

高等学校教材

非线性网络与系统

丘水生

电子科技大学出版社

内 容 提 要

本书共十二章，主要内容有：非线性元件的性质及分类、非线性电阻网络及动态网络分析、非线性特殊现象、非线性系统的分析方法及稳定性理论等。书中讨论了不少典型电路和工程问题。

本书可作为无线电技术专业本科高年级学生及电路与系统专业研究生的教材或参考书，对有关专业的科技工作者也有一定的参考价值。

高等学校教材 非线性网络与系统

丘水生 编著

*

电子科技大学出版社出版
(中国成都建设北路二段四号)
电子科技大学出版社印刷厂印刷
四川省新华书店发行

*

开本 787×1092 1/16 印张 13.25 字数 316千字
版次 1990年4月第一版 印次 1990年4月第一次印刷
印数 1—2500册

中国标准书号 ISBN 7-81016-197-0/TN·52
(15452·86) 定价：4.30元

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校、中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力，有关出版社的紧密配合，从1978年至1985年，已编审、出版了两轮教材，正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要，贯彻“努力提高教材质量，逐步实现教材多样化，增加不同品种、不同层次、不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材”的精神，我部所属的七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会，在总结前两轮教材工作的基础上，结合教育形势的发展和教学改革的需要，制订了1986~1990年的“七五”（第三轮）教材编审出版规划。列入规划的教材、实验教材、教学参考书等近400种选题。这批教材的评选推荐和编写工作由各编委会直接组织进行。

这批教材的书稿，是从通过教学实践、师生反映较好的讲议中经院校推荐，由编审委员会（小组）评选择优产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处，希望使用教材的单位，广大教师和同学积极提出批评建议，共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

机械电子工业部
电子类教材办公室

前 言

本书是根据机械电子工业部无线电技术与信息系统教材编委会电路与系统编审组制订的提纲编写的，经1988年电路与系统编审组第七次工作会议评选为推荐教材。本书可作为无线电技术专业本科高年级学生及信号、电路与系统专业研究生的教材或参考书，对有关专业的科技工作者也有一定的参考价值。

本书介绍非线性电路与系统的定性理论、图解法和近似解析法等基础理论。在动态网络的频域近似分析方面，主要介绍适用于非线性高阶网络的各种方法，以弥补国内外大多数同类教材偏重于二阶网络的不足。书中的基本内容，对于理解非线性系统机理、非线性网络设计和计算机辅助分析等都有重要意义。

书中注意理论联系实际，讨论了相当数量的典型电路和工程问题。在着重阐述基本知识、特殊现象和实用方法的同时，也注意反映国内外的最新动态，其中包括作者本人及其合作者近年来的一些研究成果。由于作者水平所限，书中难免有错误与不妥之处，请专家和读者予以指正。

本书第二、三、四章等内容，主要来源于蔡少棠教授以及国内专家们的有关著作。在此，向他们谨致谢忱。

本书由武汉大学张肃文教授主审。张肃文教授自始至终悉心指导本书的编写工作，提出了许多宝贵的修改意见，作者谨致以诚挚的谢意。

在准备编写本书之时再次阅读了冯秉铨教授的遗稿《振荡理论》，从中得到了许多启发，也产生了深深的怀念。

丘水生

于华南理工大学

目 录

第一章 结 论	(1)
§1-1 电路与系统.....	(1)
§1-2 自治与非自治系统.....	(1)
§1-3 时变线性系统.....	(1)
§1-4 非线性系统.....	(2)
§1-5 非线性网络与系统的分类.....	(3)
§1-6 非线性系统的分析方法.....	(3)
§1-7 非线性电路理论.....	(4)
第二章 非线性元件的性质及其分类	(5)
§2-1 非线性与线性元件及其分类.....	(5)
1. 基本二端代数元件.....	(5)
2. 高阶二端代数元件.....	(6)
3. 基本多端代数元件.....	(8)
4. 高阶多口代数元件.....	(11)
5. 多口混合代数元件.....	(11)
6. 基本动态元件.....	(13)
§2-2 非线性元件的性质.....	(15)
1. 无源性 with 有源性.....	(15)
2. 局部无源性与局部有源性.....	(16)
3. 无损性.....	(16)
4. 非能性.....	(19)
5. 互易性与反互易性.....	(19)
§2-3 小 结.....	(21)
习 题.....	(21)
第三章 非线性电阻网络分析	(22)
§3-1 电阻网络的工作点.....	(22)
§3-2 DP 图与 TC 图.....	(22)
§3-3 图解分析法.....	(23)
1. 用图解法确定工作点.....	(23)
2. 用图解法确定 DP 图.....	(28)
3. 用图解法确定 TC 图.....	(29)
4. 含有三端电阻器的网络的图解分析.....	(30)
§3-4 等效原理与对称性原理.....	(31)
1. 等效网络的定义.....	(31)

