陈偕雄　沈继忠　著

近代数字理论

浙江大學出版社

近代数字理论

陈偕雄　沈继忠　著

浙江大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

近代数字理论 / 陈偕雄，沈继忠著. 一杭州：浙江大学出版社，2001.9
ISBN 7-308-02493-8

Ⅰ. 近...　Ⅱ. ①陈...②沈...　Ⅲ. 数字逻辑　Ⅳ. TP302.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 057581 号

责任编辑　杜希武
封面设计　宋纪浔
出版发行　浙江大学出版社
（杭州浙大路 38 号　邮政编码 310027）
（网址：http://www.zjupress.com）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　德清第二印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　11.5
字　　数　300 千
版 印 次　2001 年 9 月第 1 版　2001 年 9 月第 1 次印刷
印　　数　0001－1000
书　　号　ISBN 7-308-02493-8/TP·217
定　　价　18.00 元

前　言

回顾传统的数字理论，它们的基础是：

1. 采用二值的数字信号{0,1}；

2. 采用与、或、非三种基本运算（与、或、非完备集）；

3. 采用以函数的最小项展开为基础的最小化程序；

4. 以基本门电路、触发器、中规模集成电路为基本元件。

在布尔代数中，除与、或、非代数系统外，还有与、异或代数系统。由于以与、异或为基本运算实现逻辑函数其实现成本按统计低于以与、或、非为基本运算的逻辑设计，以及以与、异或运算构成的数字系统易于进行故障检测，因而关于与、异或代数系统的研究是一项有意义的工作，本文将在第一章中予以介绍。

在布尔代数中与运算被称为布尔乘运算，或运算被称为布尔加运算，而在普通代数中有四则运算、乘方、开方、导数和积分等多种运算。在布尔代数中是否存在其余的相应运算？它们又有什么应用？这些将在第二章中予以介绍。普通代数中有许多特殊函数，在布尔代数中也存在特殊函数，这将在第三章进行讨论。

第四章讨论数字系统中信号取值为 1 和 −1 两个值的情况，即所谓谱技术。将变量和函数变换至 1，−1 空间后，为逻辑分析及逻辑设计提供了新的技术手段，在函数分类、函数对称性的检测、数字电路故障检测及逻辑设计等领域中获得了广泛的应用。

门阵列已在逻辑设计中得到了广泛的应用。门阵列单元的选择是门阵列设计的关键。通用逻辑门由于逻辑功能强，有望在门阵列中得到应用。有关内容将在第五章中介绍。

由于各种原因，数字系统产生故障是不可避免的，数字系统的故障可分为硬件故障和软件故障。第六章将介绍数字电路的硬件故障的检测。

在布尔代数中信号仅取两个值，而在多值逻辑中信号可取多个分立值，从而提高了传输线和集成电路的信息密度，可减少数字系统的连线数及提高集成电路芯片的集成度。多值逻辑有望在新一代计算机中得到应用。有关内容将在第七章中介绍。

本书可作为计算机和电子学科的研究生教材，同时也可作为从事数字电路及逻辑设计的教师用书。

作者衷心感谢国家自然科学基金、浙江省自然科学基金、浙江省科学技术厅、浙江省教育厅对研究工作的多项资助，衷心感谢浙江大学对出版本书的资助。作者特别要感谢吴训威教授及杜歆博士的帮助与支持。

作者
浙江大学信息与电子工程学系
2001 年 5 月

作 者 简 介

陈偕雄，男，祖籍浙江省镇海县（现为宁波市镇海区），生于上海。1962年毕业于杭州大学物理专业，长期从事无线电电子学和数字电子学领域的教学和研究工作。现任浙江大学信息与电子工程学系教授、博士生导师，电子电路与信息系统研究所所长。

陈偕雄教授主持和完成多项国家自然科学基金项目与浙江省自然科学基金项目，在国内外发表学术论文170余篇，其中被SCI，EI收录的论文30余篇，在《中国科学》上发表9篇。获科技成果奖励十余项，其中主要有：国家自然科学四等奖1项，国家教育部科技进步二等奖3项，浙江省科技进步二等奖2项。1991年被国家教委、国家人事部授予“有突出贡献的留学回国人员”荣誉称号，1998年被国家教育部授予“全国优秀教师”荣誉称号。

