

清华大学土木工程系组编

土木工程新技术丛书

主 编 崔京浩

有限元法新论

原理 · 程序 · 进展

龙志飞 岑 松 编著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

O241.82

8

清华大学土木工程系组编

土木工程新技术丛书

主 编 崔京浩

有 限 元 法 新 论

原理 · 程序 · 进展

龙 志 飞 岑 松 编 著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是由清华大学土木工程系组编的“土木工程新技术丛书”中的一本,按照“原理、程序、进展”三位一体的方式编写的有限元法教材和专著。本书既介绍了有限元的基本理论和有关程序,又反映了相关学科的新近进展,以及作者的部分最新成果。

全书共九章,依次介绍平面问题有限元、平面和空间等参元、薄板有限元、厚板有限元、薄壳有限元以及有限元程序实施等内容。

本书可供大学本科和研究生作为教材,也可供工程科技人员应用参考。

图书在版编目(CIP)数据

有限元法新论:原理、程序、进展/龙志飞,岑松编著. —北京:中国水利水电出版社, 2001.9

(土木工程新技术丛书/崔京浩主编)

ISBN 7-5084-0728-8

I. 有… II. ①龙…②岑… III. 有限元法 IV. 0241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 043675 号

书 名	土木工程新技术丛书 有限元法新论 原理·程序·进展
作 者	龙志飞 岑松 编著
出版、发行	中国水利水电出版社 (北京市三里河路 6 号 100044) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sale@waterpub.com.cn 电话: (010) 63202266 (总机)、68331835 (发行部)
经 售	全国各地新华书店
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	水利电力出版社印刷厂
规 格	787×1092 毫米 16 开本 21 印张 498 千字
版 次	2001 年 10 月第一版 2001 年 10 月北京第一次印刷
印 数	0001—3200 册
定 价	36.00 元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社发行部负责调换

版权所有·侵权必究

清华大学土木工程系组编

土木工程新技术丛书

编 委 会

名誉主编 龙驭球

主 编 崔京浩

副主编 石永久

编 委 (按姓氏拼音字母排序)

包世华	陈志鹏	崔京浩	方东平	龚晓海
李德英	李永德	廉慧珍	龙志飞	卢 谦
卢祥之	卢有杰	陆化普	路新瀛	石永久
佟一哲	王元清	吴俊奇	杨 静	阳 森
叶列平	叶书明	张铜生	张新天	

编 辑 办 公 室

主 任 阳 森

成 员 李 亮 戚琳琳 王 勤 王照瑜 张玉峰

总 序

土木工程——一个古老而又年轻的学科。

国务院学位委员会在学科简介中为土木工程所下的定义是：“土木工程(Civil Engineering)是建造各类工程设施的科学技术的统称。它既指工程建设的对象，即建造在地上、地下、水中的各种工程设施，也指所应用的材料、设备和所进行的勘测、设计、施工、保养、维修等专业技术。”

英语中“Civil”一词的意义是民间的和民用的。“Civil Engineering”一词最初是对应于军事工程(Military Engineering)而诞生的，它是指除了服务于战争设施以外的一切为了生活和生产所需要的民用工程设施的总称，后来这个界定就不那么明确了。按照学科划分，防护工程、发射塔架等设施也都属于土木工程的范畴。

相对于机械工程等传统学科而言，土木工程诞生的更早，其发展及演变历史更为古老。同时它又是一个生命力极强的学科，它强大的生命力源于人类生活乃至生存对它的依赖，甚至可以毫不夸张地说，只要有人类存在，土木工程就有着强大的社会需求和广阔的发展空间。

随着技术的进步和时代的发展，土木工程不断注入新鲜血液，显示出勃勃生机。其中，工程材料的变革和力学理论的发展起着最为重要的推动作用。现代土木工程早已不是传统意义上的砖、瓦、灰、砂、石，而是由新理论、新材料、新技术、新方法武装起来的，为众多领域和行业不可缺少的大型综合性学科。一个古老而又年轻的学科。

