配合人教社初中新教材使用（2002年修订本）

北京九所名校

金牌解题

初二代数 全一册

本册主编　倪斯杰　清华大学附中　特级教师

北京大学附中
清华大学附中
北京师范大学附中
北京二中
北京四中
北京八中
北京八十中
北京师范大学实验中学
中国人民大学附中

教师编写组

团结出版社 ● 知识出版社

编者的话

◉ 经人教社授权并经人教社资深编辑审定，与人教版初中新教材严格同步
◉ 以习题和试题为主，分层次设置铜、银、金牌题，检验和激励学业金牌
◉ 荟萃名校名师，集中重点、难点与考点，突出综合应用和发散思维训练

《北京九所名校金牌解题》丛书自2001年出版以来，得到全国各地教师、家长的好评，尤其受到广大中学生的欢迎。这次修订出版，我们广泛听取了社会各界的意见，力求贯彻教育部关于中学教学和升学考试改革的精神，紧扣人民教育出版社修订出版的2002年秋季初中教材，使本丛书内容特色更加突出鲜明。

一、加强针对性，提高实用性。首先，遵照教育部最新颁布的教学大纲和新的教改精神，针对人民教育出版社出版的2002年秋季初中教材三个年级共24种(包括初一7种、初二9种、初三8种)课本进行了全面修订的状况，经人民教育出版社授权并经人民教育出版社各科资深编辑审定，本丛书24种辅导读物都进行了大幅度调整修改，做到与新教材严格同步。其次，从学生的实际需要出发，本丛书坚持精编精练、以习题为主的原则。为尽量减轻学生负担，学期本一般在16万字左右，学年本也严格控制在26万字左右。各学科依课本单元体例，除了必要的知识结构和目标要求的介绍之外，每种书90%的内容都是例题解析、单元练习和测验，以及期中期末试题。第三，内容集中。有关例题解析注意突出不同知识点的典型性和启示性，大量的习题和测试题注意有关重点、难点和考点内容，特别注意对一些在教学中经常出现的疑点、易误点和引申点内容的讲解提示和专题训练，这样使本丛书大大增强了在教学中的针对性和实用性。

二、突出金牌解题，激励金牌学习。本丛书一个与众不同的特点是，在大量的单元练习和测试题中，依据不同层次，特意按铜牌题、银牌题和金牌题进行划分和设置。铜牌题主要为知识重点、难点、疑点等的选择题，侧重于基本知识的记忆与掌握；银牌题则多为知识点实际应用的一些选择题和问答题，侧重于学科知识的全面了解和灵活运用；金牌题则突出一些难度较高的本学科知识点扩展和引申的综合训练题，以及本学科和相关学科彼此交叉的发散思维题，更突出综合分析思维能力训练。全部习题和试题都附有参考答案，一些有难度、较复杂的题目还附有解题提示。这种特色安排，既照顾到一般同学的基本学业水平和教学大纲的基本要求，尤其有利于广大学生检验和了解自己的学业程度，激发学习的兴趣和进取心，不断提高学业成绩和综合素质，争创学业金牌。

三、荟萃名校名师，打造“金牌”名牌。本丛书24种图书按不同学科由北京大学附中、清华大学附中、中国人民大学附中北京师范大学附中、北京师范大学附属实验中学、北京二中、四中、八十中、一零一等北京名牌中学的特、高级教师和骨干教师主编、撰稿，集中总结了他们多年的教学经验。丛书既注意学科基础知识的牢固掌握，又注意解题难度、强度的提高；既注意突出学科知识点及其内在联系的系统讲解，又注意相关学科知识的综合应用和发散思维训练；既注意典型例题和考点习题的示范，又注意解题思路和答题技巧的介绍。它充分适应我国中学教学实践，努力体现中学教学改革方向，全面反映名校名师的先进教学水平，在众多的教辅读物中，力求打造精品名牌。我们热诚希望本丛书能为广大中学师生赢得一块块教学金牌提供有益帮助。

由于我国中学教学改革的实践还处在探索过程中，本书的编著者也在不断学习和实践，丛书中难免存在不妥和错讹之处，希望得到社会各界和广大中学师生批评指正。

2002年5月

目　录

第八章　因式分解

一、提公因式法

(一) 基本知识提析

本章及本节的学习，要紧紧抓住因式分解与整式乘法是互逆恒等变形这一关系，理解掌握因式分解的概念及方法．提公因式法的原理就是来自乘法分配律的逆用．因此，只要再弄清什么是多项式的公因式、确定公因式的方法和提取公因式的方法，就可以运用提公因式法分解因式了．

1．知识点：

(1) 因式分解是把一个多项式化成几个整式的积的形式．

$$\text{如 } ma+mb+mc \underset{\text{乘法运算}}{\overset{\text{因式分解}}{\rightleftharpoons}} m\,(a+b+c)$$

