

发 散 思 维

大课堂

- 同步最新教材
- 导引思维发散
- 点燃智慧火花
- 培养创新能力

丛书主编 希扬

第三次修订版

初三数学

本书主编 源 流



龍 門 書 局

发散思维大课堂

第三次修订版

初三数学

源 流 主 编

源 流 陈明铸 陈民胜 编 著
齐 健 叶旼田 郭莉君

龍 門 書 局

2002

版权所有 翻印必究

本书封面贴有科学出版社、龙门书局激光防伪标志，
凡无此标志者均为非法出版物。

举报电话：(010)64034160, 13501151303(打假办)

发散思维大课堂(第三次修订版)

初三数学

主 编 源 流

责任编辑 张启男 张明学

龙 门 书 局 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

<http://www.sciencep.com>

中国人民解放军第1201工厂印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

1999年6月第 一 版 开本：850×1168 1/32

2002年6月第三次修订版 印张：14 1/2

2002年6月第16次印刷 字数：454 000

印数：367 001—517 000

ISBN 7-80111-682-8/G·597

定 价：16.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)



主编寄语

品牌越世纪 书香二百年

在铺天盖地的教辅书世界里，最难作假，最逃不过读者明眼的应该是书的质量。

《发散思维大课堂》以它特有的风采，风风火火地走过了四个春秋，其销售量已达 40 余万套。可谓山花如海，好评如潮。它响亮的名字给人以鼓舞；它厚重的内容给人以自信；它所激发的灵感给人以无穷的智慧。无数莘莘学子因为有了它，学习变得更轻松，不少考生步入了理想的殿堂——圆梦重点高中、重点大学。

2002 年修订出版的《发散思维大课堂》将以崭新的面貌展现在读者面前，请接受它的爱吧！您的学习将因为有了它而变得更加精彩！

希 扬

2002. 6

11-286

《发散思维大课堂》丛书

主 编：希 扬

副主编：源 流

编 委：孙济占

张功俭

王兴桃

陆仁章

丁赉禧

宋 力

贾振辛

张启男

编
委
会

启动发散思维 挖掘深层智能

——《发散思维大课堂》序

《发散思维大课堂》是我们奉献给广大读者的涵盖中学主要课程且与现行教材同步的素质教育辅导丛书。培养和造就无数有慧心、有灵气、会学习、能创新的人才，是我们教育和出版工作者的神圣使命；而引导中学生学会科学思维的方法，借以挖掘自身潜能，提高学习质量、效率和整体素质，是我们研究的重大课题。

思维是人类特有的一种脑力活动。孔子说“学而不思则罔”。“罔”即迷惑而无所所得。意思是说，只读书而不思考，就等于没有读书。哲学家哥德也曾风趣地说：“经验丰富的人读书用两只眼睛。一只眼睛看到纸面上的话，另一只眼睛看到纸背面的话。”“纸背面的话”就是指思维，指要思要想，要多思多想。这些至理名言深刻地揭示了思维与学习的辩证关系。

发散思维，即求异思维。它包括横向思维、逆向思维及多向思维。它要求你放开眼界，对已知信息进行分析、综合，并科学加工，从而收到“一个信息输入，多个信息产出”的功效。它的特色，表现在思维活动的多向性；它的功能，表现为可以开启心扉，震撼心灵，挖掘深层信息，架设起由已知、经可知、达未知的桥梁，创造出新的思路和解法；它的操作，要求从一点出发，向四周辐射，“心骛八极，思接千载”，从而编织起信息网络，达到思维的预想目标。

近年来，笔者发现一些具有远见卓识的学者、教师、出版家，已将“发散思维”引入中学课堂，取得可喜成果。师生们称赞说，运用发散思维“进行思维与灵魂的对话”，使我们深深体味到了“纸上得来终觉浅，心中悟出方知深”的真谛；不仅开阔了视野，而且取得了举一反三、触类旁通的效果。

