数 学

中 册

长春邮电学校编

人 民 邮 电 出 版 社

数　　学

中　册

长春邮电学校　编

人 民 邮 电 出 版 社

内 容 提 要

全书分上中下三册。上册为初等数学，中册为高等数学，下册为专业数学。

中册的内容包括：极限，导数与微分，不定积分，定积分，多元函数微积分，级数等。各章（节）后附有习题。书末并附有答案，便于练习和核对。本书可供学过初等数学的通信技术工人自学和通信中等专业学校教学使用，也可供其他相近的专业参考。

数 学

中 册

长春邮电学校 编

*

人民邮电出版社出版

北京东长安街27号

北京印刷三厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

*

开本：787×1092 1/32　　1979年4月第一版

印张：11　页数：176　　1979年4月北京第1次印刷

字数：253千字　　印数：1—201,500册

统一书号：15045·总2283-有5116

定价：0.88元

目　录

第九章　极　　限

极限方法是研究高等数学的基本方法。在高等数学中，借助极限的方法来实现由量变到质变的转化过程。

本章主要说明下列三个问题：1．什么是极限的概念；2．为什么要研究极限问题；3．怎样求极限。

通过本章的学习，应掌握无穷小量、无穷大量、函数的极限与函数连续性等重要概念，并学会求极限的一些初等方法。

第一节　极限概念

一、极限问题的提出

我们通过两个典型问题来说明什么是极限，为什么要研究极限。

问题1．求半径为 R 的圆的面积

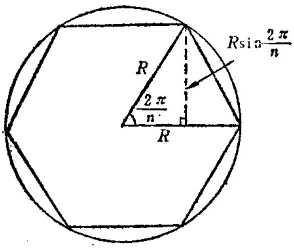

图 9.1

我们已经会计算直线所围成的图形（如矩形、三角形、梯形等）的面积，圆是曲线所围成的，它的面积如何计算呢？

为了计算圆面积 A，先来计算圆内接正 n 边形的面积 A_n（图 9.1），显然，A_n 是 A 的近似值。

为了计算 A_n，作圆心和正 n 边形各顶点的连线，分正 n 边形为 n 个等腰三角形。这些三角形的腰均等于圆的半径 R，

而顶角为$\frac{2\pi}{n}$，可见每个等腰三角形的面积为

$$\frac{1}{2}R\cdot R\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{R^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

而 A_n 是 n 个这样的三角形面积之和，所以

$$A_n=\frac{nR^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

当正多边形的边数 n 越大，则 A_n 的值就越接近于所求的圆面积 A。当 n 无限增大（以记号"$n\to\infty$"表示，此记号读作"n 趋于无穷"）时，A_n 就无限地接近 A。这一过程用术语来说就是：当 n 趋于无穷时，A_n 以 A 为极限，并可记为

$$A=\lim_{n\to\infty}A_n$$

符号"lim"表示极限。

圆与正多边形本来有质的区别，但是当正多边形边数 n 无限增大时，即在量变的过程中，产生了正多边形转化为圆的质的变化。这种由量变到质的变化，就是极限的实质。

现在，问题就归结为如何求出函数 A_n 当自变量 $n\to\infty$ 时的极限 A，即求出

$$A=\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{nR^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right) \tag{9-1}$$

的值。

问题 2. 求自由落体在第 1 秒末这个时刻的瞬时速度 $v|_{t=1}$。

从物理学已知，自由落体在时刻 t 已经过的路程为

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中 g 为重力加速度 9.8 米/秒^2，路程 s 单位为米，t 单位为秒。

在第 1 秒末，已落下的距离

$$s(1)=\frac{1}{2}\times 9.8\times 1^2=4.9 \text{ 米}$$

在第 2 秒末，已落下的距离

$$s(2)=\frac{1}{2}\times 9.8\times 2^2=19.6 \text{ 米}$$

由第 1 秒末到第 2 秒末这个时间间隔

$$2-1=1 \text{ 秒}$$

内，物体下落的距离（图 9.2)为

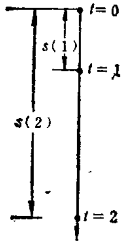

图 9.2

$$s(2)-s(1)=19.6-4.9=14.7 \text{ 米}$$

那末可不可以把比值

$$\bar{v}_{1-2}=\frac{s(2)-s(1)}{2-1}=\frac{19.6-4.9}{1}=14.7 \text{ 米/秒}$$

作为所求的第 1 秒末的瞬时速度呢？显然是不可以的。因为这样就认为在第 1 秒末到第 2 秒末这段时间内速度是不变的，而实际上这段时间内速度是不断变化的，例如在时刻 $t=1.1$ 秒、1.2 秒、1.3 秒……等各瞬时的速度并不相同，所以上述比值 $\bar{v}_{1-2}$ 只能反映这段时间内的平均速度，或者说是 $t=1$ 瞬时的速度的近似值。自然会想到，为了得到更精确的值，可以把所取的时间间隔缩短一些，例如求出 $t=1.1$ 秒时下落距离

