运用判别式、根的定义求出 b, c 的值.



涉及等腰三角形的考题,需要分类求解,这是命题设计的一个热点,但不一定每个这类题均有多解,还须结合三角形三边关系定理予以取舍.

【例4】 已知关于 x 的方程 $x^2 + 2x + \frac{m^2 - 1}{x^2 + 2x - 2m} = 0$,其中 m 为实数,当 m 为何值时,方程恰有三个互不相等的实数根? 求出这三个实数根.

(2000年山东省聊城市中考题)

思路点拨 解题的关键是把问题转化为两个一元二次方程来讨论,原方程恰有三个互不相等的实数根,则其中一个判别式等于零,另一个判别式大于零,设 $x^2 + 2x - 2m = y$.

运用根的判别式讨论方程根的个数为人所熟悉,而组合多个判别式讨论方程多个根(三个以上)是近年中考、竞赛依托判别式的创新题型,解这类问题常用到换元、分类讨论等思想方法.

【例5】 已知矩形 A 的边长分别为 a 和 b , 如果总有另一矩形 B , 使得矩形 B 与矩形 A 的周长之比与面积之比都等于 k , 试问: k 是否存在最小值? 若存在, 求出最小值; 若不存在, 说明理由.

(2001年陕西省竞赛题)

思路点拨 设矩形 B 的边长分别为 x, y , 则 $x + y = k(a + b)$, $xy = kab$, 则可得到关于 x, y 的方程, 为判别式的运用创造条件, 进而利用判别式探求最值.



有些与一元二次方程表面无关的问题, 可通过构造方程为判别式的运用铺平道路, 常见的构造方法有:

(1) 利用根的定义构造;

(2) 利用根与系数关系构造;

(3) 确定主元构造.

学 力 训 练

基础夯实

1. 已知 $\sqrt{a+4} + |b+1| = 0$, 若方程 $kx^2 + ax + b = 0$ 有两个相等的实数根, 则 $k =$ _____.
2. 已知关于 x 方程 $x^2 - \sqrt{2k+4}x + k = 0$ 有两个不相等的实数解, 化简 $| -k - 2 | + \sqrt{k^2 - 4k + 2} =$ _____.
3. 如果二次三项式 $3x^2 - 4x + 2k$ 在实数范围内总能分解成两个一次因式的乘积, 则 k 的取值范围是 _____.

(2001年甘肃省中考题)

4. 若关于 x 的一元二次方程 $(m-2)^2x^2 + (2m+1)x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 m 的取值范围是().

A. $m < \frac{3}{4}$

B. $m \leq \frac{3}{4}$

C. $m > \frac{3}{4}$ 且 $m \neq 2$

D. $m < \frac{3}{4}$ 且 $m \neq \pm 2$

(2001年山西省中考题)

5. 已知一直角三角形的三边为 a, b, c , $\angle B = 90^\circ$, 那么关于 x 的方程 $a(x^2 - 1) - 2cx + b(x^2 + 1) = 0$ 的根的情况为().

A. 有两个相等的实数根

B. 没有实数根

C. 有两个不相等的实数根

D. 无法确定

(2001年河南省中考题)

6. 如果关于 x 的方程 $(m-2)x^2 - 2x + 1 = 0$ 有解, 那么 m 的取值范

围是().

A. $m < 3$

B. $m \leq 3$

C. $m < 3$ 且 $m \neq 2$

D. $m \leq 3$ 且 $m \neq 2$

7. 已知 m, n 为整数, 关于 x 的三个方程: $x^2 + (7 - m)x + 3 + n = 0$ 有两个不相等的实数根; $x^2 + (4 + m)x + n + 6 = 0$ 有两个相等的实数根; $x^2 - (m - 4)x + n + 1 = 0$ 没有实数根, 求 m, n 的值.

8. 已知关于 x 的方程 $kx^2 + (2k - 1)x + k - 1 = 0$ ① 只有整数根, 且关于 y 的一元二次方程 $(k - 1)y^2 - 3y + m = 0$ ② 有两个实数根 y_1 和 y_2 .