《土木工程新技术丛书》由清华大学土木工程系组织编写，成立了编委会，由崔京浩教授任主编，聘请中国工程院院士龙驭球先生为名誉主编。

丛书的组织编写原则遵循一个“新”字。一方面，“新”体现在组织选编的书目上(见封底的书目)：当然首选那些与国家建设息息相关、内容新颖、时代感强的书。改革开放以来，特别是新世纪到来之际，国家建设部门对运行管理、安全保障、质量监控、交通分析等方面的需求日益迫切，在书目选择上我们有意地侧重了这一方面，力求引进一些国外的理论和实践，为我国建设服务；另一方面，“新”体现在各分册的内容上，即使是一些分册书名比较传统，其内容的编写也都努力反映了新理论、新规范、新技术、新方法，读者可以从各分册内容提要和章节目录编排上看出这种特色。

这套丛书的读者对象是比较宽泛的，除土木工程技术人员以外，对建设部门管理人员也是一套很有指导意义的参考读物。特别需要指出的是，这套书的作者几乎全是高等学校的教师，职业决定了他们写书在逻辑性、条理性和可读性诸方面有其独特的优势。在组织编写时我们又强调了深入浅出、说理透彻、理论与实际并重的原则，以便大专院校做为教材选用。

《土木工程新技术丛书》编委会

前 言

有限元学科已日趋成熟，并得到广泛的应用；但仍在向更深、更广、更新的领域发展，不断开拓，不断创新。

本书主要介绍有限元的基本内容，有限元的基本理论和方法，同时也介绍一些最新进展，以及有关的程序实施的内容。

按照由浅入深的顺序，介绍了下列几方面的内容：平面问题有限元、平面和空间等参元、薄板有限元、厚板有限元以及薄壳有限元。作为大学本科教材可选讲前面部分，作为研究生教材可侧重讲后面部分。

为了适当反映学科的最新进展，本书主要介绍了下列成果：广义协调元理论及其在平面膜元、薄板元、厚板元和薄壳元等领域的广泛应用；四边形面积坐标方法及其在构造四边形单元方面的应用；完全消除剪切闭锁现象的新型厚板元的构造方案；含转角自由度的膜元及新型平板壳元的构造方案；基于SemiLoof型约束条件的薄板元构造方案。这些新内容可供科研人员、教师和研究生产学习参考。

本书反映了龙驭球院士领导的科研组的部分成果。这些科研工作分别得到了国家自然科学基金、高等学校博士学科点专项基金和清华大学基础研究基金的资助，在此表示衷心的感谢。

作 者

2001年2月于清华园

主 要 符 号

A	单元的面积
A'	a' 与 a 的转换关系矩阵 $a' = A'a$
a	系统整体结点位移向量
a'	单元结点位移向量
$B \quad B_i \ (i=1, 2, \dots)$	单元应变矩阵及其子矩阵
$B_b \quad B_{bi}$	板弯曲应变矩阵及其子矩阵
$B_s \quad B_{si}$	板剪切应变矩阵及其子矩阵
$b_i \ (i=1, 2, \dots)$	单元几何参数 $b_i = y_j - y_k$
$c_i \ (i=1, 2, \dots)$	单元几何参数 $c_i = x_k - x_j$
D	系统或单元的弹性矩阵
$D_b \quad D_0$	板弯曲问题中弯曲弹性矩阵, 板的弯曲刚度
$D_s \quad C_s$	板弯曲问题中剪切弹性矩阵, 板的剪切刚度
E	杨氏弹性模量
f	系统或单元的体积力向量
G	剪切模量
$g_i \ (i=1, 2, 3, 4)$	四边形形状特征参数
$J \quad J \quad J^{-1}$	雅可比 (Jacobi) 矩阵及其行列式和逆矩阵
K	系统整体刚度矩阵
$K' \quad K'_{ij}$	单元刚度矩阵及其子矩阵
$K'_b \quad K'_s$	板弯曲问题中单元弯曲和剪切刚度矩阵
L_i	三角形或四边形单元面积坐标
M	板的弯矩场
$M_x \quad M_y \quad M_{xy}$	板弯曲问题中垂直 x 轴和垂直 y 轴的截面上单位长度的弯矩, 垂直于 x (y) 轴截面上单位长度的扭矩
$N \quad N_i$	单元形函数矩阵; 结点 i 的形函数
$n \quad n_x \quad n_y$	方向余弦
$n \quad n_i \quad n_{ij}$	边界的法向
Q	板的横向剪力场
$Q_x \quad Q_y$	板弯曲问题中垂直 x 轴和垂直 y 轴的截面上单位长度的横向剪力
$R \quad R'$	系统等效荷载列阵; 单元等效荷载列阵
r	单元内任一点上的集中力