(2) 公因式：多项式各项都含有的公共的因式．

(3) 提公因式法：如果多项式的各项含有公因式，可以把这个公因式提到括号外面，将多项式写成因式乘积的形式，这种因式分解的方法叫做提公因式法．

(4) 提公因式的步骤：

① 确定公因式：一看系数，公因式的系数，取各项系数的最大公约数；二看字母，取相同字母，并且是相同字母的最低次幂．

② 确定另一个因式：实质是用原多项式除以公因式所得的商作为另一个因式．

2．重点：

掌握提公因式法．理解提公因式法的理论依据就是乘法分配律和准确确定各项的公因式是掌握提公因式法的关键．

3．难点：

理解公因式 m 可以是任何数、单项式或多项式及通过变形提公因式的技巧是本节的难点．

4．误点：

① 因式分解与整式乘法是存在同一等式中的互逆的两个变形、容易混淆，必须弄清．

② 多项式的某一项恰好是公因式时，提取后，括号内此项相应位置应该是 1，而不是

0，要注意此处易错．

（二）重难点解析

【例 1】 下列各式中，哪些是因式分解？哪些不是？

（1）$12x^3y^2=3x^3\cdot 4y^2$　　（2）$m(x+y-z)=mx+my-mz$

（3）$ax+bxy-xy=ax+xy(b-1)$　　（4）$x^3y+xy=y(x^3+x)$

（5）$3x^2+4=\frac{1}{x}(3x^3+4x)$　　（6）$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

（7）$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$　　（8）$x^2-x-6=(x+2)(x-3)$

【分析】 由于因式分解的对象是多项式，而 $12x^3y^2$ 是单项式，所以(1)不是；由于因式分解是把一个多项式化为几个整式积的形式，而(2)恰好与其相反，是把积化为一个多项式，所以(2)不是；(3)的结果也不是整式的积的形式，而只是将原多项式进行了部分的分解，所以(3)不是；(4)中等号右边的因式(x^3+x)还可以提公因式 x，它还没有分解完；(5)采用的是提公因式法，但它提取的是$\frac{1}{x}$，不是整式，所以(5)也不是；(6)、(7)、(8)均符合因式分解的定义，并且将等号右边的乘积算出来，其结果等于原多项式，所以(6)、(7)、(8)是因式分解．

【解】（1）、(2)、(3)、(5)式都不是因式分解；而(6)、(7)、(8)式均是因式分解．(4)虽分解成整式的积的形式，但不符合因式分解的要求，还可继续分解．

【说明】 因式分解的对象是多项式，因式分解的结果有以下特点：(1)结果一定是积的形式；(2)每个因式必须是整式；(3)各因式要分解到不能分解为止．另外，因式分解还要注意在什么数的范围内进行．若题目没有特殊说明，一般是指在有理数范围内进行分解．

【例 2】 把下列各式分解因式

（1）$7a^3b^2c-14ab^3+21a^2b^2c^2$　　（2）$-10x^3y+8x^3y^2-2x^2y$

【分析】（1）题中，公因式的系数取 7、14、21 的最大公约数 7，公因式的字母取相同字母 a 和 b 的最低次幂，即 a、b^2，所以公因式为 $7ab^2$，注意 c 不是相同字母，所以公因式中不能取 c．

（2）题中第一项的系数为负数，应先提出“—”号，使括号内的第一项的符号为正，提负号后，多项式各项都要变号，又第三项与公因式 $2x^2y$ 相同，注意它被提到括号外面后，相应位置补上 1，而不是 0，因为此项除以公因式的商为 1，这里容易出现错误．

【解】（1）$7a^3b^2c-14ab^3+21a^2b^2c^2$

$$=7ab^2(a^2c-2b+3ac^2)$$

（2）$-10x^3y+8x^3y^2-2x^2y$

$$=-(10x^3y-8x^3y^2+2x^2y)$$

$$=-2x^2y(5x-4xy+1)$$

【说明】（2)题常会出现以下错误：

原式 $=-(10x^3y-8x^3y^2+2x^2y)$

$=-2x^2y(5x-4xy)$

这是因为第三项提到括号外面后没有在相应位置补 1 造成的括号内漏掉了第三项，如果采用用多项式各项除以公因式的商做另一个因式的办法，可避免类似错误．这里也可以用以下方法来检验是否漏项：(1)提公因式后，括号内的项数应等于原多项式的项数；(2)采用心

算还原的方法，看是否等于原多项式.

【例 3】 把下列各式分解因式

(1) $p(a^2+b^2)+q(a^2+b^2)-r(a^2+b^2)$

(2) $18b^2(a-b)^2-12b(a-b)^3$

【分析】 (1)题中各项都含有(a^2+b^2)这个多项式公因式，因此可以按提公因式法来进行分解. 在(2)题中，公因式不像(1)题那么明显，确定公因式的方法是：系数的最大公约数与相同字母或相同因式最低次幂的积，即$6b(a-b)^2$.

【解】 (1) $p(a^2+b^2)+q(a^2+b^2)-r(a^2+b^2)$

$=(a^2+b^2)(p+q-r)$

(2) $18b^2(a-b)^2-12b(a-b)^3$

$=6b(a-b)^2[3b-2(a-b)]$

$=6b(a-b)^2(5b-2a)$

【说明】 此类问题孕育着换元思想，即把一个代数式看成一个整体的思想. 在式子$ma+mb+mc=m(a+b+c)$中，公因式 m 可以代表任意数、单项式或多项式. 如(1)、(2)两题中，分别把(a^2+b^2)、$6b(a-b)^2$看成是上式中的 m.