(1) 当 k 为整数时, 确定 k 的值;

(2) 在(1)的条件下, 若 $m > -2$, 用关于 m 的代数式表示 $y_1^2 + y_2^2$.

9. a, b 为实数, 关于 x 的方程 $|x^2 + ax + b| = 2$ 有三个不等的实数根.

(1) 求证: $a^2 - 4b - 8 = 0$;

(2) 若该方程的三个不等实根, 恰为一个三角形三内角的度数, 求证该三角形必有一个内角是 60° ;

(3) 若该方程的三个不等实根恰为一直角三角形的三条边, 求 a 和 b 的值.

(2001 年江苏省苏州市中考题)

能力拓展

10. 已知等腰三角形 ABC 的一边长 $a = 4$, 另两边的长 b, c 恰好是关于 x 的方程 $x^2 - (2k + 1)x + 4(k - \frac{1}{2}) = 0$ 的两个根, 则 $\triangle ABC$ 的周长是_____.

11. 当 $a =$ _____, $b =$ _____ 时, 方程 $x^2 + 2(1 + a)x + (3a^2 + 4ab + 4b^2 + 2) = 0$ 有实数根.

12. 若方程 $|x^2 - 5x| = a$ 有且只有相异二实根, 则 a 的取值范围是_____.

13. 如果关于 x 的方程 $mx^2 - 2(m + 2)x + m + 5 = 0$ 没有实数根, 那么关于 x 的方程 $(m - 5)x^2 - 2(m + 2)x + m = 0$ 的实根的个数().

A. 2

B. 1

C. 0

D. 不能确定

14. 若方程 $x^2 - (a - 3)x - 3a - b^2 = 0$ 有两个等根, 则方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的两根分别是().

A. 0, 3

B. 0, -3

C. 1, 4

D. 1, -4

15. 已知 $x^2 - ax + 3 - b = 0$ 有两个不相等的实数根, $x^2 + (6 - a)x +$

$6 - b = 0$ 有两个相等的实数根, $x^2 + (4 - a)x + 5 - b = 0$ 没有实数根, 则 a, b 的取值范围是().

- A. $2 < a < 4, 2 < b < 5$ B. $1 < a < 4, 2 < b < 5$
C. $1 < a < 4, 1 < b < 5$ D. $2 < a < 4, 1 < b < 5$

16. 设 a, b, c 为互不相等的非零实数, 求证: 三个方程 $ax^2 + 2bx + c = 0, bx^2 + 2cx + a = 0, cx^2 + 2ax + b = 0$ 不可能都有两个相等的实数根.
17. 是否存在整数 m , 使得关于 x 的方程 $mx^2 - 4x + 4 = 0$ 与 $x^2 - 4mx + 4m^2 - 4m - 5 = 0$ 的根都是整数? 如果有, 试求出 m 的值; 如果没有, 请说明理由.
18. 已知三个实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0, abc = 1$, 求证: a, b, c 中至少有一个大于 $\frac{3}{2}$.

综合创新

19. 已知关于 x 的方程 $x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 3px^2 - 9px + 2p^2 = 0$ 有且仅有一个实根(相等两实根算作一个), 求 p 的值.
20. 已知 m, n 为整数, 方程 $x^2 + (n - 2)\sqrt{n - 1}x + m + 18 = 0$ 有两个不相等的实数根, 方程 $x^2 - (n - 6)\sqrt{n - 1}x + m - 37 = 0$ 有两个相等的实数根, 求 n 的最小值, 并说明理由.