2. 基于 DP 图相同的等效	(31)
3. 基于工作点相同的等效	(33)
4. 电源位移定理	(33)
5. 对称性原理	(35)
§3-5 分段线性迭代法	(38)
§3-6 非线性电阻网络解答的唯一性定理	(43)
§3-7 小 结	(46)
习 题	(46)
第四章 非线性电阻网络综合与造型	(48)
§4-1 电阻网络的图解综合法	(48)
1. 网络综合	(48)
2. 工作点的综合	(48)
3. DP 图的综合	(50)
4. TC 图的综合	(54)
§4-2 非线性电阻网络模型的综合	(56)
1. 器件造型与网络模型综合	(56)
2. 受控电阻器全局模型的综合	(56)
3. 三端电阻器全局模型的综合	(58)
4. 修正模型的方法	(60)
5. 晶体三极管的直流模型	(61)
§4-3 小 结	(62)
习 题	(62)
第五章 非线性动态网络的近似分析	(64)
§5-1 非线性元件的近似解析式	(64)
1. 非线性特性的近似表示	(64)
2. 展开非线性函数的一种有效方法	(65)
§5-2 非线性网络的数学模型	(65)
1. 网络的状态方程描述	(66)
2. 网络的高阶微分方程描述	(66)
3. 网络的等效线性化框图描述	(66)
4. 网络的高阶算子方程描述	(66)
§5-3 网络的非线性高阶算子方程的建立	(66)
§5-4 非线性网络分析的基本问题	(71)
1. 网络的平衡点与周期解	(71)
2. 平衡点与周期解的稳定性	(71)
3. 平衡点与周期解的数目	(71)
§5-5 小 结	(71)
习 题	(72)
第六章 非线性二阶系统的近似分析方法	(73)

§6-1	缓变振幅法	(73)
§6-2	奇异扰动法	(75)
§6-3	渐近法	(79)
1.	渐近解的构造	(79)
2.	一次近似与二次近似	(80)
3.	简单自振系统	(81)
§6-4	相平面法	(82)
1.	相平面	(82)
2.	解的存在唯一性定理	(83)
3.	奇点与平衡点	(83)
4.	奇点稳定性	(83)
5.	线性系统奇点的稳定性	(84)
6.	高阶奇点	(88)
7.	极限环	(88)
§6-5	小 结	(89)
	习 题	(90)
第七章	描述函数法	(91)
§7-1	描述函数法原理	(91)
1.	线性系统的方块图表示	(91)
2.	非线性函数的等效线性化	(91)
§7-2	系统方块图的变换与简化	(92)
§7-3	典型非线性的描述函数	(94)
§7-4	描述函数的实验确定	(96)
§7-5	确定非线性系统周期解的图解法	(97)
1.	自治系统	(97)
2.	非自治系统	(97)
§7-6	双输入描述函数	(98)
1.	频率不相关的双信号	(99)
2.	频率相关的双信号	(99)
§7-7	增量描述函数	(100)
§7-8	谐波平衡法	(100)
§7-9	小 结	(101)
	习 题	(102)
第八章	等效小参量法	(103)
§8-1	等效小参量法原理	(103)
§8-2	高阶强非线性自治系统分析	(107)
§8-3	高阶非线性保守系统分析	(111)
§8-4	不利用频率展开式的简化算法	(113)