陈偕雄教授兼任中国电子学会会士，中国计算机学会多值逻辑与模糊逻辑专业委员会副主任，中国电子学会电路与系统学会理事，《电子与信息学报》编委，《科技通报》编委等职。

作者简介

沈继忠，男，博士，教授，1965年生，祖籍浙江宁波。1985年毕业于杭州大学物理系，同年留校任教，并于1992年在杭州大学硕士研究生毕业，2001年在浙江大学博士研究生毕业。主要从事数字电子学领域的教学和研究工作，主持和作为研究骨干完成10余项科研项目，发表学术论文60余篇，获得国家教育部科技进步二等奖一项，浙江省科技进步二等奖一项。沈继忠教授现为浙江大学信息与电子工程学系教授。

目　录

第一章　与、异或代数系统

第一节　引　言

为了研究与、异或代数系统，我们采用类比方法，即先回顾我们所熟悉的与、或、非代数系统，从中得到启发以确定我们的研究步骤。

基本运算（与或非）
- 定义
- 性质
  - 交换律
  - 结合律
  - 分配律
  - ……
- 完备性 →函数的最小项展开
  - 代数形式
  - ——代数法最小化
  - 表格形式
  - ——表格法最小化
  - K 图形式
  - ——K 图最小化

⇒最小化与/或式

实现基本运算的基本门电路 →电路实现及应用

利用类比的方法可以得到对与、异或代数系统进行研究的一种展开图：

基本运算（与、异或运算）
- 定义(?)
- 性质(?)
- 完备性(?)→函数的？展开
  - 代数形式(?)
  - ——代数法最小化(?)⇒最小化？式
  - 表格形式(?)
  - ——表格法最小化(?)
  - ？图形式
  - ——？图最小化(?)

实现异或运算的基本门电路 →电路实现及应用

第二节　异或运算的性质

一、异或运算的定义与意义

二变量的异或运算与符合运算可分别定义如下：

$$A \oplus B \triangleq \overline{A}B + A\overline{B}$$

$$A \odot B \triangleq \overline{A}\,\overline{B} + AB$$

异或运算的真值表如下表所示，为了便于比较在表中还列出了与运算及或运算的真值表。从逻辑意义来看，它们分别具有与、或、异或逻辑功能。从数值比较角度来看，与、或运算可分别看成是输入变量取小及取大运算。从数值运算角度来看，与、异或运算可分别看成是模 2 乘及模 2 加运算。

与、或、异或运算真值表

A　B	$A \cdot B$	$A+B$	$A \oplus B$
0　0	0	0	0
0　1	0	1	1
1　0	0	1	1
1　1	1	1	0
逻辑意义	与	或	异或
数值比较	取小	取大	/
数值运算	模 2 乘	/	模 2 加

二、异或运算的性质与公式

1. 与常量有关的公式

$0 \oplus 0 = 0$　　$0 \odot 0 = 1$

$0 \oplus 1 = 1$　　$0 \odot 1 = 0$

$1 \oplus 1 = 0$　　$1 \odot 1 = 1$

2. 与单变量有关的公式

$0 \oplus A = A$　　$0 \odot A = \overline{A}$

$1 \oplus A = \overline{A}$　　$1 \odot A = A$

$A \oplus A = 0$　　$A \odot A = 1$

$A \oplus \overline{A} = 1$　　$A \odot \overline{A} = 0$

3. 与多变量有关的公式

(1) 交换律

$A \oplus B = B \oplus A$ $\qquad$ $A \odot B = B \odot A$

(2) 结合律

$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C = A \oplus B \oplus C$ $\quad$ $(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C) = A \odot B \odot C$

(3) 分配律

$A(B \oplus C) = AB \oplus AC$ $\qquad$ $A + B \odot C = (A + B) \odot (A + C)$

4. 求反公式

(1)De Morgan 定理

$\overline{A \oplus B} = \overline{A} \odot \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{A \odot B} = \overline{A} \oplus \overline{B}$

(2) 反演律

$\overline{f(A,B,\cdots;\cdot,+,\odot,\oplus)} = f(\overline{A},\overline{B},\cdots;+,\cdot,\oplus,\odot)$

5. 用于代数式化简的公式

$A(A \oplus B) = A\overline{B}$ $\qquad$ $A + (A \odot B) = A + \overline{B}$

$A \oplus \overline{A}B = A + B$ $\qquad$ $A \odot (\overline{A} + B) = AB$

$(\overline{A} \oplus B)(A \oplus C)(B \oplus C) = (\overline{A} \oplus B)(A \oplus C)$