(2000 年我爱数学初中生夏令营竞赛题)

3 充满活力的韦达定理

要记住：历史上所有伟大的成就，都是由于战胜了看来是不可能的事情而取得的。

——卓别林

知识纵横

一元二次方程的根与系数的关系，通常也称为韦达定理，这是因为该定理是由 16 世纪法国最杰出的数学家韦达发现的。

韦达定理简单的形式中包含了丰富的数学内容，应用广泛，主要体现在：

运用韦达定理，求方程中参数的值；

运用韦达定理，求代数式的值；

利用韦达定理并结合根的判别式，讨论根的符号特征；

利用韦达定理逆定理，构造一元二次方程辅助解题等。

韦达定理具有对称性，设而不求、整体代入是利用韦达定理解题的基本思路。

韦达定理，充满活力，它与代数、几何中许多知识可有机结合，生成丰富多彩的数学问题，而解这类问题常用到对称分析、构造等数学思想方法。

例题求解

【例 1】若 α, β 为 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 的两根，则 $\alpha^2 + \alpha\beta + 2\alpha$ 的值为

(2000 年辽宁省中考题)

思路点拨 所求代数式为 α, β 的非对称式，通过组合 $(\alpha^2 + 2\alpha) + \alpha\beta$ ，转化为用基本对称式及根的定义来解决。



韦达 (1540 - 1603)，法国数学家，是第一个有意识地系统使用字母表示数的人，并对数学符号进行了很多改进。

设方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 两根为 x_1, x_2 ，

(1) 若 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 0$ ，则 x_1, x_2 互为相反数；

(2) 若 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1$ ，则 x_1, x_2 互为倒数；

(3) 若

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0, \end{cases}$$

则两根同为正；

(4) 若

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0, \end{cases}$$

则两根同为负；

(5) 若 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$ ，则两根异号。



【例 2】 如果 a, b 都是质数, 且 $a^2 - 13a + m = 0, b^2 - 13b + m = 0$, 那么 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 的值为().

- A. $\frac{123}{22}$ B. $\frac{125}{22}$ 或 2 C. $\frac{125}{22}$ D. $\frac{123}{22}$ 或 2

(2001 年 TI 杯全国初中数学竞赛试题)

思路点拨 可将两个等式相减, 得到 a, b 的关系, 由于两个等式结构相同, 可视 a, b 为方程 $x^2 - 13x + m = 0$ 的两实根, 这样就为根与系数关系的应用创造了条件.

【例 3】 是否存在 a 的值, 使方程 $x^2 - (2a + 1)x + 2(4a - 7) = 0$ 的两个实数根都大于 3?

思路点拨 应注意到, 由 $x_1 > 3, x_2 > 3$ 可推出 $x_1 + x_2 > 6, x_1 x_2 > 9$, 但反过来, 由 $x_1 + x_2 > 6, x_1 x_2 > 9$ 却不能推出 $x_1 > 3, x_2 > 3$, 可把 $x_1 > 3, x_2 > 3$ 转化为 $x_1 - 3 > 0, x_2 - 3 > 0$, 结合判别式建立 a 的不等式组.

【例 4】 设 m 是不小于 -1 的实数, 使得关于 x 的方程 $x^2 + 2 \cdot (m - 2)x + m^2 - 3m + 3 = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 .

(1) 若 $x_1^2 + x_2^2 = 6$, 求 m 的值;

(2) 求 $\frac{mx_1^2}{1-x_1} + \frac{mx_2^2}{1-x_2}$ 的最大值.

(2000 年全国初中数学竞赛试题)

思路点拨 解答本例是在一定约束条件下 ($\Delta \geq 0$) 进行的, 对于 (2), 先把式子用 m 的代数式表示, 再从配方法入手.

应用韦达定理求根的代数式的值, 一般是关于 x_1, x_2 的对称式, 这类问题可通过变形用 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 表示求解, 而非对称式的求值常用到以下技巧:

- (1) 恰当组合;
- (2) 根据根的定义降次;
- (3) 构造对称式.

应用韦达定理的前提条件是一元二次方程有两个实数根, 即应用韦达定理解题时, 须满足判别式 $\Delta \geq 0$ 这一条件, 转化是一种重要的数学思想方法, 但要注意转化前后问题的等价性.