在(2)题中，提出公因式后，另一个因式的中括号内要展开整理，合并为最简的形式.

【例 4】 把下列各式分解因式

(1) $(x-y)^3-(y-x)^2$

(2) $(x-y)^4+x(x-y)^3+y(y-x)^3$

【分析】 乍看起来，这两题似乎没有公因式，但括号内的$(x-y)$与$(y-x)$是互为相反数，因此提取一个负号，就可以改变括号内的字母的顺序，出现公因式，如(1)题$(y-x)^2=[-(x-y)]^2=(x-y)^2$，公因式为$(x-y)^2$；如(2)题$(y-x)^3=[-(x-y)]^3=-(x-y)^3$，所以公因式为$(x-y)^3$.

【解】 (1) $(x-y)^3-(y-x)^2$

$=(x-y)^3-(x-y)^2$

$=(x-y)^2(x-y-1)$

(2) $(x-y)^4+x(x-y)^3+y(y-x)^3$

$=(x-y)^4+x(x-y)^3-y(x-y)^3$

$=(x-y)^3(x-y+x-y)$

$=(x-y)^3(2x-2y)$

$=2(x-y)^3(x-y)$

$=2(x-y)^4$

【说明】 (1) 当公因式是多项时，有时需要改变括号内的字母顺序，才能找到公因式，此类问题的符号变化规律是"奇负偶正"，即

当 n 为奇数时，$(x-y)^n=-(y-x)^n$

当 n 为偶数时，$(x-y)^n=(y-x)^n$

因此，遇到此类问题时，应尽量改变偶次项括号内的字母顺序；若均为奇次项，则应尽量保证首项系数为正、避免提取负号.

(2) 由于因式分解一般要求必须分解到不能分解为止，所以(2)题中的因式$(2x-2y)$还

要提出数字因式 2，作为系数放在字母因式的前边；而另一因式 $(x-y)$ 又与前边的因式相同，因此一定要写成幂的形式，即 $(x-y)^3(x-y)=(x-y)^4$.

【例 5】 把下列各式分解因式：

(1) $a^2(b-a)^4-ab(a-b)^4-ac(a-b)^5$

(2) $x(b+c-d)-y(d-c-b)-b-c+d$

【分析】 (1) 题中 $(b-a)^4=(a-b)^4$，$\therefore$ 公因式为 $a(a-b)^4$；(2)题中，似乎无法确定公因式，但仔细观察，前两项的括号内都含有 b、c、d 三个字母，只是符号相反，而把其余各项看成一个整体，它们的符号与第二项括号内的符号一致，所以可以找到公因式. $d-c-b=-(b+c-d)$，$-b-c+d=-(b+c-d)$，所以(2)的公因式为 $(b+c-d)$.

【解】 (1) $a^2(b-a)^4-ab(a-b)^4-ac(a-b)^5$

$=a(a-b)^4[a-b-c(a-b)]$

$=a(a-b)^4[(a-b)-c(a-b)]$

$=a(a-b)^4(a-b)(1-c)$

$=a(a-b)^5(1-c)$

(2) $x(b+c-d)-y(d-c-b)-b-c+d$

$=x(b+c-d)+y(b+c-d)-(b+c-d)$

$=(b+c-d)(x+y-1)$

【说明】 (1)题中提出公因式后，另一个因式 $[a-b-c(a-b)]$ 还能继续分解，即 $a-b-c(a-b)=(a-b)-c(a-b)=(a-b)(1-c)$. 这里把 $a-b$ 看成一个整体用括号括起来，就出现了公因式 $(a-b)$. 还有(2)题中把 $-b-c+d$ 看成一个整体用括号括起来，再提取一个负号，变为 $-(b+c-d)$，也找到了公因式. 以上做法体现了“分组分解”的思想和方法.

(三) 知识点引申

【例 6】 解下列各题：

(1) 计算　$21\times3.14+62\times3.14+17\times3.14$

(2) 已知　$x=ab^2(a-b+3)-ab^2(a+2)+ab^3-ab^2$，其中，$a=12345$，$b=54321$，求 x 的值.

【分析】 从这两题来看，数字较繁、较大，若按一般方法计算，十分麻烦，需要寻求简便方法. 因式分解就有简化运算的作用. (1)题各项都有公因数 3.14，(2)题各项有公因式 ab^2，提公因式后如何呢？

【解】 (1) $21\times3.14+62\times3.14+17\times3.14$

$=3.14\times(21+62+17)$

$=3.14\times100=314$

(2) $x=ab^2(a-b+3)-ab^2(a+2)+ab^3-ab^2$

$=ab^2(a-b+3-a-2+b-1)$

$=ab^2\times0=0$

【说明】 此题是利用提公因式法，先因式分解再进行计算、求值的例题. 解此类问题不要畏惧数字大、式子繁，坚持先化简，后求值的思想，灵活地运用所学知识，问题一定会迎刃而解.

【例 7】 求证：如果一个六位数，前三位数字与后三位数字完全相同，那么这个六位数一定能被 7、11、13 整除.

【分析】 首先，必须用代数式把这个六位数表示出来. 其次，要想证明这个六位数能被 7、11、13 整除，它必须是 $7\times 11\times 13=1001$ 的倍数，因此，必须把表示这个六位数的整式因式分解，即化成积的形式.