鉴于发散思维的良好效应,我们特邀了对这方面有建树的老师,将这种创新思维运用到语文、英语、数学、物理、化学等教学之中,并精心设计出学生易于接受且独具特色的这套素质教育丛书。

这套丛书具有显著的四大特点,每一个特点都体现创新意识。

1. 高标准 指在如林的教辅读物中,它博采众家之长,自成体系。它不仅传播知识信息,更着意进行科学思维与方法的点拨,能促使学生学会思考、学会分析、学会应用。

2. 新角度 指它在中学主要课程中对教材的处理和试题的设计运用了发散思维,对重点难点的点拨与导练,呈现出新的模式和跨越,蕴涵着对学生智能的深层开发。

3. 大视野 指丛书眼界开阔,立足课内,向课外拓展,知识面宽,信息量大,涵盖率高;且以人才开发为动力,坚持“一切为了学生,为了一切学生”的原则;体现了智力开发的针对性与具体操作的实用性。

4. 广思路 指引导学生从多角度思考和切入问题,并向纵深发展。它不仅探索了多种信息的深邃内涵,也着力探索了信息的广阔外延;力图培养与规范学生驾驭信息的能力,激发他们去寻找自己新的增长点。

好书凭借力,送君上青云。古人说:“君子爱人,必教之以其方。”这套丛书会教你:“博学之,审问之,慎思之,明辨之,笃学之。”尤其能助你学会思考!

寸有所长,尺有所短。发散思维教学毕竟是近年来在教学百花园中出现的新事物,目前尚难尽善尽美。万望朋友们不吝赐教。

希 扬

2000年1月

目 录

★ 第一部分 代 数 篇

第十二章 一元二次方程	1
基本目标要求	1
基础知识导引	1
重点难点点拨	4
发散思维导练	7
★ 发散思维分析	7
★ 发散思维应用	7
(一) 一元二次方程	7
(二) 简单的二元二次方程组	41
巩固基础训练	45
提高能力测试	49
第十三章 函数及其图象	54
基本目标要求	54
基础知识导引	54
重点难点点拨	56
发散思维导练	59
★ 发散思维分析	59
★ 发散思维应用	60

(一) 平面直角坐标系及函数	60
(二) 一次函数的图象和性质	67
(三) 二次函数及其图象	83
(四) 反比例函数及其图象	119
巩固基础训练	127
提高能力测试	132
第十四章 统计初步	138
基本目标要求	138
基础知识导引	138
重点难点点拨	140
发散思维导练	142
★ 发散思维分析	142
★ 发散思维应用	143
(一) 平均数、众数与中位数	143
(二) 方差和频率分布	151
巩固基础训练	165
提高能力测试	170

★ 第二部分 平面几何篇

第六章 解直角三角形	175
基本目标要求	175
基础知识导引	175
重点难点点拨	177
发散思维导练	178
★ 发散思维分析	178
★ 发散思维应用	179
(一) 锐角三角函数	179
(二) 解直角三角形	187
巩固基础训练	207
提高能力测试	213
第七章 圆	219
基本目标要求	219

基础知识导引·····	219
重点难点点拨·····	224
发散思维导练·····	226
★ 发散思维分析·····	226
★ 发散思维应用·····	226
(一) 圆的有关性质 ·····	226
(二) 直线和圆的位置关系 ·····	249
(三) 圆和圆的位置关系 ·····	292
(四) 正多边形和圆 ·····	324
巩固基础训练·····	338
提高能力测试·····	350
综合能力测试题(一)·····	363
综合能力测试题(二)·····	367
综合能力测试题(三)·····	371
参考答案·····	376

第一部分 代数篇



第十二章 一元二次方程

基本目标要求

一、了解一元二次方程的概念,掌握一元二次方程的解法.灵活运用一元二次方程的解法求方程的根.

二、理解一元二次方程根的判别式,能运用它解决一些简单的问题,会列一元二次方程解应用题.

三、掌握可化为二元二次方程的分式方程的解法,会验根.