§8-5	主振荡谐波成分的估计	(115)
§8-6	近似周期解误差的估计	(117)
§8-7	非线性组合系统分析	(118)
1.	非线性函数的等效方块图	(118)
2.	简单反馈系统	(121)
3.	非线性组合系统	(122)
§8-8	非线性网络分析	(122)
§8-9	小结	(124)
	习 题	(124)
第九章	Volterra 级数法	(126)
§9-1	Volterra 级数	(126)
1.	非线性动态系统的Volterra 级数表示	(126)
2.	Volterra 级数与幂级数的内在联系	(128)
3.	Volterra级数的基本性质	(128)
§9-2	多重拉普拉斯变换	(129)
§9-3	非线性系统的频域分析	(132)
1.	理想化系统	(132)
2.	简单非线性系统	(133)
3.	组合系统的方块图变换	(134)
4.	频域核的确定	(136)
§9-4	非线性自治系统分析	(137)
1.	振荡平衡条件	(137)
2.	一阶决定方程	(138)
3.	二阶决定方程	(139)
§9-5	非线性网络分析	(140)
§9-6	小结	(148)
	习 题	(148)
第十章	系统稳定性理论	(149)
§10-1	稳定性的基本概念	(149)
1.	稳定性的基本意义	(149)
2.	平衡点稳定性	(149)
3.	轨道稳定性	(151)
4.	系统稳定性	(151)
§10-2	确定周期解稳定性的一个充分条件	(151)
1.	Loeb 判据	(151)
2.	异步扰动作用下的周期解稳定性	(153)
3.	周期解稳定性的一个充分条件	(153)
§10-3	二阶非线性系统的周期解稳定性	(153)

1. 非线性自治系统·····	(153)
2. 非线性非自治系统·····	(154)
§10-4 高阶非自治系统周期解的稳定性·····	(155)
§10-5 李亚普诺夫间接方法·····	(159)
§10-6 李亚普诺夫直接方法·····	(160)
§10-7 小 结·····	(164)
习 题·····	(165)
第十一章 非线性网络中的特殊现象 ·····	(166)
§11-1 典型的非线性现象·····	(166)
1. 软自激与硬自激振荡·····	(166)
2. 组合振荡·····	(167)
3. 分谐波振荡·····	(168)
4. 强迫同步·····	(169)
5. 异步激发·····	(169)
6. 异步熄灭·····	(169)
7. 外参量激励·····	(170)
8. 概周期振荡·····	(170)
9. 多振荡模式·····	(171)
10. 跳跃现象·····	(172)
11. 混沌现象·····	(172)
§11-2 间歇振荡现象分析·····	(175)
§11-3 同步振荡器·····	(176)
§11-4 参量放大器与混频器·····	(179)
§11-5 RC 选频放大器的稳定性·····	(180)
§11-6 小 结·····	(182)
习 题·····	(183)
第十二章 高阶非线性动态网络 ·····	(184)
§12-1 振荡器极限环的失真度·····	(184)
§12-2 振荡器的频率稳定度·····	(187)
§12-3 两个相互耦合的振荡器·····	(190)
§12-4 集成运算放大器的相位补偿·····	(192)
§12-5 有源滤波器·····	(194)
§12-6 小 结·····	(196)
习 题·····	(197)
参考文献 ·····	(198)

第一章 绪 论

§ 1-1 电路与系统

人们在进行科学研究和生产实践过程中，往往需要研究各种各样的系统。电系统、机械系统、生物系统等都是物理系统。描述物理系统的数学方程式，可称为数学系统。

从一般的意义上说，系统是一个由若干互有关联的单元(或等效单元)组成的并具有某些特定功能的有机整体。无线电技术中所指的系统，大多是各种不同复杂程度的用作信号传输与处理的组成体。按照通常的工程概念，常常把简单的电路称为电路，把较复杂的电路称为网络，而复杂的甚至包括非电单元的组合体则称为系统。在理论上，如果用电学的观点和方法来分析问题，往往把被研究的对象叫做电路。若从抽象的数学方程出发去研究电路，则把研究对象说成系统。在这种情况下，一个简单的电路也可以称为系统。在本书中，“电路”与“网络”往往是通用的。至于“系统”，有时指数学方程，有时则是指电路，其具体意思由上下文决定。