【证明】 设这个六位数的前三位数字分别为 a、b、c，则它的后三位数字也为 a、b、c，这个六位数

$$\begin{aligned}N&=100000a+10000b+1000c+100a+10b+c\\&=100100a+10010b+1001c\\&=1001(100a+10b+c)\\&=7\times 11\times 13(100a+10b+c)\end{aligned}$$

$\because 100a+10b+c$ 是一个整数

$\therefore N$ 必是 7、11、13 的整数倍

即这个六位数一定能被 7、11、13 整除.

【说明】 证明数的整除性，因式分解是必要的手段. 这里运用提公因式(数)是关键的一步.

(四) 金牌解题与知识点应用

☆基本能力训练题(铜牌题)

一、选择题

1. 在下列四个式子中，从左边到右边的变形是因式分解的有 (　　)

(1) $6a^2b=2a^2\cdot 3b$

(2) $x^2-4-3x=(x+2)(x-2)-3x$

(3) $ab^2-2ab=ab(b-2)$

(4) $-a^2+1=(1-a)(1+a)=1-a^2$

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个

2. $-a(a-x)(x-b)+ab(a-x)(b-x)$的公因式是 (　　)

A. $-a$　　B. $-a(a-x)(x-b)$

C. $a(a-x)$　　D. $-a(x-a)$

3. 一个多项式，分解因式的结果是$(b^3+2)(2-b^3)$，那么这个多项式是 (　　)

A. b^6-4　　B. $4-b^6$　　C. b^9-4　　D. $4-b^9$

4. 多项式 $4a^4b^3-6a^3b^2-2a^2b$ 除以各项的公因式后，所得的商应当是 (　　)

A. $2a^2b^2-3ab+1$　　B. $2a^2b^2-3ab-1$

C. $2a^3-3b^2-b$　　D. $2a^2b^2-3ab$

5. $(-2)^{2001}+(-2)^{2002}$分解因式后的结果是 (　　)

A. 2^{2001}　　B. -2　　C. -2^{2001}　　D. -1

6. $-9a^2b+3ac^2-6ab$ 各项的公因式是 (　　)

A. $6ab$　　B. $3ac$　　C. $3bc$　　D. $-3a$

7. 下列各题中，分解因式正确的是 (　　)

A. $-3x^2y^2+6xy^2=-3xy^2(x+2)$

B. $(m-n)^3-2x(n-m)^3=(m-n)^3-(1+2x)$

C. $2(a-b)^2-(b-a)=(a-b)(2a-2b)=2(a-b)^2$

D. $am^3-bm^2-m=m(am^2-bm-1)$

*8. $a^n-a^{3n}+a^{n+2}$分解因式的结果是 ( )

A. $a^n(1-a^3+a^2)$　　B. $a^n(-a^{2n}+a^2)$

C. $a^n(1-a^{2n}+a^2)$　　D. $a^n(-a^3+a^2)$

9. 多项式 $ax+bx-ay-by$ 可分解为 ( )

A. $(a-b)(y-x)$　　B. $(a+b)(x-y)$

C. $(a-b)(x-y)$　　D. $(a-x)(b-y)$

10. 若 $x^2-xy+b^2y^2=(x-by)^2$，则 b 的取值是 ( )

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. 4　　D. 无法确定

二、填空题

11. 把一个_____化成_______的形式，叫做因式分解.

12. 多项式 $-27m^2n^2+18m^2n-36mn$ 的公因式是_______.

13. 分解因式 $x(a-y)-y(y-a)=$________.

*14. 分解因式 $-12a^{2m+1}b^{m+1}+20a^{m+1}b^{2m+1}=$________.

15. 已知关于 x 的方程 $a(3-x)-b(x-3)=0$，其中 $a+b\neq0$，则 $x=$______.

16. $-6ab^2+24a^2b^2-78a^3bc=$______$(b-4ab+13a^2c)$.

17. 多项式 $-9x^2y-36xy^2+3xy$ 提取公因式____后，另一个因式是个____项式，它应写成______.

三、因式分解

18. $a^2b^3c-2a^2b^2c-abc$

19. $-15m^3n^4+10m^2n^3-5m^2n^2$

20. $a(b-a)+b(a-b)$

21. $4a(m+n)^4-8b(n+m)^3$

22. $(a+2b)(a-2b)-3(a-2b)^2$

23. $12m^2n(m-n)^3+8mn(n-m)^3$

24. $a(a-b)^3+2a^2(b-a)^2-2ab(b-a)^2$

25. $(p-2q)^2-(2q-p)^3$

☆能力拓展训练题(银牌题)

26. $a+b-c-x(c-a-b)+ay+by-cy$

四、利用因式分解计算

27. $2.87\times3.14+1.13\times3.14-6.28$

28. $3^{2001}-5\times3^{2000}+6\times3^{1999}+2002$

☆创新意识训练题(金牌题)

29. $\dfrac{1\times2\times4+2\times4\times8+\cdots+n\times2n\times4n}{1\times4\times7+2\times8\times14+\cdots+n\times4n\times7n}$ （n 为自然数）

☆实际应用训练题(金牌题)

五、解答题

30. 两个正整数之差比积小 34，且其中一个是完全平方数，试求这两数的值.