$\mathbf{S}$ S_i	单元应力矩阵及其子矩阵
s s_i s_{ij}	边界的切向
$\mathbf{T}$ $\bar{\mathbf{T}}$	边界力向量, 边界荷载向量
t	单元的厚度
$\mathbf{u}$ $\bar{\mathbf{u}}$	位移向量; 单元边界位移向量
u, v	位移向量的分量, 表示 x 和 y 方向的位移
w	板的 z 方向位移, 即横向挠度
x y z	直角坐标

希腊字母

β_x β_y	板弯曲问题中面法线转角
ϵ	应变向量
ϵ_x ϵ_y	x 和 y 方向的正应变
Γ	微分算子矩阵 (注: 平面问题)
γ_{xy}	平面内剪应变
γ	板的横向剪应变场
γ_{xz} γ_{yz} γ_x γ_y	板的横向剪应变及其简写
κ	板的曲率场
κ_x κ_y κ_{xy}	板弯曲后中面在 x 方向的曲率, y 方向的曲率以及在 x 和 y 方向的扭率
ν	泊松比
Π_c	系统的余能
Π_p	系统的势能
θ_x θ_y θ_z	按右手法则绕 x 、 y 和 z 轴的转角
σ	应力向量
σ_x σ_y	x 和 y 方向的正应力
τ_{xy}	平面内剪应力
Ω Ω_e	系统区域; 单元区域
$\partial\Omega$ $\partial\Omega_e$	系统区域边界; 单元区域边界
ξ η	矩形单元局部坐标或四边形单元等参坐标
ϕ_x ϕ_y	板弯曲问题中面法线转角



作者简介

龙志飞 男，湖南安化人，
1957年12月生。工学硕士（清华大学工程力学系固体力学专业，1986），
教授，中国矿业大学（北京校区）
力学与结构工程教研室副主任，中国力学学会《工程力学》学报编委。
从事结构工程及计算力学研究，承担国家自然科学基金、煤炭科技基金等九项科研课题。曾赴加拿大渥太华大学和香港大学合作科研。
1992年获国家教委科技进步一等奖；1995年获国家教委科技进步三等奖；1997年列入江苏省“333工程”
人才培养规划。出版专著、教材两部，发表学术论文70余篇。



作者简介

岑松 男，福建福州人，1972年8月生。工学博士（清华大学土木工程系结构工程专业，2000），清华大学工程力学系博士后，清华大学博士后联谊会常务理事。从事计算力学、有限元方向的研究，承担国家自然科学基金、清华大学基础研究基金等五项科研课题。1999年曾赴香港大学进行合作科研。2000年7月获“清华大学优秀博士毕业生”称号；2001年5月获“清华大学优秀博士学位论文”奖；2001年6月获“第一届麻省理工学院计算流体与固体力学国际学术会议”青年学者奖。出版专著、教材两部，发表论文30余篇。