“系统”的概念在不断的发展，目前已经形成了一门叫系统工程的学科，它的研究对象不仅仅是电系统，也包括了交通运输系统、经济系统等等，已进入了社会科学的领域。

§ 1-2 自治与非自治系统

如果在电路中没有外来信号，或者外来信号不依赖于时间，则系统的微分方程式不显含时间变量。这种系统称为自治系统。

如果电路加有随时间变化的激励信号，或者电路的某个参量在一个交变的外部作用影响下不断地改变，则描述此电路的微分方程将显含时间变量，这类系统称为非自治系统。

若一个串联回路中只有电阻、电感和电容，而没有外信号，这个电路就是一个自治系统。

若在RLC串联回路中串接一个交流信号，则振荡回路方程式为

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}I + \frac{1}{LC}I = \frac{1}{L}E(t) \quad (1-1)$$

式中 I 为回路电流。上式显含 t ，是一个非自治系统。若去掉上述串联回路中的串联信号，但电容量随着某一个外信号而不断变化，则式(1-1)变为

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}I + \frac{1}{LC(t)}I = 0 \quad (1-2)$$

式中的 $C(t)$ 是时间函数，故这系统也是非自治系统。

非自治系统有两种。式(1-1)称为强迫振荡系统；式(1-2)叫做参量激励系统。

§ 1-3 时变线性系统

1. 线性系统

线性系统，就是服从常系数线性方程的系统。线性系统可分为两大类。由线性代数方程描

述的,称为非动态线性系统或线性即时系统。由线性微分方程描述的,则称为线性动态系统。从物理观点来看,迭加定理有效和均匀性得到满足,这是线性系统的两个基本特点。所谓迭加定理有效,即是线性系统内各个激励信号产生的响应是相互独立的。为了分析一个系统对于多个激励信号的响应,可以先分别确定单一激励的响应,然后将它们加起来。若系统的两个输入信号的比例是 n ,则输出信号中的两个分量的比例也必然是 n ,这种保持比例因子的特点称为均匀性。

2. 时变线性系统

上面讨论的线性系统,其描述方程的系数是常数,一般称为时不变线性系统。另一种线性系统(动态的或即时的),其方程中的系数随时间而变化,叫做时变线性系统或变参数线性系统,例如

$$\ddot{x} + (0.1 \sin \omega t) \dot{x} + x = 0 \quad (1-3)$$

时变线性系统不具备上述线性系统的两个基本特点。相反,它们具有非线性系统的基本特点。

§ 1-4 非线性系统

1. 非线性系统

可以用非线性代数方程或非线性微分方程来描述的系统,称为非线性系统。非线性微分方程的特征是,系统方程中的变量及其各阶导数的系数至少有一个与变量有关。例如

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2) \dot{x} + x = 0 \quad (1-4)$$

式中 μ 为常数。

非线性系统除了不满足迭加定理之外,还具有时不变线性系统所没有的许多特点。这些特点将在第十一章中介绍。

2. 强非线性系统

按照通常的概念,若非线性系统的参量 $\mu \ll 1$,则该系统称为弱非线性系统;若 $\mu > 1$,该系统就叫做强非线性系统。 μ 值介于两者之间的,可以称为较强非线性系统。就是说,系统非线性的强弱,通常是按照参量 μ 值的大小来划分的。

应当指出,一个满足 $\mu > 1$ 的非线性系统,其振荡可以相当接近于一个正弦波;而一个 $\mu < 1$ 的系统的振荡波形可能包含较强的高次谐波,就是说,个别环节非线性的强弱与整个系统非线性的强弱并不完全是一回事。因此,通常的划分方法不一定能够反映系统非线性的强弱程度。一个系统是否具有明显的非线性性态不仅与非线性项的大小有关,也与系统的滤波特性有关。

3. 复杂非线性系统

按照工程上的概念,电网络是按照电路的复杂程度(元、部件的多少)来分类的。这可以说是线性系统理论的一个概念。然而,对于非线性系统来说,一个二阶非自治系统或者三阶自治系统,便可能出现非常复杂的混沌振荡^②。因此,在非线性理论中,一个二阶非自治系统可以是复杂系统。在可能引起混淆的地方,可以把这种系统称为非线性复杂振荡系统。相反,一个阶数甚高的非线性系统,也可以是简单振荡系统。