$(\overline{A} \odot B) + (A \odot C) + (B \odot C) = (\overline{A} \odot B) + (A \odot C)$

以上诸式的证明可采用多种方法：① 用真值表法证明，即将等式两边均用真值表或用最小项展开表示，然后验证它们是否相等，该法虽然一定可行，但往往比较繁琐。② 将异或运算根据定义用与、或、非运算表示，然后用与、或、非代数系统的有关公式予以证明。③ 选定一个出现次数较多或关键的变量，使其分别为 0，1，证明在这两种情况下等式成立。

证明：$(\overline{A} \oplus B)(A \oplus C)(B \oplus C) = (\overline{A} \oplus B)(A \oplus C)$

令 $A = 0$：

左边 $= (1 \oplus B)(0 \oplus C)(B \oplus C) = \overline{B}C(B \oplus C) = \overline{B}C$

右边 $= (1 \oplus B)(0 \oplus C) = \overline{B}C$

所以 $\qquad$ 左边 = 右边；

令 $A = 1$：

左边 $= (0 \oplus B)(1 \oplus C)(B \oplus C) = B\overline{C}(B \oplus C) = B\overline{C}$

右边 $= (0 \oplus B)(1 \oplus C) = B\overline{C}$

所以 $\qquad$ 左边 = 右边。

原式成立。

6. 讨论

(1) 对偶规则

如果两个逻辑式相等，则它们的对偶式也相等。任一逻辑式 Y，若把 Y 中所有的“$\cdot$”跟“$+$”交换，“$\odot$”与“$\oplus$”交换，0 与 1 交换，并保持原来的运算顺序，则得到新的逻辑式 Y' 与 Y 互为对偶式。例如，$A(B \oplus C) = AB \oplus AC$，根据对偶规则必有 $A + (B \odot C) = (A + B) \odot (A + C)$

(2) 异或及符合运算中非号的伸缩与移位

在异或及符合运算中，非号可任意伸缩与移位。例如

$\overline{A} \oplus B \oplus C = A \oplus \overline{B} \oplus C = A \oplus B \oplus \overline{C} = \overline{A \oplus B} \oplus C = \overline{A \oplus B \oplus C}$

类似地对符合运算则有

$$\overline{A} \odot B \odot C = A \odot \overline{B} \odot C = A \odot B \odot \overline{C} = \overline{A \odot B} \odot C = \overline{A \odot B \odot C}。$$

(3) 变量移项

若 $A \oplus B = C$，则有 $A = B \oplus C$

若 $A \odot B = C$，则有 $A = B \odot C$

(4) 异或运算和或运算的关系

$$\begin{aligned} \text{因为 } A + B &= \overline{A}B + A\overline{B} + AB \\ &= (A \oplus B) + AB \\ &= (A \oplus B) \oplus AB + (A \oplus B) \cdot AB \\ &= A \oplus B \oplus AB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } A + B + C &= (A + B) + C \\ &= (A + B) \oplus C \oplus (A + B)C \\ &= (A \oplus B \oplus AB) \oplus C \oplus (A \oplus B \oplus AB)C \\ &= A \oplus B \oplus C \oplus AB \oplus AC \oplus BC \oplus ABC \end{aligned}$$

依此类推，容易证明

$$P_1 + P_2 + \cdots + P_n = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n \oplus P_1P_2 \oplus \cdots \oplus P_{n-1}P_n \oplus \cdots \oplus P_1P_2\cdots P_n$$

式中 P_i 为乘积项。

(5) 符合运算和与运算的关系

根据对偶规则可得

$A \cdot B = A \odot B \odot (A + B)$

$A \cdot B \cdot C = A \odot B \odot C \odot (A + B) \odot (A + C) \odot (B + C) \odot (A + B + C)$

依此类推，容易证明

$$S_1S_2\cdots S_n = S_1 \odot S_2 \odot \cdots \odot S_n \odot (S_1 + S_2) \odot \cdots \odot (S_{n-1} + S_n) \odot \cdots \odot (S_1 + S_2 + \cdots + S_n)$$

式中 S_i 为求和项。

$$(6)\begin{cases} 0 \oplus 0 = 0 \\ 0 \oplus 1 = 1 \\ 1 \oplus 1 = 0 \end{cases}$$