目 录

总序

前言

主要符号

第一章 绪论	1
第一节 有限元法概述	1
第二节 板壳有限元发展综述	2
一、平面膜元	2
二、平板弯曲单元	3
三、壳体单元	5
第二章 平面问题有限元引论	7
第一节 弹性平面问题的基本公式	7
第二节 平面问题的三角形元	9
一、二维区域的离散化	9
二、单元分析	10
三、整体分析	16
第三节 三角形单元面积坐标和高精度的三角形单元	18
一、三角形单元面积坐标	18
二、用面积坐标表示的三角形单元形函数	19
第四节 平面问题的矩形单元	20
一、四结点矩形单元 R_4	20
二、八结点矩形单元 R_8 和九结点矩形单元 R_9 的形函数	22
第五节 确定 C^0 类连续单元形函数的一种几何方法	23
第六节 部分平面单元形函数的子程序	27
第七节 本章小结	29
第三章 平面和空间问题的等参元	30
第一节 平面问题的等参变换	30
第二节 四边形等参单元	32
第三节 三角形等参单元	35
第四节 空间问题的等参元	36
一、六面体等参元	36
二、四面体等参元	39
第五节 数值积分	41

一、高斯-勒让德 (Gauss-Legendre) 积分公式	41
二、二维三角形与三维四面体单元的哈默儿 (Hammer) 积分公式	45
第六节 等参元的部分程序	46
一、雅可比矩阵及行列式计算子程序	46
二、平面四边形等参元刚度矩阵子程序	48
三、三角形等参元刚度矩阵子程序	49
四、生成二维平面问题单元应变矩阵子程序	51
第七节 平面问题的 Wilson 非协调单元与分片检验	52
第八节 本章小结	53
第四章 平面问题有限元进展	55
第一节 平面问题的广义协调元	55
一、平面问题的广义协调元变分基础	55
二、广义协调等参元	57
第二节 平面问题含转角自由度的广义协调元	60
一、关于平面内旋转自由度 θ_z 的定义	60
二、具有旋转自由度的广义协调矩形膜元 GR12 和 GR12M	61
三、具有旋转自由度的三角形膜元 GT9 和 GT9M	65
四、具有旋转自由度并含低阶附加位移的三角形膜元 GT9M8	69
第三节 采用四边形面积坐标的平面问题有限元	70
一、四边形单元面积坐标简介	71
二、采用面积坐标的四边形四结点膜元 MAGQ4	73
三、采用面积坐标的四边形八结点膜元 AQ8-II	77
第四节 数值算例	81
一、平面问题矩形单元的数值算例	81
二、平面问题三角形单元和任意四边形单元的数值算例	81
第五节 本章小结	87
第五章 薄板弯曲问题有限元引论	88
第一节 薄板弯曲问题的基本公式	88
第二节 非协调的薄板弯曲单元	91
一、矩形单元 ACM (12 自由度)	91
二、三角形单元 BC1Z (9 自由度)	94
第三节 从假设转角场入手的三角形薄板元 (DKT 元)	98
第四节 采用 SemiLoof 约束条件的薄板元	101
一、三角形薄板元 LSL-T9	101
二、四边形薄板元 LSL-Q12	103
第五节 本章小结	106
第六章 薄板弯曲问题有限元进展	107

第一节 薄板弯曲问题的广义协调方法	107
一、薄板弯曲问题的广义协调元变分基础	107
二、薄板广义协调方案的类型	109
第二节 采用边协调方案的广义协调薄板元	110
一、三角形薄板广义协调元 TGC-T9	110
二、三角形广义协调薄板元 TGC-T9-1	113
第三节 采用点一边协调方案的广义协调薄板元	114
一、矩形广义协调薄板元 GPL-R12	114
二、三角形广义协调薄板元 GPL-T9	115
第四节 采用点一周协调方案的广义协调薄板元	118
第五节 采用四边形面积坐标的广义协调薄板元	120
第六节 数值算例	125
第七节 本章小结	134
第七章 厚板弯曲问题有限元进展	135
第一节 厚板弯曲问题的基本公式	135
第二节 Mindlin 板单元	137
一、Mindlin 板单元的一般列式	137
二、剪切闭锁问题	138
三、近期有关改进 Mindlin 板单元的一些研究进展	139
第三节 新型厚/薄板通用单元初论	139
一、无剪切闭锁的 Timoshenko 厚梁单元	140
二、厚板单元剪应变场的合理插值方法	142
三、三角形厚薄板通用单元 TMT	143
四、四边形厚薄板通用单元 TMQ	147
第四节 新型厚/薄板通用单元续论	154
一、厚板问题的广义协调条件	154
二、矩形广义协调厚板元 LFR1	154
三、三角形广义协调厚板元 TCGC-T9	157
四、采用四边形面积坐标的广义协调厚板元 TACQ	162
第五节 数值算例	166
第六节 本章小结	184
第八章 薄壳结构有限元——平板型壳元	185
第一节 引言	185
第二节 平板型壳元的构造	185
一、局部坐标系下的单元刚度矩阵	185
二、单元刚度矩阵由局部坐标系向整体坐标系转化	187
三、局部坐标的方向余弦	189