$$s(1.1)=\frac{1}{2}\times 9.8\times 1.1^2=5.929 \text{ 米}$$

于是 $t=1$ 秒到 $t=1.1$ 秒的时间间隔（$1.1-1=0.1$ 秒）内的平均速度

$$\bar{v}_{1-1.1}=\frac{s(1.1)-s(1)}{1.1-1}=\frac{5.929-4.9}{0.1}=10.29 \text{ 米/秒}$$

虽然它还只是 $t=1$ 瞬时速度的近似值，但比前面所求的进了一步。

显而易见，不断缩小所取的时间间隔，则平均速度将越来越趋近于 $t=1$ 的瞬时速度。当比值

$$\bar{v}_{1-t}=\frac{s(t)-s(1)}{t-1}$$

在 t 无限地趋近于 1（用记号“$t\to 1$”表示）时，此比值(即 1 秒末到 t 秒末的平均速度)$\bar{v}_{1-t}$ 就无限地趋近于 $t=1$ 的瞬时速度 $v|_{t=1}$，或者说，$v|_{t=1}$ 是 $\bar{v}_{1-t}$ 当 $t\to 1$ 时的极限，记为

$$v|_{t=1}=\lim_{t\to 1}\bar{v}_{1-t}=\lim_{t\to 1}\frac{s(t)-s(1)}{t-1}$$

这是用极限方法实现由量变到质变的转化的又一典型例子。

如果把 s 的解析式代入上式，则问题化为求下面的极限

$$v|_{t=1}=\lim_{t\to 1}\frac{\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}g\cdot 1^2}{t-1}=\lim_{t\to 1}\left[\frac{1}{2}g(t+1)\right] \qquad (9\text{-}2)$$

即求函数 $\bar{v}_{1-t}=\frac{1}{2}g(t+1)$当 $t\to 1$ 时的极限。

由上述两个问题可见运用极限方法的重要意义。实际上，在问题 1 与问题 2 中已分别包含了积分学和微分学的基本思想。

二、极限的定义

如果不考虑问题的物理意义，从纯数学的观点来看，都是函数在自变量的某一变化过程（自变量无限增大或趋于某一定值）中的极限问题。粗略地说，函数极限的定义可表述如下：

若函数 $y=f(x)$在自变量 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)的变化过程中无限地接近于一个常数 A，就说 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$)时的极限。并记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \qquad (\text{或} \lim_{x\to\infty}f(x)=A)$$

对于上面这段话，需要作一些补充的说明：

1. 关于“$x\to x_0$ 的变化过程”，这是指自变量 x 无限地趋近于 x_0，这种趋近，既可是由小到大地趋近于 x_0 这个值；也可以是由大变小地趋近于 x_0；或者是忽而大于 x_0、忽而小于 x_0、左右跳跃地越来越接近于 x_0。总之，x 趋于 x_0 的方式是任意的。

如果在某些情况下，需要规定 x 趋于 x_0 的方式时，必需加以说明。例如：x 只是从小到大地趋近于 x_0 时，用记号“$x\to x_0-0$”表示，这时如果 $f(x)$有极限 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 的左极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$；反之，当 x 只是由大到小地趋近于 x_0 时，用记号“$x\to x_0+0$”表示，这时如果 $f(x)$ 有极限 A，则称 A 为函数 $f(x)$的右极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$。

2. 关于“$x\to\infty$的变化过程”，这是指 x 的绝对值$|x|$无限变大，也就是说，x 无限增大是指它既可以朝正的方向、也可以朝负的方向无限制地变化下去。

如果在某些情况下，要规定 x 的变化方向时，必需加以说明。如 x 从某时起总取正值并无限增大，则记作“$x\to+\infty$”；而 x 从某时起总取负值，并且它的绝对值无限增大时，则记作“$x\to-\infty$”。

3. 关于在 x 的变化过程中 $f(x)$“无限地接近于一个常数 A”，这是指 $f(x)$与 A 之差的绝对值$|f(x)-A|$无限减小，或

者说得更精确一些，就是：对于预先给定的任意小的正数 ε，只要 x 的变化过程进行得充分长久以后，$f(x)$ 的值会一直满足 $|f(x)-A|<\varepsilon$。