二、运用公式法

（一）基础知识透析

在整式乘法中学习了乘法公式．因式分解是整式乘法的逆变形，因此，把乘法公式反过来就可以用来把某些多项式分解因式．这种分解因式的方法就是运用公式法．如

$$a^2-b^2\xrightarrow[\text{乘法公式}]{\text{因式分解}}(a+b)(a-b)$$

1．**知识点：**

把乘法公式反过来，就得到因式分解的公式

（1）平方差公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

（2）完全平方公式 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

公式中的字母 a、b，可以代表任何数、单项式或多项式．

2．**重点：**

理解每个公式的意义，掌握每个公式的特点，并能熟练、准确地运用公式将符合公式形式的多项式因式分解，这是本节的重点．

3．**难点：**

理解公式中的字母 a 和 b，可以代表任何数、单项式或多项式，建立整体换元的数学思想，是本单元的一个难点．

4．**误点：**

注意公式的各自特点和它们之间的联系和区别，在运用时注意不要混淆．

（二）重难点解析

【例 1】 把下列各式分解因式

（1）$4a^2-81b^2$　　　（2）$-\frac{1}{2}x^2+2y^2$

（3）$a^2-a+\frac{1}{4}$　　　（4）$-4a^2-12ab^2-9b^4$

【分析】 以上各多项式是否符合因式分解公式形式？稍加变形，就可以看出它们是符合公式的．如(1)题，$4a^2=(2a)^2$，$81b^2=(9b)^2$；(2)题，提取 $-\frac{1}{2}$后，可化为整数系数，$-\frac{1}{2}x^2+2y^2=-\frac{1}{2}(x^2-4y^2)$，并且括号内符合平方差公式；(3)题，提取$\frac{1}{4}$，可化为$\frac{1}{4}(4a^2-4a+1)=\frac{1}{4}[(2a)^2-4a+1^2]$；(4)题提取负号，化为 $-(4a^2+12ab^2+9b^4)=-[(2a)^2+2\times(2a)\times(3b^2)+(3b^2)^2]$，均符合完全平方公式．

【解】 （1）$4a^2-81b^2=(2a)^2-(9b)^2=(2a+9b)(2a-9b)$

(2) $-\frac{1}{2}x^2+2y^2=-\frac{1}{2}(x^2-4y^2)=-\frac{1}{2}[x^2-(2y)^2]$

$=-\frac{1}{2}(x+2y)(x-2y)$

(3) $a^2-a+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(4a^2-4a+1)=\frac{1}{4}[(2a)^2-2(2a)\cdot1+1^2]$

$=\frac{1}{4}(2a-1)^2$

(4) $-4a^2-12ab^2-9b^4=-(4a^2+12ab^2+9b^4)$

$=-[(2a)^2+2\cdot(2a)\cdot(3b^2)+(3b^2)^2]=-(2a+3b^2)^2$

【说明】 一般来说，一个多项式是二项式或三项式时，如果存在两数(式)的平方差或两数(式)的平方和加上(或减去)两数(式)乘积的二倍的形式，就可以利用平方差公式或完全平方公式来因式分解．如果首项系数有负号、不是整数或不是完全平方数时，可用提取负号或公因式的方法使首项化为一个数(或式)的平方形式，然后再观察是否符合公式．(3)题还可以化为 $a^2-2\times\frac{1}{2}a+(\frac{1}{2})^2=(a-\frac{1}{2})^2$，达到分解目的，结果是相等的．

【例 2】 把下列各式分解因式

(1) $a^2b^2-3abc+\frac{9}{4}c^2$

(2) $a^4b^4c^2-4a^2b^2c^2+4c^2$

(3) x^4-16

【分析】 (1) 题各项不含有公因式，有 ab 和$\frac{3}{2}c$ 的平方和，只要看 $2\times(ab)\times(\frac{3}{2}c)$是否等于 $3abc$ 就可以知道是否符合公式；(2)题各项含有公因式 c^2，因此要先提取，再看是否符合公式；(3)题符合平方差公式；可直接用公式分解，但要注意分解到底．

【解】 (1) $a^2b^2-3abc+\frac{9}{4}c^2=\frac{1}{4}(4a^2b^2-12abc+9c^2)$

$=\frac{1}{4}(2ab-3c)^2$

另解：$a^2b^2-3abc+\frac{9}{4}c^2=(ab)^2-2(ab)(\frac{3}{2}c)+(\frac{3}{2}c)^2$

$=(ab-\frac{3}{2}c)^2=[\frac{1}{2}(2ab-3c)]^2=\frac{1}{4}(2ab-3c)^2$

(2) $a^4b^4c^2-4a^2b^2c^2+4c^2=c^2(a^4b^4-4a^2b^2+4)$

$=c^2(a^2b^2-2)^2$

另解：$a^4b^4c^2-4a^2b^2c^2+4c^2=(a^2b^2c)^2-2(a^2b^2c)\cdot(2c)+(2c)^2$

$=(a^2b^2c-2c)^2=[c(a^2b^2-2)]^2=c^2(a^2b^2-2)^2$

(3) $x^4-16=(x^2+4)(x^2-4)$

$=(x^2+4)(x+2)(x-2)$

【说明】 (1)、(2)两题的另解，结果也是正确的，但过程较繁，因此，当系数是分数或小数时，应先提取，化系数为整数，当各项含有公因式时，应先提公因式，再用公式为好．(3)题用公式分解后，有一个因式还符合公式，所以要继续分解到不能分解为止．