四、平面内旋转自由度的刚度问题	192
五、单元的选择	192
第三节 新型平板型壳元	193
第四节 数值算例	195
第五节 本章小结	197
第九章 有限元程序实施	198
第一节 广义协调元通用程序 GCFEM2000 的程序结构	198
第二节 变量列表及子程序说明	200
一、程序中主要变量和数组说明（按英文字母排序）	200
二、各子程序功能说明	201
第三节 数据输入文件的格式	203
第四节 输入输出文件的范例	206
一、平面问题的输入输出文件	206
二、平板弯曲问题的输入输出文件	211
第五节 源程序清单	217
一、GCFEM2000. f90 源程序	217
二、GCELEMENT. f90 源程序	270
参考文献	310

第一章 绪 论

第一节 有限元法概述

有限元法最初是 20 世纪 50 年代作为处理固体力学问题的方法出现的。追溯历史,早在 1943 年, Courant 已应用了单元的概念^[1]。1945~1955 年, Argyris 等人在结构矩阵分析方面取得了很大的进展^[2]。1956 年, Turner、Clough 等人把刚架位移法的思路,推广应用于弹性力学平面问题^[3];他们把连续体划分为三角形和矩形单元,单元中的位移函数采用近似表达式,推导单元的刚度矩阵,建立结点位移与结点力之间的单元刚度方程。1960 年, Clough 首先把这种解决弹性力学的方法,给予特定的名词,称为“有限元法”^[4]。几乎与此同时,我国的冯康也独立提出了类似的方法^[5]。

有限元法实质上是一种在力学模型上进行近似的数值计算方法。以弹性力学问题位移为例,有限元法一般主要包括以下几个步骤:

(1) 将连续体离散化,即将连续的求解域离散为一组由虚拟的线或面构成的有限个“单元”的组合体,这样的组合体能解析地模拟或逼近求解区域。

(2) 假设上述“单元”由位于单元边界上的结点相互连接在一起,以这些结点位移,作为基本未知量。

(3) 利用结点未知量,选择一组插值函数唯一地定义每一个单元内相应物理场(位移、应力和应变等)的分布,即选择单元模式或单元列式。

(4) 将各种类型的荷载变换为只作用在结点上的等效荷载,建立基本未知量与等效结点荷载之间的基本方程。

(5) 求解基本方程,得到基本未知量的解答。

整个求解区域的未知场函数可由各个单元结点上的数值以及插值函数近似表示。这样一来,在一个问题的有限元分析中,未知场函数的有限个结点值就成为待求全部的未知量,从而使一个连续体的无限自由度问题简化为有限自由度问题。

50 多年来,随着电子计算机技术的发展,有限元法的理论和应用都得到了迅速、持续不断的发展。其应用领域已由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题;由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题和波动问题。分析的对象从弹性材料扩展到塑性、粘弹性、粘塑性和复合材料等;从固体力学扩展到流体力学、传热学、电磁问题等连续介质领域。在工程分析中的作用已从分析和校核扩展到优化设计并和计算机辅助设计相结合。总之,以各种不同的变分原理为基础的有限元法可以应用于各种连续介质问题和几乎所有的场问题。可以预计,随着现代力学、计算数学和计算机技术的发展,有限元法作为一个具有坚实理论基础和广泛应用效力的数值分析工具,必将在国民经济建设和科学技术发展中发挥更大的作用,其自身亦将得到进一步的发展和完善^[6~8]。