四、了解二元二次方程、二元二次方程组的概念;会用代入法解由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组;通过解二元二次方程组掌握“消元”、“降次”的数学方法.

* 五、掌握一元二次方程根与系数的关系,会用它解决一些简单的问题.

* 六、掌握由一个二元二次方程和一个可分解为两个二元一次方程的方程组成的二元二次方程组的解法.

基础知识导引

一、一元二次方程的概念及其解法

1. 整式方程

方程的两边都是关于未知数的整式,这样的方程叫做整式方程.

2. 一元二次方程

只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是2的整式方程叫做一元二次方程.

关于 x 的一元二次方程的一般形式为: $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 其中 ax^2 叫做二次项, a 叫做二次项系数; bx 叫做一次项, b 叫做一次项系数; c 叫做常数项. 一次项系数 b 和常数项 c 可以是任何实数, 二次项系数 a 是不等于零的实数.

3. 一元二次方程的解法

(1) 直接开平方法: 用直接开平方求解一元二次方程的方法叫做直接开平方法. 用直接开平方法解形如 $(x - a)^2 = b (b \geq 0)$ 的方程, 得解为 $x = \pm\sqrt{b} + a$.

(2) 配方法: 把方程整理成 $ax^2 + bx = -c (a \neq 0)$ 的形式, 并用二次项系数去除方程的各项, 得 $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$.

在方程两边各加上一次项系数一半的平方: $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$, 使得方程的左边成为一个二项式的完全平方: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, 只要方程右边是非负数, 就可用直接开平方法求出方程的根.

(3) 公式法: 把一元二次方程化成一般形式, 然后把各项系数 a, b, c 的值代入求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} (b^2 - 4ac \geq 0)$ 就可以求得方程的根, 这种解一元二次方程的方法叫做公式法.

(4) 因式分解法: 把方程变形为一边是零, 把另一边的二次三项式分解成两个一次因式的积的形式, 让两个一次因式分别等于零, 得到两个一元一次方程, 解这两个一元一次方程所得到的根, 就是原方程的两个根. 这种解一元二次方程的方法叫做因式分解法.

4. 一元二次方程根的判别式

$b^2 - 4ac$ 叫做一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根的判别式, 用符号“ Δ ”表示.

(1) 当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根;

(2) 当 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根, 即 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$; (以上两种情况综合为当 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ 时方程有实根.)

(3) 当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时, 方程没有实数根.

上述命题的逆命题也是正确的:

一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 若有两个不相等的实数根, 必有

$\Delta > 0$; 若有两个相等的实数根, 必有 $\Delta = 0$ (若有实数根, 必有 $\Delta \geq 0$); 若没有实数根, 必有 $\Delta < 0$.

5. 一元二次方程的根与系数的关系 (即韦达定理)

设方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个根为 x_1, x_2 , 那么 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

韦达定理的逆命题也是正确的, 即如果: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, 那么 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个根.

6. 二次三项式的因式分解

分解二次三项式 $ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的因式时, 先求出一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个根 x_1, x_2 , 然后写成 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. 这里特别要注意: 在书写答案时, 不要漏写二次项系数 a .

7. 可化为一元二次方程的分式方程

分母中含有未知数的方程叫做分式方程. 本节研究可化为一元二次方程的分式方程.

把分式方程化为整式方程, 通常用各分式的最简公分母去乘方程的两边, 约去分母, 使之成为整式方程; 有时也可根据某些方程的特点, 采用换元法, 把分式方程化成整式方程去求解. 分式方程必须要验根. 检验增根的方法一般是将变形后所得整式方程的根代入原方程各分式的分母 (或代入最简公分母) 中去, 如果使分母为零的, 就是增根; 如果不使分母为零的, 就是原方程的根.

8. 简单的高次方程

未知数的最高次数大于 2 的一元方程, 称作一元高次方程. 高次方程解法的基本思想是降次, 而降次的基本方法是因式分解和换元, 二元方程一般也采用换元法将原方程转化为一元二次方程去继续求解.