这里，$f(x)$ 与 A 之差取绝对值，表示 $f(x)$ 无限接近 A 的方式也是可以任意的，即 $f(x)$ 接近于 A 时，$f(x)$ 的值既可以大于 A、也可以小于 A。

4．当变量 x 趋于 x_0 时，x 本身就是以 x_0 为极限。即

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0$$

应当指出，上面对极限定义的表述和说明还是远不够严谨的，但易于为初学者所接受。如果想要进一步了解极限定义的精确表述，可参看较深入的数学分析教材。

三、极限运算法则

极限的运算法则如下：

（1）两个函数之和（或差）的极限等于它们分别求极限后相加（或相减）。即

$$\lim(u\pm v)=\lim u\pm\lim v$$

例 1. 求 $\lim\limits_{x\to 1}(x+3)$

解： $\lim\limits_{x\to 1}(x+3)=\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}3=1+3=4$

（2）两个函数之积的极限等于它们分别求极限后相乘。即

$$\lim(uv)=\lim u\cdot\lim v$$

例 2. 求 $\lim\limits_{x\to x_0}(cx+b)$，其中 c、b 为常数。

解： $\lim\limits_{x\to x_0}(cx+b)=\lim\limits_{x\to x_0}cx+\lim\limits_{x\to x_0}b=$

$$=\lim_{x\to x_0}c\cdot\lim_{x\to x_0}x+b=cx_0+b$$

例 3. 求 $\lim\limits_{x\to x_0}x^2$

解：$\lim\limits_{x\to x_0}x^2=\lim\limits_{x\to x_0}x\cdot\lim\limits_{x\to x_0}x=(\lim\limits_{x\to x_0}x)^2=x_0^2$

由此例可知，一般地，n 为正整数时，有

$$\lim_{x\to x_0}x^n=(\lim_{x\to x_0}x)^n=x_0^n$$

（3）两个函数之商的极限等于它们分别求极限后相除。即

$$\lim\frac{u}{v}=\frac{\lim u}{\lim v}\qquad(\lim v\neq 0)$$

例 4. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+5}{x^2+7}$

解：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+5}{x^2+7}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+7)}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2-\lim\limits_{x\to 1}2x+\lim\limits_{x\to 1}5}{\lim\limits_{x\to 1}x^2+\lim\limits_{x\to 1}7}=\frac{1^2-2\times1+5}{1^2+7}=\frac{1}{2}$$

例 5. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3+2x^2}{5x^2}$

解：此题中当 $x\to 0$ 时分母中 x^2 的极限为零，因此不能直接用法则 3 来求极限。这种情况下，如果能消去分母中这个因子，则仍可求极限。

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^3+2x^2}{5x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(3x+2)}{5x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x+2}{5}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(3x+2)}{\lim\limits_{x\to 0}5}=\frac{3\lim\limits_{x\to 0}x+2}{5}=\frac{2}{5}$$

习 题 一

求下列极限：

1. $\lim\limits_{x \to 1}(3x-4)$

2. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}}(2x^2-x+1)$

3. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{2x}{\pi - x}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^3+x^2}{x^5+3x^4-2x^2}$

5. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$

6. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4-16}{x+2}$

7. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^3-3x^2+2x-2}{x^3-1}$

8. $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \dfrac{(2x^2-5x-3)(2x+1)}{4x^2+4x+1}$

9. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$

第二节　连续与间断

在上册的最后一章里，曾经从函数图形上用直观的说明介绍了函数连续性的概念，并指出了一切初等函数在其有定义处都是连续的结论。现在，我们要运用极限来进一步讨论函数的连续与间断，并且由此得出一个求连续函数的极限的方法。

一、函数连续的定义

设有一函数 $y=f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时有极限 A，直观上，可以

用图 9.3 的方式表示出来。根据极限的定义，只是要求 x 无限趋近于 x_0 时，$f(x)$的值无限接近于 A，并不要求 $x=x_0$ 时函数值 $f(x_0)$是否存在或是否与A相等。这就是说，可能出现下列情形。

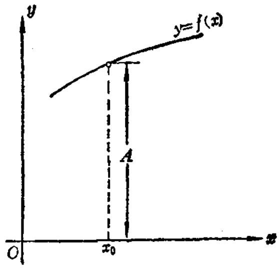

图 9.3

(1) $f(x)$当 $x\to x_0$ 时有极限 A，但 $x=x_0$ 时 $f(x)$没有定义，即 $f(x_0)$不存在；

(2) $f(x)$当$x\to x_0$时有极限A，$f(x_0)$也存在，但$f(x_0)\neq A$

显然，上述两种情形中，函数 $y=f(x)$在 x_0 处都发生了间断（不连续）。由此可知，只有满足下列三个要求时，函数 $y=f(x)$在 x_0 处才是连续的：