【例 3】 把下列各式分解因式

(1) $9(a+b)^2-16(a-b)^2$

(2) $4(x-y)^2+20(y-x)+25$

(3) $4x^2y^2-(x^2+y^2)^2$

【分析】 此例中各题，经过简单变形，也能化成公式的形式，如(1)题，可化为$[3(a+b)]^2-[4(a-b)]^2$；(3)题可化为$(2xy)^2-(x^2+y^2)^2$；(2)题中第二项括号内字母顺序改变一下，即化为$[2(x-y)]^2-20(x-y)+5^2$.

【解】 (1) $9(a+b)^2-16(a-b)^2=[3(a+b)]^2-[4(a-b)]^2$

$=[3(a+b)+4(a-b)][3(a+b)-4(a-b)]$

$=(3a+3b+4a-4b)(3a+3b-4a+4b)$

$=(7a-b)(-a+7b)=-(7a-b)(a-7b)=(7a-b)(7b-a)$

(2) $4(x-y)^2+20(y-x)+25$

$=4(x-y)^2-20(x-y)+25=[2(x-y)]^2-2\times2(x-y)\times5+5^2$

$=[2(x-y)-5]^2=(2x-2y-5)^2$

(3) $4x^2y^2-(x^2+y^2)^2=(2xy)^2-(x^2+y^2)^2$

$=[2xy+(x^2+y^2)][2xy-(x^2+y^2)]$

$=-(x^2+y^2+2xy)(x^2+y^2-2xy)$

$=-(x+y)^2(x-y)^2$

【说明】 (1) 公式中的 a、b 可以代表任何一个数、单项式或多项式. 因此，在用公式时要善于把一个整式看成一个整体，即要建立整体换元的数学思想，如(1)题，设 $m=3(a+b)$，$n=4(a-b)$，原式$=m^2-n^2=(m+n)(m-n)=[3(a+b)+4(a-b)]\cdot[3(a+b)-4(a-b)]=(7a-b)(7b-a)$，但一般解题时不必设元.

(2) 分解过程中，各因式的首项系数不能为负数，如(1)题的结果写成$-(7a-b)(a-7b)$或$(7a-b)(7b-a)$；一般写为最简形式.

(3) 在运用公式分解因式时，一是注意化成公式形式，二是注意能否进行二次分解，如(3)题，用平方差分解后，两个因式又符合完全平方公式，均可继续分解.

【例 4】 把下列各式分解因式

(1) $(a^2+b^2)^2+4ab(a^2+b^2)+4a^2b^2$

(2) $(a^2+b^2-1)^2-4a^2b^2$

【分析】 观察(1)、(2)两题均符合公式特点，因此，注意能否进行二次分解.

【解】 (1) $(a^2+b^2)^2+4ab(a^2+b^2)+4a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2+2(a^2+b^2)\cdot(2ab)+(2ab)^2$

$=(a^2+b^2+2ab)^2=[(a+b)^2]^2$

$=(a+b)^4$

(2) $(a^2+b^2-1)^2-4a^2b^2=(a^2+b^2-1)^2-(2ab)^2$

$=(a^2+b^2-1+2ab)(a^2+b^2-1-2ab)$

$=[(a^2+b^2+2ab)-1][(a^2+b^2-2ab)-1]$

$=[(a+b)^2-1][(a-b)^2-1]$

$=(a+b+1)(a+b-1)(a-b+1)(a-b-1)$

【说明】 (1) 题两次运用完全平方公式，有相同因式或幂的乘方，结果要写幂的形式；(2)题用平方差公式分解成两个因式，观察其特点，其中有三项恰好符合完全平方公式，而另一项是 1，可写成 1^2，而连接的符号是 “$-$” 号，又符合平方差公式，所以可以继续分

解．

【例5】 把下列各式分解因式

(1) x^5y-xy^5

(2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)-ab(b-a)-a+b$

【分析】 (1)、(2)两题从形式上看并不符合公式，但(1)题明显有公因式；而(2)题把第二项括号内提取 -1，化成 $ab(a-b)$，后两项看成一个整体，提取 -1，化成 $-(a-b)$，因此，各项含有公因式 $(a-b)$．提取公因式后，(1)题化成 $xy(x^4-y^4)$，(2)题化成 $(a-b)(a^2+2ab+b^2-1)$，这样，另一个因式都可以运用公式继续分解．

【解】 (1) $x^5y-xy^5=xy(x^4-y^4)$

$=xy(x^2+y^2)(x^2-y^2)$

$=xy(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$

(2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)-ab(b-a)-a+b$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)+ab(a-b)-(a-b)$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2+ab-1)$

$=(a-b)[(a^2+2ab+b^2)-1]$

$=(a-b)[(a+b)^2-1]$

$=(a-b)(a+b+1)(a+b-1)$

【说明】 (1) 对一多项式进行因式分解，首先看是否有公因式，若有，必须先提取公因式；然后看是否符合公式，若符合，可用公式法分解；最后看结果，结果要求在规定的范围不能再分解为止；相同因式写成幂的形式．