① 若将系统方程各项系数中的最大者变换为1,则通常把非线性项的系数 μ 称为非线性方程的参量。

② 见第十一章§11-1。

§ 1-5 非线性网络与系统的分类

非线性系统可分为两大类，就是非线性即时系统和非线性动态系统。服从非线性代数方程的，为非线性非动态系统(即时系统)。由非线性微分方程来描述的，则是非线性动态系统。非线性动态系统又可分为如下几种：

1. 一般动态系统

描述这种系统的微分方程是

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (1-5)$$

式中 x 是系统的状态变量， $f(x, t)$ 为扰动力，均是多维向量。

2. 时滞动态系统

这种系统的描述方程是一个微分-差分方程

$$\dot{x} = f(x(t), x(t-\tau), t) \quad (1-6)$$

式中 x , f 和 τ 均是多维向量。由上式可以看出，这种系统的状态变量 $x(t)$ 的变化规律不仅与“现状” $x(t)$ 有关，也与其“历史” $x(t-\tau)$ 有关。

3. 随机动态系统

在这种系统的扰动力中，包含有随机分量，其描述方程为

$$\dot{x} = f(x, t) + \xi(t) \quad (1-7)$$

式中 $\xi(t)$ 为随机扰动。

4. 分布参数系统

这种非线性动态系统，是用偏微分方程来描述的。产生非线性振动的某种场或连续介质等，都属于这一类系统。

在本书中，网络即是电系统。因此，上述各名称中的“系统”换成“网络”后，就分别成为相应网络的名称了。

§ 1-6 非线性系统的分析方法

分析非线性系统的主要任务，就是确定系统的解和解的性质。为了确定解的局部或全局性质而进行的分析，称为定性分析。为了确定解的数值关系而进行的分析，就叫做定量分析。对于系统的稳态来说，定性分析的主要研究范围是：

- a) 平衡点与周期解的存在性与唯一性；
- b) 平衡点与周期解的个数；
- c) 平衡点与周期解的稳定性；
- d) 非线性特殊现象发生的条件。

定量分析的主要研究范围是：

- a) 平衡点的位置(坐标)；
- b) 稳态周期解的振幅、波形和频谱；
- c) 状态变量与系统参量之间的数量关系。

进行定性分析是为了确定系统的全局性质，以达到对系统全面了解的目的。定量分析在

于得到解的数量关系，往往只能获得局部的结果。容易理解，对一个电路有了定性的了解之后，定量分析才能有针对性地进行(可以避免盲目性)。例如，系统可能有多个解时，用计算机求得的一个解不能作为最后答案。相反，若系统只有一个解，为了寻找多解的额外计算将会浪费不少时间。一般来说，定性分析和定量分析都是必需的，是相辅相成的。

非线性系统的分析方法多种多样^[1,2]，主要有如下几大类：

1. 定性分析方法^[3]；
2. 图解法(拓扑方法)^[4]；
3. 近似解析法^[4-18]；
4. 数字计算机辅助分析法^[19-21]；
5. 模拟计算机或集成电路模拟法^[21]。

随着电子计算机的发展和普及，计算机几乎在所有分析方法中都得到了应用，计算机辅助分析(CAA)已逐渐成为一种强有力的工具。但是，对于非线性系统分析来说，以数值方法为基础的CAA方法并不是十全十美的。例如，在研究混沌现象时，通常的CAA方法不能解决根本问题；在寻找高阶非线性多解系统的全部解时，采用单纯的数值方法可能花费过多的机时。

对于非线性系统来说，目前还没有一种绝对优越的分析方法。一般来说，企图用一种方法来解决非线性系统的所有问题，是不大可能的。定性理论和频域近似分析方法之所以受到重视，正是由于这个缘故。

§ 1-7 非线性电路理论

在发明无线电的初期，非线性电路就得到了重要的应用。然而，非线性电路理论的发展是比较缓慢的。其原因之一是非线性电路的理论分析比线性电路要困难得多，更为主要的则是与生产技术发展的需求有关。随着电子技术的迅速发展，许多新的电子器件不断出现，电子电路与系统也越来越复杂，有许多非线性现象用传统的电路理论已经无法解释。在这种情况下，忽视非线性的传统做法再也不能适应新技术迅速发展的形势。因此，建立非线性电路理论的体系，已经显得十分必要了。