第二节 板壳有限元发展综述

在有限元法的发展过程中,板壳有限元的研究一直吸引着许多研究工作者。本节对板壳有限元中运用最广的平面膜元,平板弯曲单元和壳体单元的研究进展作一综述。

一、平面膜元

在连续体平面问题中,位移型的 Lagrange 单元及结点仅出现在边上的 Serendipity 单元,均可作为平面膜元。这类单元的每个结点位移分量为两个线位移,它们是保证收敛的协调元,因而可靠性较好。早期的平板壳元多以它们来表示薄膜应力状态。然而,在维持协调性不变的情况下改善这类膜元的性能,只能依靠增加边内或单元域内的结点数来实现,这给解决实际问题带来了麻烦。另外,随着单元网格的畸变,一些单元的性能迅速下降。例如,四边形八结点等参单元 Q8 是在科研与生产中应用最为广泛的单元之一,它的性能也早已被一些研究者仔细地探讨过。Stricklin 等^[9]用 Q8 的规则网格和畸变网格计算悬臂梁问题,结果表明 Q8 在畸变网格下显得过刚,性能不佳。Lee 等^[10]研究了不同畸变网格对一些 Serendipity 单元(Q8、Q12)和 Lagrange 单元(Q9、Q16 和 Q25)的不同影响,指出虽然 Q8 和 Q12 的位移场在规则网格下可以完备到二次和三次,但在网格畸变情况下则最多只能完备到一次式,而 Lagrange 型单元却可以具有更高的完备次数。因此, Lee 等建议在大多数情况下,特别是在使用不规则网格和进行非线性大变形分析时应采用 Lagrange 型单元,而且最好使用直边网格;而 Serendipity 单元最好限于使用矩形或平行四边形单元。Zienkiewicz 等^[6]也得出相同的结论。然而, Lagrange 型单元都具有内部结点,公式较相应的 Serendipity 单元复杂,这又不利于 Lagrange 型单元的实际应用。

为了克服协调元刚度过硬的缺点, Wilson 等人^[11]首先提出了非协调元 Q6,获得了较好的结果。这一成功的尝试为人们提供了新的思路。但是这个位移模式对任意四边形不能通过 Irons^[12]提出的分片检验这一有限元收敛准则。针对这个问题, Taylor 等人^[13]提出了非协调元 QM6; Wachspress^[14]提出了非协调元 QP6; Pian 等^[15]采用近似分片检验提出 NQ6; 龙驭球等^[16]利用常应力和线性应力下的广义协调条件,提出了广义协调等参元 GC-Q6,这是又一个 Wilson 单元 Q6 的改进方案。这些单元仅含角点自由度,均能通过分片检验,取得了较协调元更好的结果。Pian 等人^[17]则依据 Hellinger-Reissner 原理,假设完全应力场导出四结点杂交元。Wilson 等人在文献^[18]中又提出了一个对二维、三维都适用的非协调元模型。

在平面膜元角点上增加旋转自由度,在一定程度上可以避免用增加内部结点的方式来改善单元的性能。由于它只有角点自由度,因而可以非常方便地与其它类型单元,如板、壳及梁单元相连接。并且在壳体与折板分析中能自动处理相邻结点单元共面所产生的问题。这在有限元分析中具有比较重要的意义。

对旋转自由度问题,早在 60 年代就有人进行研究,但没有得到有价值的结果。1979 年, Olson 和 Bearden 在其论文^[19]中提出了具有旋转自由度的三角形膜元。但在单元中引入两边夹角在变形过程中保持不变这样一个不适当的约束,导致单元不能收敛于正确解。他们由此得出了不肯定的结论:常应变三角形元 CST(本书记为 T3)更适合于作为膜元用于任