上式表示偶数个1可以相消，奇数个1的异或为1，因此在由多个0，1的异或组成的表达式当且仅当其中含1的项数 n 为奇数时表达式为1；当 n 为偶数时表达式为0，而与其中含0的项数无关。由上述特点可归纳得到以下推论：

① $A \oplus \cdots \oplus A = \begin{cases} A，\text{如果 } n \text{ 为奇数；} \\ 0，\text{如果 } n \text{ 为偶数。} \end{cases}$

式中 n 为 A 的项数。

② 可直接写出 n 变量之异或的最小项展开式。例如

$$A \oplus B \oplus C \oplus D = A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + ABC\overline{D} + AB\overline{C}D + A\overline{B}CD + \overline{A}BCD$$

$$(7)\begin{cases}0\odot 0=1\\0\odot 1=0\\1\odot 1=1\end{cases}$$

上式表示多个0,1的符合运算组成的表达式的取值与1的个数无关,而仅与式中0的个数有关。当且仅当其中0的个数n为偶数时表达式为1;n为奇数时表达式为0。类似地可得到以下推论:

①$A\odot A\odot\cdots\odot A=\begin{cases}A,\text{如果 } n \text{ 为奇数;}\\1,\text{如果 } n \text{ 为偶数。}\end{cases}$

② 可直接写出n变量之符合的最小项展开式。例如

$A\odot B\odot C=\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\,\overline{C}+A\,\overline{B}\,\overline{C}+ABC$

(8) 异或和符合的关系

$A\oplus B=\overline{A\odot B}\qquad A\odot B=\overline{A\oplus B}$

$A\oplus B\oplus C=A\odot B\odot C$

$x_1\oplus x_2\oplus\cdots\oplus x_n=\begin{cases}x_1\odot\cdots\odot x_n,\text{如果 } n \text{ 为奇数;}\\\overline{x_1\odot x_2\odot\cdots\odot x_n},\text{如果 } n \text{ 为偶数。}\end{cases}$

(9) 与、异或运算构成完备集

因为$\overline{A}=1\oplus A\qquad A+B=A\oplus B\oplus AB$

因而与、异或两种运算可实现与、或、非三种运算。由于与、或、非三种运算构成完备集,因此与、异或运算也构成完备集,即任意逻辑函数只要用与、异或两种运算即可实现。

第三节　函数的Reed-Muller展开

一、展开定理

与、或、非代数系统中的规范展开式——最小项展开式是通过反复使用香农展开定理而获得的,因此,在讨论与、异或代数系统中的规范展开式——Reed-Muller展开(简称RM展开)式之前,必须先给出相应的展开定理。根据香农展开定理,我们有

$$\begin{aligned}f(x_1,\cdots,x_n)&=\overline{x}_1f(0,x_2,\cdots,x_n)+x_1f(1,x_2,\cdots,x_n)\\&=(1\oplus x_1)f(0,x_2,\cdots,x_n)\oplus x_1f(1,x_2,\cdots,x_n)\\&=f(0,x_2,\cdots,x_n)\oplus x_1[f(0,x_2,\cdots,x_n)\oplus f(1,x_2,\cdots x_n)]\end{aligned}$$

所以 $f(x_1,\cdots,x_n)=f_0(x_2,\cdots,x_n)\oplus f_1(x_2,\cdots,x_n)\cdot x_1$ (1-1)

式中$f_0(x_2,\cdots,x_n)=f(0,x_2,\cdots,x_n)$,$f_1(x_2,\cdots,x_n)=f(0,x_2,\cdots,x_n)\oplus f(1,x_2,\cdots,x_n)$,均为余下$n-1$个变量的函数。上式表示了任意函数均可对其中任一变量进行展开。由于式中仅含与、异或运算,因此上式即为在与、异或代数系统中的展开定理。

二、函数的规范Reed-Muller展开式(RM展开式)

利用展开定理将函数对各变量依次展开便可得到n变量函数的规范Reed-Muller展开式。

以三变量为例：

$$f(x_1,x_2,x_3)=f_0(x_2,x_3)\oplus x_1f_1(x_2,x_3)$$
$$f_0(x_2,x_3)=f_{00}(x_3)\oplus x_2f_{01}(x_3)$$
$$f_1(x_2,x_3)=f_{10}(x_3)\oplus x_2f_{11}(x_3)$$
$$f_{00}(x_3)=f_{000}\oplus x_3f_{001}$$
$$f_{01}(x_3)=f_{010}\oplus x_3f_{011}$$
$$f_{10}(x_3)=f_{100}\oplus x_3f_{101}$$
$$f_{11}(x_3)=f_{110}\oplus x_3f_{111}$$