非线性电路理论包括器件与网络造型^[22-24]、电路分析^[22,25-35]、网络综合^[22,36,37]和故障诊断^[38]等各个方面。近十多年来，国际上非线性电路理论的发展十分迅速，有大量的文献可供参考^[1]。作为基础学科的非线性系统理论，是非线性电路理论与非线性自控系统理论共同的理论基础。因此，这两类物理系统的分析方法有许多是类似的，可以相互借鉴，有的则是可以通用的。

第二章 非线性元件的性质及其分类

§ 2-1 非线性与线性元件及其分类

1. 基本二端代数元件

在电路理论中，常用的变量有四个：电压 v ，电流 i ，电荷 q 和磁链 ϕ 。在这四个变量中， v 和 ϕ 动态相关； i 和 q 动态相关。对于二端元件，独立变量只有两个。因此，我们在四个变量中任取两个动态无关的变量，就可以定义一类基本元件。所以，基本二端代数元件共有四种。

由于电压和电流比较容易测量，人们通常采用 $v-i$ 曲线来表示二端器件的特性。若要得到完全准确的特性，就必须采用理想电压表和电流表对一个器件进行无数次的测量。这种测量称为假想测量。在测量中可能得到的任一对数据 (v, i) ，都可称为容许信号对。所有容许信号对的集合，就叫做器件的赋定关系。

顾名思义，假想测量是不现实的。实际上，人们总是采用理想模型来模拟实际器件，以便进行现实的分析 and 处理。理想模型的赋定关系可以是曲线、数学方程或一种特定的算法。

严格说来，元件是指电原理图中的基本“单元”，器件则为物理实体。换句话说，元件是电路理想模型的“积木块”，而器件则是电子装置的积木块。但是，在习惯上往往对元件和器件不加以区别，例如，把简单器件称为元件。这种名称上的混淆，有时可能引起概念上的错误。在进行阅读的时候，采用由上下文来确定“元件”含义的办法总是可取的。在本书中，一般都把元件与器件区别开来。

定义2-1 若二端元件的赋定关系为

$$f(\xi, \theta, t) = 0 \quad (2-1)$$

则称该元件为**基本二端代数元件**。式中 f 为代数函数， ξ 为 v 或 ϕ ， θ 为 i 或 q 。

当式(2-1)中不显含 t 时，称元件为非时变的或时恒的；否则就是时变的。今后除非特别说明，我们只讨论时恒元件。在此情况下，式(2-1)变为

$$f(\xi, \theta) = 0 \quad (2-2)$$

上式的特殊情况有

$$f(v, i) = 0; \quad f(v, q) = 0$$

$$f(\phi, i) = 0; \quad f(\phi, q) = 0$$

上列四式分别为二端电阻器、二端电容器、二端电感器和二端忆阻器的赋定关系式。

忆阻器(memristor)是记忆电阻器的简称。它是蔡少棠教授于1971年提出的。图2-1(a)和(b)

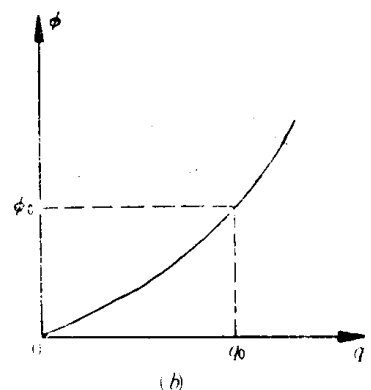
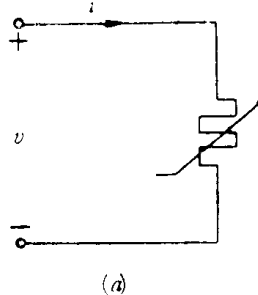


图 2 1

分别为忆阻器的符号及其特性。它的赋定关系为

$$\phi = f(q) \quad (2-3)$$

若考虑其端口电压和电流, 则有

$$v(t) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{df(q)}{dq} \frac{dq}{dt} = M(q)i(t) \quad (2-4)$$