(2) 题解法中，把后两项看成一个整体，提公因式后把另一个因式中的前三项看成一个整体，用括号括起来，先用完全平方公式分解，再用平方差公式分解，这里体现了分组分解的思想．由此看来，分解因式时，要养成先观察，找出结构特征，理清思路，再动手分解，问题就不难解决了．

(三) 知识点引申

【例6】 观察下列各多项式的结构特点及它们之间的内在联系，找出因式分解的方法，并把(4)～(10)题分解因式．

(1) a^2-b^2　　(2) $9x^2-4y^2$

(3) $(x-3)^2-y^2$　　(4) $x^2-6x+9-y^2$

(5) $a^2-b^2+2bc-c^2$　　(6) $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$

(7) $(x^2+2x)^2-4$　　(8) $(x^2+2x)^5-4(x^2+2x)^3$

(9) $(x^2+4)^2-4x^2$　　* (10) x^4+4x^2+16

【分析】 运用公式法分解因式，重要一点就是掌握公式特点，善于找出公式中字母所代表的数、单项式或多项式，运用好乘法公式与因式分解的互逆关系，就可以达到“掌握一个公式、解决一类问题”的效果，如本例中，(1)是平方差公式原形；(2)、(3)题直接运用平方差公式可解；(4)题是(3)题展开而得，所以把(4)中的前三项看成一个整体，分解成 $(x-3)^2$ 后，就符合平方差公式可分解；(5)题与(4)题形式相同，把后三项添个括号就符合完全平方公式，化为 $a^2-(b-c)^2$，因此可按(4)的解法处理；(6)题先按(3)分解，之后每个因式又都是(5)的形式，可解；(7)题按(3)题解法；(8)题先提公因式 $(x^2+2x)^3$ 后与(7)题同；

(9)题与(7)题、(3)题类型同，但要注意用平方差公式分解后，每个因式是否符合完全平方公式再分解；(10)题较难一点，不能直接用完全平方公式分解．但观察分析，它是由(9)题展开所得，即$(x^2+4)^2-4x^2=x^4+8x^2+16-4x^2=x^4+4x^2+16$，所以$x^4+4x^2+16=x^4+8x^2+16-4x^2=(x^2+4)^2-4x^2$，与(9)题相同，因此可解．

【解】 (4) $x^2-6x+9-y^2=(x^2-6x+9)-y^2$

$=(x-3)^2-y^2=(x-3+y)(x-3-y)$

$=(x+y-3)(x-y-3)$

(5) $a^2-b^2+2bc-c^2=a^2-(b^2-2bc+c^2)$

$=a^2-(b-c)^2=[a+(b-c)][a-(b-c)]$

$=(a+b-c)(a-b+c)$

(6) $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2$

$=[2bc+(b^2+c^2-a^2)][2bc-(b^2+c^2-a^2)]$

$=(b^2+c^2+2bc-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)$

$=[(b^2+c^2+2bc)-a^2][a^2-(b^2+c^2-2bc)]$

$=[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]$

$=(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$

(7) $(x^2+2x)^2-4=(x^2+2x+2)(x^2+2x-2)$

(8) $(x^2+2x)^5-4(x^2+2x)^3$

$=(x^2+2x)^3[(x^2+2x)^2-4]$

$=(x^2+2x)^3(x^2+2x+2)(x^2+2x-2)$

(9) $(x^2+4)^2-4x^2=(x^2+4)^2-(2x)^2$

$=(x^2+4+2x)(x^2+4-2x)=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

(10) $x^4+4x^2+16=x^4+8x^2+16-4x^2$

$=(x^2+4)^2-4x^2=(x^2+4+2x)(x^2+4-2x)$

$=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

【说明】 (4)、(5)、(6)题采用的方法是分组分解法；(10)题解法称拆项法，也属分组分解法．

【例7】 利用因式分解，计算下列各题

(1) $52^2+48^2+52\times96$

(2) $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{9^2})(1-\frac{1}{10^2})$

【分析】 利用因式分解可以简化运算，(1)题有三项，经观察不难发现数字特点，运用完全平方公式分解为52和48的和的平方，而52与48的和正好是100；(2)题每个括号内都是两数平方差的形式，分解后再观察数字因数的特点，计算出结果．

【解】 (1) $52^2+48^2+52\times96$

$=52^2+48^2+2\times52\times48$

$=(52+48)^2=100^2=10000$

(2) $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{9^2})(1-\frac{1}{10^2})$

$=(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{9})(1+\frac{1}{9})(1-\frac{1}{10})(1+\frac{1}{10})$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \cdots \frac{8}{9} \times \frac{10}{9} \times \frac{9}{10} \times \frac{11}{10}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{11}{10} = \frac{11}{20}$$

【说明】 (2) 题经因式分解，从第二个因数$\frac{3}{2}$开始到倒数第二个因数$\frac{9}{10}$，恰好两两约分得1，因此结果为始末两因数的积，即$\frac{1}{2} \times \frac{11}{10} = \frac{11}{20}$.