二、简单的二元二次方程组

1. 二元二次方程

含有两个未知数, 且含有未知数的项的最高次数是 2 的整式方程, 叫做二元二次方程. 它的一般式是 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 (a, b, c$ 不全为零), ax^2, bxy, cy^2 是二次项, dx, ey 是一次项, f 是常数项.

2. 简单二元二次方程组的解法

解简单二元二次方程组的基本思想是消元和降次, 消元、降次常用的方法有: 代入消元法、加减消元法、因式分解法、换元法等, 从而使之转化为一

元二次方程或二元一次方程组,进而求得原方程组的解.

三、列一元二次方程解应用题的一般步骤

(1) 审题; (2) 设未知数; (3) 列方程(组); (4) 解方程(组); (5) 检验,书写答案.

重点难点点拨

本章重点是一元二次方程的解法,解无理方程与分式方程,列方程解应用题.

本章难点是配方法解一元二次方程,一元二次方程的应用,分式方程、无理方程的验根问题,简单二元二次方程组的解法.要掌握重点、难点,必须注意以下问题.

一、与一元二次方程有关的问题

1. 解一元二次方程的基本思想方法是通过“降次”,将它转化为两个一元一次方程

一元二次方程的四种解法中开平方是最基本的方法,配方与求根公式法是最重要的方法,因式分解法是简便的常用方法,解某些特殊的方程用配方法和因式分解法比较简便.

2. 应用根的判别式定理解有关问题

(1) 不解方程,判别方程的根的性质.

利用判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 判别方程有没有实根,如果有实根,实根是否相等,即

$b^2 - 4ac > 0$ 时,方程有两不等实根;

$b^2 - 4ac = 0$ 时,方程有两相等实根;

$b^2 - 4ac < 0$ 时,方程没有实根.

(2) 根据方程的根的性质,确定方程中字母系数的取值范围.

① 判别式定理的逆定理 实系数一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$),如果有两个不相等的实数根,则 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$;

如果有两个相等的实数根,则 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$;

如果没有实数根,则 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

② 利用判别式定理的逆定理,根据方程根的性质,求出字母系数的取值范围.

③ 注意二次项系数不为零是方程有两个不等的实根的前提.

(3) 判断二次三项式是否是完全平方式.

当 $a \neq 0$, 且 $b^2 - 4ac = 0$ 时, 则 $ax^2 + bx + c$ 就是一个完全平方式.

3. 韦达定理的应用

(1) 检验方程的根是否正确.

(2) 已知二次方程的一个根, 可求出方程的另一个根或方程中字母系数的值.

(3) 已知一个二次方程的两根或已知两根的和与两根的积, 作此方程.

(4) 利用韦达定理求一元二次方程根的代数式的值.

(5) 不解方程, 判别根的性质和符号.

① 因为两根 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, 故可利用 $\frac{c}{a}$ 判别两实根的符号是否相同及是否有根等于零. 即

$\frac{c}{a} > 0$ 时, 两实根同号;

$\frac{c}{a} < 0$ 时, 两实根异号;

$\frac{c}{a} = 0$ 时, 至少有一个根等于零.

② 因为 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, 故可利用 $-\frac{b}{a}$ 判别绝对值较大的根是正还是负或者两根绝对值相等. 即

$-\frac{b}{a} > 0$ 时, 正根的绝对值较大;

$-\frac{b}{a} < 0$ 时, 负根的绝对值较大;

$-\frac{b}{a} = 0$, 两根的绝对值相等.

4. 一元二次方程特殊根的运用

(1) 设一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个实根 x_1, x_2 , 如果 $a + b + c = 0$, 则 $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$; 反之, 如果 $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$, 则 $a + b + c = 0$.

(2) 设一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个实根 x_1, x_2 , 如果 $a - b + c = 0$, 则 $x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$; 反之, 如果 $x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$, 则 $a - b + c = 0$.