式中

$$M(q) = \frac{df(q)}{dq} \quad (2-5)$$

$M(q)$ 为曲线 $f(q)$ 的斜率, 其单位为欧姆, 与电阻的单位相同。可见, 由图2-1所表示的二端元件可以看成是阻值随 q 而变化的电阻器。就是说, 忆阻器可解释为一种荷控电阻器。由于电荷代表了电流的积分, 电阻值 $M(q)$ 反映了 $i(t)$ 过去的“历史”, 因而这种元件称为忆阻器。有一些物理器件具有类似于忆阻器的性能, 例如库仑电池, 热敏电阻, 氖气灯泡等。在机械系统和生物系统中, 也可以找到类似的器件。

在线性电路中, ϕ - q 特性是通过坐标原点的一条直线, 于是有

$$M = \frac{\phi}{q} = \frac{d\phi}{dq} = \frac{d\phi}{dt} / \frac{dq}{dt} = \frac{v}{i} = R$$

可见, 在线性情况下, M 全等于电阻 R , 故没有必要另外定义记忆电阻。

实践证明, 非线性电阻元件是器件造型中使用最广泛的基本元件。大量电子器件的低频特性都可以用二端电阻器来模拟。人们提出了各种理想的二端电阻元件, 例如凹电阻器、凸电阻器、符号电阻器、全零器和无定器等等^[22], 其中主要的已列于表2-1中。现在以表中的编号为序, 将它们的数学表示式列出如下:

$$i = 0, v < 0; \quad v = 0, i > 0 \quad (2-6)$$

$$i = \frac{G}{2} [|v - E| + (v - E)] \quad (2-7)$$

$$v = \frac{R}{2} [|i - I| + (i - I)] \quad (2-8)$$

$$i = |v| \quad (2-9)$$

$$i = \operatorname{sgn} v \quad (2-10)$$

$$v = 0, i = 0 \quad (2-11)$$

$$v = x_1, i = x_2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (2-12)$$

2. 高阶二端代数元件

电荷 q 与电流 i 是动态相关的, 它们的关系式为



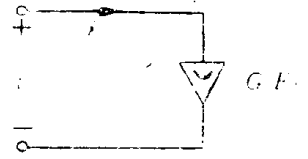
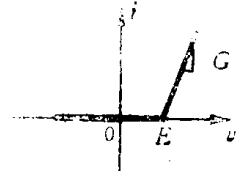
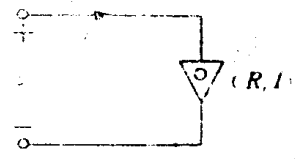
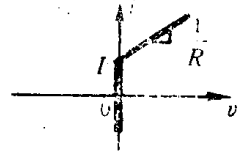
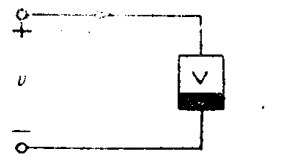
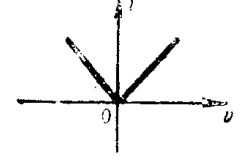
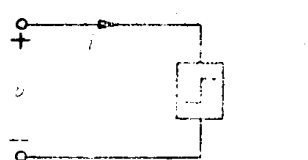
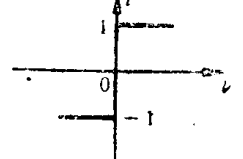
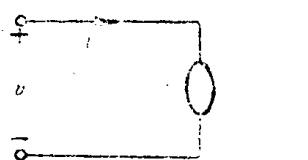

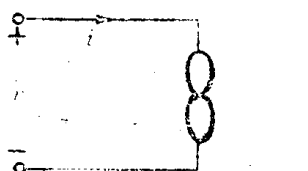
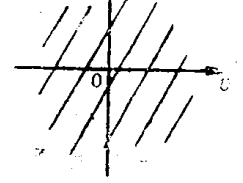
$$q(t) = \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + q(t_0) \quad (2-13)$$

同样, 有

$$\phi(t) = \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + \phi(t_0) \quad (2-14)$$