将上述诸式代入式(1-1)可得

$$f(x_1,x_2,x_3)=f_{000}\oplus x_3f_{001}\oplus x_2f_{010}\oplus x_2x_3f_{011}\oplus x_1f_{100}\oplus x_1x_3f_{101}\oplus x_1x_2f_{110}\oplus x_1x_2x_3f_{111}$$

为了表达式简洁起见，引入 b_j 表示各展开系数，脚标 j 为 f 脚标的十进制表示，例如 $f_{101}=b_5$，引入 b_j 后上式可简化为

$$f(x_1,x_2,x_3)=b_0\oplus b_1x_3\oplus b_2x_2\oplus b_3x_2x_3\oplus b_4x_1\oplus b_5x_1x_3\oplus b_6x_1x_2\oplus b_7x_1x_2x_3 \tag{1-2}$$

对于 n 变量则有

$$f(x_1,\cdots,x_n)=b_0\oplus b_1x_n\oplus b_2x_{n-1}\oplus b_3x_{n-1}x_n\oplus\cdots\oplus b_{2^n-1}x_1x_2\cdots x_n \tag{1-3}$$

三、函数的规范 RM 展开式的图形表示

1. K 图回顾

在与、或、非代数系统中，根据函数的最小项展开式，将式中各展开系数 C_j 按一定规则（相邻 1 值格可合并）排列从而构成 K 图。三变量函数的 K 图如图 1.1(a) 所示。

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	C_0 $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	C_1 $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	C_3 $\bar{x}_1x_2x_3$	C_2 $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$
1	C_4 $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	C_5 $x_1\bar{x}_2x_3$	C_7 $x_1x_2x_3$	C_6 $x_1x_2\bar{x}_3$

(a) K 图

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	0	1	2	1
1	1	2	3	2

(b) 海明距离图

图 1.1　三变量 K 图及海明距离图

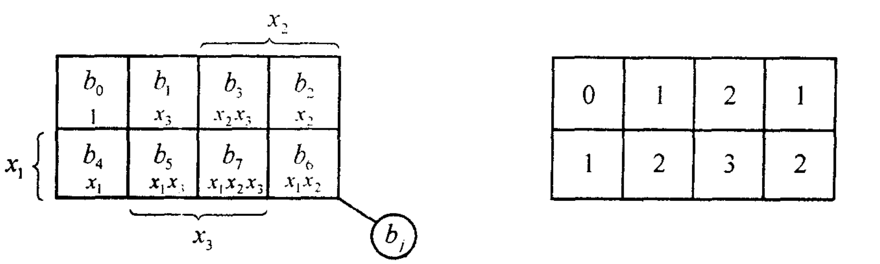
逻辑函数的 K 图表示有以下几个特点：① 每格对应一个最小项，填入量为该最小项的系数。② 相邻格对应的最小项只有一个变量相反。若某格在 x_j 为 1 区则为原变量，反之则为反变量。③$2^k$ 个相邻 1 值格可以聚合，即 2^k 个相邻 1 值最小项可以合并，合并后的乘积项可按以下规则组成：若该圈全在变量 x_j 为 0 区内则以反变量出现；若该圈全在变量 x_j 为 1 区内则以原变量出现；若该圈的一半在变量 x_j 为 0 区，另一半在 x_j 为 1 区，则该变量将消失。K 图中两格之间的海明距离是指它们相应的两个最小项之间变量极性相反数。图 1.1(b) 各格填入量给出的海明距离是指各格与全零格（即各变量均取反相应的格）之间的海明距离，显然它们实际上表示该格相应的最小项中变量取原变量的数目。

2. b_j 图引入

根据逻辑函数的规范 RM 展开，任意三变量函数的规范 RM 展开式可表示为

$$f(x_1,x_2,x_3) = b_0 \oplus b_1x_3 \oplus b_2x_2 \oplus b_3x_2x_3 \oplus b_4x_1 \oplus b_5x_1x_3 \oplus b_6x_1x_2 \oplus b_7x_1x_2x_3$$