(1) 函数 $y=f(x)$在 $x\to x_0$ 时有极限 A，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$；

(2) 函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处有定义，即 $f(x_0)$ 存在；

(3) $A=f(x_0)$

综合上述三点，可对函数在一点处连续给出下面的定义：如果函数 $y=f(x)$在点 x_0 满足等式

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) \tag{9-3}$$

则称函数 $f(x)$在 x_0 是连续的。

函数在一点处连续的定义还可以用另一种形式来表述，这种形式应用到增量的概念。

设有一函数 $y=f(x)$，其图形如图 9.4 所示。当 $x=x_0$ 时 $y=f(x_0)$，再另取一自变量的值 x，相应的函数值 $y=f(x)$，这样，自变量由 x_0 变到 x 时，增加了一个量

$$\Delta x = x - x_0$$

它称为自变量的增量，相应地

$$\Delta y = f(x) - f(x_0)$$

称为函数的增量。

如果 $y=f(x)$ 在 x_0 是连续的，则式（9-3）成立，由此式可导出

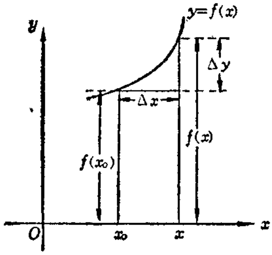

图 9.4

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$

即

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) - f(x_0)] = 0$$

由于 $x\to x_0$ 时，$\Delta x = x - x_0 \to 0$，再用 Δy 代替上式中的 $f(x)-f(x_0)$，则上式化为

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0 \tag{9-4}$$

于是，函数连续的定义又可表述如下：设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处满足式（9-4），则称此函数在 x_0 处是连续的。

由上述函数在一点处连续的定义，可以容易地引伸出函数在区间上连续的定义：

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上每一点都满足式（9-3）或式（9-4），则称 $y=f(x)$ 为区间 (a,b) 上的连续函数。

二、求连续函数极限的方法

式（9-3）不仅成为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续的定义，也提供了一个求连续函数极限的简单方法：如果已知一个函数在 x_0 是连续的，那末当 $x\to x_0$ 时此函数的极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 就等于 x_0 处的函数值 $f(x_0)$。即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

由此可知，利用此式求极限时，首先必须知道函数是否连续，而这个问题我们在上册的第八章中已经知道：一切初等函数在其有定义的区间都是连续的，所以对于初等函数来说，在其有定义处求极限，均可使用上式。

例 1. 求 $\lim\limits_{x \to 1}(3x^2 + 2x - 1)$

解： $\lim\limits_{x \to 1}(3x^2 + 2x - 1) = 3 \times 1^2 + 2 \times 1 - 1 = 4$

例 2. 求 $\lim\limits_{n \to 2} \dfrac{\sin \dfrac{n\pi}{4}}{n^2 + 5}$

解： $\lim\limits_{n \to 2} \dfrac{\sin \dfrac{n\pi}{4}}{n^2 + 5} = \dfrac{\sin \dfrac{\pi}{2}}{2^2 + 5} = \dfrac{1}{9}$

有时，直接使用式(9-3)行不通，需要作一些变换。

例 3. 求 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

解： $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}$$

例 4. 求 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{1+x} - 2}{x - 3}$

解： $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{1+x} - 2}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(\sqrt{1+x} - 2)(\sqrt{1+x} + 2)}{(x-3)(\sqrt{1+x} + 2)}$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{1 + x - 4}{(x-3)(\sqrt{1+x} + 2)} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} = \frac{1}{4}$$

习　题　二

试求下列各极限：

1. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5x+3)$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^3-2x^2+x+1}{x^2-5x+3}$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x-9}{x^2-9}$

4. $\lim\limits_{x\to \pi}(x\sin x)$

5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}x}{1+x^2}$

6. $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^3-t^2}{t^2-1}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+x^2-2x^3}{2x-4x^2+x^4}$

8. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x+2}{x^2+x-2}-e^x\right)$

9. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{ax}-x}{x-a}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

11. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$

12. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$

第三节　无穷小量与无穷大量

一、无穷小量

极限为零的变量称为无穷小量。若有一函数 $y=f(x)$，它