【例8】 设 m 为奇数，求证：$(m+2)^2 - m^2 - 2(m+1)(m+3)$是一个偶数平方的2倍的相反数.

【分析】 题目乍看起来无从入手，但结论是 -2(偶数$)^2$ 的形式，这就需要整理题目所给的多项式，并且进行因式分解是解题的关键，其次，是对因式分解的结果进行讨论，使问题得证.

【证明】 $\because (m+2)^2 - m^2 - 2(m+1)(m+3)$

$= m^2 + 4m + 4 - m^2 - 2m^2 - 8m - 6$

$= -2m^2 - 4m - 2 = -2(m^2 + 2m + 1)$

$= -2(m+1)^2$

又$\because m$ 为奇数，$\therefore m+1$ 为偶数

$\therefore -2(m+1)^2$ 是一个偶数平方的2倍的相反数.

即$(m+2)^2 - m^2 - 2(m+1)(m+3)$是一个偶数平方的相反数.

(四) 金牌解题与知识点应用

☆基本能力训练题(铜牌题)

一、选择题

1. $-1 + 0.01a^2$ 分解因式的结果应当是 ( )

   A. 不能分解　　B. $(0.1a+1)(0.1a-1)$

   C. $(-1+0.1a)^2$　　D. $(-1+0.1a)(-1-0.1a)$

2. $a^2 + b^2$ 是(　)多项式的因式

   A. $a^4 + b^4$　　B. $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$　　C. $a^3b - ab^3$　　D. $a^4 - b^4$

3. 如果多项式 $x^2 + kx + \frac{1}{9}$是一个完全平方式，则 k 的值应当是 ( )

   A. -3　　B. 3　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\pm\frac{2}{3}$

4. 下列各式中，不能用完全平方公式分解的是 ( )

   A. $x^2 - 2xy + y^2$　　B. $-x^2 + 2xy - y^2$　　C. $x^2 + 2xy - y^2$　　D. $x^2 + y^2 + 2xy$

5. 把多项式 $a^8 - b^8$ 因式分解，有(　)个因式

   A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

6. 把$(3m+2n)^2 - (3m-2n)^2$ 分解因式，其结果是 ( )

   A. 0　　B. $16n^2$　　C. $36m^2$　　D. $24mn$

7. $81 - x^k = (9 + x^2)(3 + x)(3 - x)$，则 ( )

   A. $k=2$　　B. $k=3$　　C. $k=4$　　D. $k=5$

8. 如果 $x^2 - xy + 4m$ 是一个完全平方式，那么 m 是 ( )

A. $\frac{1}{16}y^2$　　B. $-\frac{1}{16}y^2$　　C. $\frac{1}{8}y^2$　　D. $\frac{1}{4}y^2$

9. 如果 $x^2-2ax+b$ 是一个完全平方式，那么 a 与 b 满足的关系为　　(　　)

A. $b=a$　　B. $a=2b$　　C. $b=2a$　　D. $b=a^2$

10. 如果多项 x^2+mx+n 因式分解为 $(x+1)(x-2)$，则 m、n 的值为　　(　　)

A. $m=1$，$n=2$　B. $m=-1$，$n=2$　　C. $m=1$，$n=-2$　D. $m=-1$，$n=-2$

二、填空题

11. a^3-ab^2 分解因式的结果是__________；

12. 分解因式 $a^2-a+\frac{1}{4}=$ __________；

13. 分解因式 $2-32a^4=$ __________；

14. 当 $a=56$，$b=44$ 时，代数式 $\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}b^2$ 的值是______；

15. 代数式 a^2+2a+2，当 $a=$ ____时，有最小值是______；

*16. 分解因式 $a^{m+1}-a^{m-1}=$ __________；

17. $x^2-6x+(\quad)^2=(\qquad)^2$

18. 分解因式 $x(x^2-1)-x^2+1=$ __________.

三、因式分解

19. $a^2(x-y)+b^2(y-x)$　　20. $(x+3y)^2-2(x+3y)+1$

21. $-\frac{1}{9}-a-\frac{9}{4}a^2$　　22. $(x^2+y^2)^2-4x^2y^2$

23. $4x^3+4x^2+x$　　24. $(5a^2-3b^2)^2-(3a^2-5b^2)^2$

☆能力拓展训练题(银牌题)

25. $4x^2-a^2-6a-9$　　26. $(a^2+b^2-1)^2-4a^2b^2$

27. $4x^4+1$

四、解答题

28. 计算 $1.2222^2\times9-1.3333^2\times4$

☆创新意识训练题(金牌题)

29. 求值：已知，$a+\frac{1}{a}=-3$，求 $a^2+\frac{1}{a^2}$ 及 $(a-\frac{1}{a})$ 的值.

30. 分解因式：$(a^2+ab+b^2)^2-4ab(a^2+b^2)$.

☆实际应用训练题(金牌题)

31. 求值：已知 $a+b=1$，求 $\frac{1}{2}a^2+ab+\frac{1}{2}b^2$ 的值.

32. 求证：两个连续偶数的平方差能被4整除.

三、分组分解法(一)

(一) 基本知识透析

分组分解法，是在学习提公因式法和运用公式法之后学习的又一种分解因式的方法．这