参考 K 图的组成可以得到填入量为展开系数 b_j 的逻辑函数在与、异或代数系统中的图形表示，通常称为函数的 b_j 图，如图 1.2(a) 所示。该图形表示有以下几个特点：① 每格对应一个乘积项，若某格在变量 x_j 为 1 区，则乘积项中 x_j 以原变量出现；若某格在变量 x_j 为 0 区，则乘积项中不存在变量 x_j。② 相邻格对应的乘积项只差 1 个变量。③$2^k$ 个相邻 1 值格可以聚合，即 2^k 个相邻 1 值乘积项可以合并，合并后的乘积项可按以下规则组成：如该聚合圈全在变量 x_j 为 1 区内，则 x_j 以原变量出现；若该圈全在变量 x_j 为 0 区内，则 x_j 消失；若该圈的一半在变量 x_j 为 0 区，另一半在 x_j 为 1 区，则 x_j 以反变量出现。类似地，我们可以画出与图 1.1(b) 海明距离图相应的乘积项中变量数的图形表示，如图 1.2(b) 所示。该图表示各格相应的乘积项中所含的变量数。图 1.3 为某 4 变量函数的 b_j 图，图中给出了与各聚合圈相应的乘积项，例如由 4 个角组成的聚合圈相应的乘积项为 $\bar{x}_1\bar{x}_3$。



(a) b_j 图　　(b) 乘积项中变量数的图形表示

图 1.2　三变量 b_j 图及积项变量数图

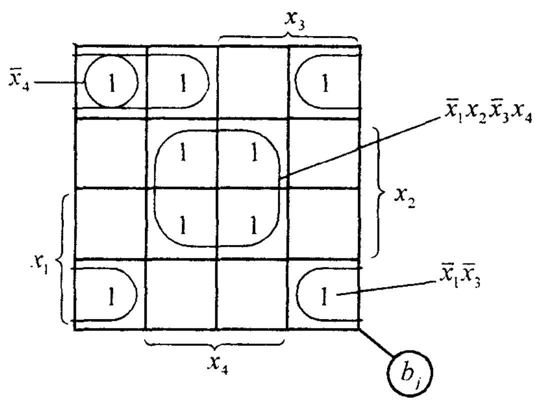


图 1.3　四变量函数的 b_j 图

四、Kronecker 矩阵积以及函数 RM 展开式的 Kronecker 矩阵表示

1. Kronecker 矩阵定义

$$(a_1 \quad b_1) \otimes (a_2 \quad b_2) \triangleq (a_1a_2 \quad a_1b_2 \quad b_1a_2 \quad b_1b_2) \tag{1-4}$$

上式表示了矩阵$(a_2 \quad b_2)$分别与矩阵$(a_1 \quad b_1)$中每个元素相乘，Kronecker 矩阵积的符号用$\otimes$表示。一个n_1行m_1列的矩阵与一个n_2行m_2列的矩阵的 Kronecker 矩阵积为一个$n_1 \times n_2$行、$m_1 \times m_2$列的矩阵，其定义如下：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m_1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n_11} & a_{n_12} & \cdots & a_{n_1m_1} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m_2} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n_21} & b_{n_22} & \cdots & b_{n_2m_2} \end{pmatrix}$$

$$\triangleq \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1m_2} & \cdots & a_{1m_1}b_{11} & \cdots & a_{1m_1}b_{1m_2} \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ a_{11}b_{n_21} & \cdots & a_{11}b_{n_2m_2} & \cdots & a_{1m_1}b_{n_21} & \cdots & a_{1m_1}b_{n_2m_2} \\ a_{21}b_{11} & \cdots & a_{21}b_{1m_2} & \cdots & a_{2m_1}b_{11} & \cdots & a_{2m_1}b_{1m_2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n_11}b_{n_21} & \cdots & a_{n_11}b_{n_2m_2} & \cdots & a_{n_1m_1}b_{n_21} & \cdots & a_{n_1m_1}b_{n_2m_2} \end{pmatrix} \tag{1-5}$$

2. Kronecker 矩阵积的性质

定理 1 Kronecker 矩阵积满足结合律，即有

$$[A] \otimes \{[B] \otimes [C]\} = \{[A] \otimes [B]\} \otimes C = [A] \otimes [B] \otimes [C] \tag{1-6}$$