上两式中, $q(t_0)$ 和 $\phi(t_0)$ 为初始值。可以把 v 和 i 都看作是零阶的, 因而 v 和 i 可分别写作

表2-1 理想二端电阻元件

序号	名称	符号	v-i 特性
1	理想二极管		
2	凹电阻器		
3	凸电阻器		
4	绝对值电阻器		
5	符号电阻器		
6	全零器		
7	无定器		

$v^{(q)}$ 和 $i^{(\phi)}$ 。根据式(2-13)和式(2-14), q 和 ϕ 均为 -1 阶的。这里, 阶数指求导次数, 而 (-1) 则表示积分一次。根据这样的概念, 可以把二端代数元件的赋定关系式写成

$$f(v^{(q)}, i^{(\phi)}) = 0 \quad (2-15)$$

式中, 变量 v 和 i 的阶次并不限于零阶或 -1 阶。凡是赋定关系满足上式的元件称为

$v^{(\alpha)}-i^{(\beta)}$ 二端元件，简称 (α, β) 阶元件，其符号如图2-2所示。 α 和 β 称为端口指数，分别为正、负整数或零。其中，正整数表示求导次数；负整数则表示积分次数。

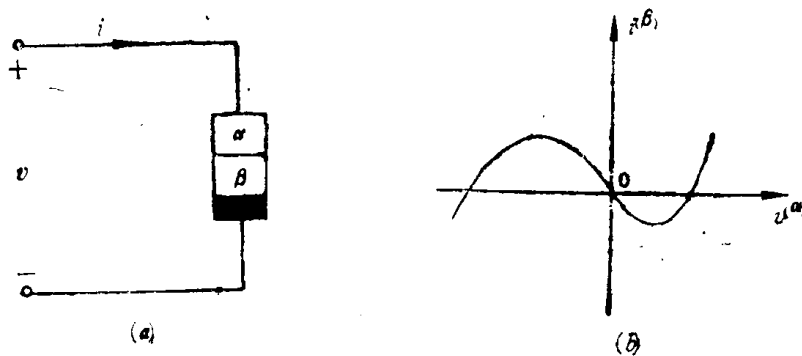


图 2-2

定义2-2 如果元件的赋定关系为式(2-15)，并且至少有一个端口指数为正，则称该元件为**高阶二端代数元件**。

按照式(2-15)，可以把电阻器、电容器、电感器和忆阻器分别称为 $(0, 0)$ 、 $(0, -1)$ 、 $(-1, 0)$ 和 $(-1, -1)$ 阶元件。但是，它们都不属于高阶代数元件。

例2-1 考虑一个线性元件，其赋定关系为

$$v(t) = E \frac{d^2 i(t)}{dt^2}$$

式中 E 为常数。上式具有形式

$$f(v, i^{(2)}) = 0$$

因而此元件属于 $(0, 2)$ 阶的高阶代数元件。由于它是线性元件，故可对其赋定关系式取拉氏变换并令 $s = j\omega$ ，于是可得

$$V(j\omega) = (j\omega)^2 E I(j\omega)$$

由此得到交流阻抗

$$Z(j\omega) = \frac{V(j\omega)}{I(j\omega)} = -\omega^2 E$$

$Z(j\omega)$ 为负实数，且随 ω 的改变而改变，故这个元件称为频变负阻元件，简称为FDNR元件。

一般来说，由式(2-15)所定义的高阶元件是非线性的，其 $v^{(\alpha)}$ 与 $i^{(\beta)}$ 的关系可由一条曲线来表示。对非线性高阶代数元件进行小信号分析时，可以讨论其工作点处的小信号阻抗。此时，在工作点处对非线性函数进行线性化，就得到一个以小增量 $\delta v^{(\alpha)}$ 和 $\delta i^{(\beta)}$ 为变量的高阶元件。关于其阻抗的讨论，与上述线性元件的讨论完全相同。

3. 基本多端代数元件

前面关于二端代数元件的讨论，可以推广到多端元件。

多端元件通常可以表示成 $(n+1)$ 端的形式，如图2-3所示。其中，一个端子选作参考端，其余的端子则按顺序编号，分别为 $1, 2, \dots, n$ 。可以把第 k 个端子相对于参考端的电压记为 $v_k(t)$ ，或者将 v_k 的集合记为向量 $\mathbf{v}(t)$ ；把从第 k 个端子流入元件的电流记为 $i_k(t)$ ，或将 i_k 的集合记为 $\mathbf{i}(t)$ 。