5. 一元二次方程两根差的绝对值的应用

如果 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个根, 那么其

差的绝对值: $|x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$.

6. 两个一元二次方程只有一个公共根

(1) 设公共根为 a , 则 a 同时满足这两个一元二次方程;

(2) 用加减法消去 x^2 的项, 求出公共根或公共根的有关表达式;

(3) 把公共根代入原方程中的任何一个方程, 就可以求出字母系数的值或字母系数之间的关系式.

7. 两个一元二次方程只有一个根互为相反数

方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 与方程 $ax^2 - bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个根互为相反数, 因此, 要使一个一元二次方程的根改变符号, 只需将这个方程的一次项系数改变符号.

8. 两个方程只有一个根互为倒数或互为负倒数

方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 和 $cx^2 + bx + a = 0 (a \neq 0, c \neq 0)$ 的两个根分别互为倒数. 因此, 要使一个一元二次方程的根变为原来各根的倒数, 只需将这个方程的二次项系数与常数项互换.

二、简单的二元二次方程组的解法

(1) 用代入消元法解由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组的解法.

(2) 用韦达定理解形如 $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$ 的二元二次方程组, 可将其转化为求

方程 $z^2 - az + b = 0$ 的两个根.

(3) 用因式分解法解由一个二元二次方程和一个可以分解为两个二元一次方程的方程组成的方程组.

三、列方程解应用题问题

(1) 审题要弄清已知量和未知量, 问题中的等量关系;

(2) 设元有直接设元和间接设元, 一般是根据列方程解题是否简便而进行选择;

(3) 列方程(组)时, 方程两边的量要相等, 方程两边代数式的单位要相同, 一般所设元的个数应与所列方程的个数是相同的;

(4) 检验包括判断是否是方程的解和是否符合题意两个方面;

(5) 掌握解应用题中的等量关系, 如匀速行程: 路程 = 速度 $\times$ 时间; 工程问题; 航行问题; 混合物问题; 增长率问题; 十进制整数问题. 分析其中的等量关系, 可以采用列式法、线段图示法、列表法.

发散思维导练

★ 发散思维分析

本章的主要内容有:一元二次方程的解法及其应用,根的判别式及根与系数的关系,可化为一元二次方程的分式方程的解法,简单的二元二次方程组的解法,以及由上述内容反映出来的消元、降次等数学思维规律及方法.本章解方程的思想方法是“换元法”,通过换元法,可使较复杂的方程的求解问题转化为较简单的方程的求解问题.消元法则是把高次方程或多元方程(方程组),通过有关运算转化为一元一次或一元二次方程,达到由难变易的目的.“降次法”利用开方、因式分解逐步“降次”,有时也可与换元法配合,灵活运用.特别注意解分式方程时要验根,防止增根或漏根.

本章是初中代数重要的一章,它把一元二次方程判别式,根与系数的关系及解方程的四个基本方法紧密地结合起来,可解决一系列关于方程的求根、求值、化简、证明等初等数学问题.

本章安排一定数量的解法发散、组合发散题,解法发散通过进行一题多解、一题多变、一题多得的训练,使学生思维具有流畅性、灵活性和独创性.组合发散可拾零为整,注意整体构思,可发挥整体功能.随着发散思维方法的运用和拓展,进一步点拨思路,揭示规律,熟练技巧,培养综合运用所学知识的能力,提高分析问题、解决问题的能力,为学习其他数学知识打下坚实基础.

★ 发散思维应用

(一) 一元二次方程

典型例题 1

(1) 用开平方法解方程: $mx^2 + n = 0 (m \neq 0)$

(2) 用配方法解方程: $x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0$

(3) 用公式法解方程: $4p = 1 - \frac{3}{2}p^2$

(4) 用因式分解法解方程: $x^2 - 2(\sqrt{3} + \sqrt{5})x + 4\sqrt{15} = 0$

(1) 分析 根据平方根的概念,可用开平方法解形如 $x^2 = c (c \geq 0)$ 的方程.