定理 2 Kronecker 矩阵积不满足交换律，即$[A] \otimes [B] \neq [B] \otimes [A]$

定理 3 若$[B]$与$[C]$可加，即矩阵$[B]$与$[C]$的行数与列数均相等，则有

$$[A] \otimes \{[B] + [C]\} = [A] \otimes [B] + [A] \otimes [C] \tag{1-7}$$

$$\{[B] + [C]\} \otimes [A] = [B] \otimes [A] + [C] \otimes [A] \tag{1-8}$$

上述两式表示只要相应的矩阵可以相加，则 Kronecker 矩阵积满足分配律。

定理 4 若$[A_i]$与$[B_i]$可乘，$i = 1,2,\cdots,n$（要求$[A_i]$列数与$[B_i]$行数相等），则有

$$\begin{aligned}&\{[A_1] \otimes [A_2] \otimes \cdots \otimes [A_n]\} \cdot \{[B_1] \otimes [B_2] \otimes \cdots \otimes [B_n]\} \\ &\quad = \{[A_1] \cdot [B_1]\} \otimes \{[A_2] \cdot [B_2]\} \otimes \cdots \otimes \{[A_n] \cdot [B_n]\}\end{aligned} \tag{1-9}$$

3. Kronecker 矩阵连乘与乘幂

$$\bigotimes_{i=1}^{n}[A_i] \triangleq [A_1] \otimes [A_2] \otimes \cdots \otimes [A_n] \tag{1-10}$$

$$[A]^{\otimes n} \triangleq \underbrace{[A] \otimes [A] \otimes \cdots \otimes [A]}_{n\text{个}[A]} \tag{1-11}$$

例如：$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$[T]^{\otimes 2} = [T] \otimes [T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

以上诸式中矩阵相加和相乘中用到的加法即为普通的加法运算。如果用模 2 加，即相加后加以模 2 限制，可以证明定理 3、定理 4 仍然成立，于是我们可以将 Kronecker 矩阵积推广应用

于与、异或代数系统(模代数系统)。

4. 最小项展开与 RM 展开的 Kronecker 矩阵表示

二变量函数的最小项展开式为

$$f(x_1,x_2)=c_0\bar{x}_1\bar{x}_2+c_1\bar{x}_1x_2+c_2x_1\bar{x}_2+c_3x_1x_2$$

$$=(\bar{x}_1\bar{x}_2\quad \bar{x}_1x_2\quad x_1\bar{x}_2\quad x_1x_2)\cdot\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$$

$$=\{(\bar{x}_1\quad x_1)\otimes(\bar{x}_2\quad x_2)\}\cdot\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\{\bigotimes_{i=1}^{2}(\bar{x}_i\quad x_i)\}\cdot c]$$

类似地,对于 n 变量有

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\{\bigotimes_{i=1}^{n}(\bar{x}_i\quad x_i)\}\cdot c] \tag{1-12}$$

二变量函数的 RM 展开式为

$$f(x_1,x_2)=b_0\oplus b_1x_2\oplus b_2x_1\oplus b_3x_1x_2$$

$$=(1\quad x_2\quad x_1\quad x_1x_2)*\begin{bmatrix}b_0\\b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

$$=\{(1\quad x_1)\otimes(1\quad x_2)\}*\begin{bmatrix}b_0\\b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\{\bigotimes_{i=1}^{2}(1\quad x_i)\}*b]$$

类似地,对于 n 变量则有

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\{\bigotimes_{i=1}^{n}(1\quad x_i)\}*b] \tag{1-13}$$

* 表示两矩阵相应元素相乘后进行模 2 加,即用模 2 加代替原来的加法。

五、最小项展开与 RM 之间的转换

1. 矩阵转换法

(1) 求转换矩阵

以二变量函数为例,它的最小项展开式为

$$f(x_1,x_2)=c_0\bar{x}_1\bar{x}_2+c_1\bar{x}_1x_2+c_2x_1\bar{x}_2+c_3x_1x_2$$

由于任意两个最小项相与(相乘)为 0,因此根据异或运算的性质上式可写成

$$f(x_1,x_2)=c_0\bar{x}_1\bar{x}_2\oplus c_1\bar{x}_1x_2\oplus c_2x_1\bar{x}_2\oplus c_3x_1x_2=\{\bigotimes_{i=1}^{2}(\bar{x}_i\quad x_i)\}*c]$$

对于 n 变量则有