

高等数学自学丛书

多项式代数

李师正 编

山东人民出版社

高等数学自学丛书

多项式代数

李师正 编

山东人民出版社

一九八一年·济南

内 容 提 要

本书是高等数学自学丛书之一,内容包括复数、一元多项式、最大公因式、一元多项式的分解、一元 n 次方程、实系数方程、有理分式、多元多项式等。标*号处为选学内容。

本书适合中等学校数学教师、理工科大学生、工程技术人员及青年自学参考之用。

高等数学自学丛书
多 项 式 代 数
李 师 正 编

山东人民出版社出版
山东省新华书店发行
山东新华印刷厂德州厂印刷

787×1092毫米32开本 13.5印张 2插页 289千字
1981年1月第1版 1981年1月第1次印刷
印数: 1—17,000

书号 13099·89 定价 1.15元

出 版 说 明

为了满足广大读者自学高等数学的需要，我们出版了这套高等数学自学丛书，包括《数学分析基础》、《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《无穷级数》、《多项式代数》、《线性代数》、《抽象代数》、《空间解析几何》、《概率论与数理统计》、《布尔代数》等十册。

这套丛书起点较低，系统性较强，次序的编排尽量作到由浅入深，由易到难，注意循序渐进，并适当渗透了一些现代数学的观点。在编写过程中，力求作到内容讲述详细，文字通俗流畅。书中安排了较多的例题和习题，书末附有习题答案或提示。因此，这套丛书适合自学，也可以作为这些课程的教学参考书。

这套丛书由山东师范学院数学系主持编写。此外，还得到山东大学数学系、曲阜师范学院数学系、山东师范学院聊城分院数学系等单位的大力支持和帮助，在此一并致谢。

一九八〇年七月

目 录

第一章	复数	1
§1.1	数系的扩张	1
§1.2	复数的基本概念	5
§1.3	减法与除法	13
§1.4	复数的表示法	22
§1.5	复数的乘方	37
§1.6	复数的开方	44
§1.7	单位根与原根	51
§1.8	复数系的讨论	59
§1.9	数环与数域	64
	本章提要	70
	复习题一	71
第二章	一元多项式	74
§2.1	一元多项式的概念	74
§2.2	多项式环	81
§2.3	多项式的整除性	86
§2.4	带余除法	91
§2.5	综合除法	96
§2.6	多项式按另一多项式的方幂展开	101
	本章提要	107
	复习题二	108
第三章	最大公因式	110
§3.1	最大公因式的概念	110

§3.2	最大公因式的判别方法	117
§3.3	多项式的互素	123
§3.4	多个多项式的最大公因式	129
§3.5	最小公倍式	134
	本章提要	140
	复习题三	142
第四章	一元多项式的分解	145
§4.1	不可约多项式	145
§4.2	因式分解定理	150
§4.3	有理数域上的不可约多项式	156
§4.4	重因式	164
	本章提要	173
	复习题四	173
第五章	一元 n 次方程	175
§5.1	代数基本定理	175
§5.2	根与系数之间的关系	185
§5.3	方程的变换	193
§5.4	三次方程	202
§5.5	四次方程	215
§5.6	方程的有理根	219
	本章提要	231
	复习题五	233
第六章	实系数方程	236
§6.1	实根的界	236
§6.2	斯图姆定理	243
§6.3	斯图姆定理的应用	250
§6.4	实根的近似计算	258
	本章提要	269

	复习题六	271
第七章	有理分式	272
§ 7.1	一般概念	272
§ 7.2	有理分式的运算	276
§ 7.3	数域 P 上的最简分式	286
§ 7.4	复数域上的最简分式	296
§ 7.5	实数域上的最简分式	303
	本章提要	309
	复习题七	310
第八章	多元多项式	312
§ 8.1	一般概念	312
§ 8.2	多元多项式的排项法	319
§ 8.3	对称多项式	325
§ 8.4	在一元多项式上的应用	335
§ 8.5	结式	341
§ 8.6	判别式	349
§ 8.7	二元高次方程组	354
* § 8.8	结式的行列式表示法	361
	本章提要	381
	复习题八	383
习题答案与提示		387
【附录】	整数的整除性	422

第一章 复数

本章首先简述数系的扩张过程，然后介绍复数的概念及复数的运算。最后，引入数环和数域的概念。

§ 1.1 数系的扩张

一、从自然数系到实数系

在人类社会的实践活动中，从生产到科学实验、军事活动以至日常生活，人们不仅需要定性地了解和讲述问题，同时更需要定量地剖析事物的数量特性，而只有后者才能更精确更完备地揭示事物的本质。社会发展到今天，可以说，没有一门科学（甚至是社会科学）不与数量关系有密切的联系。

数是用来表示量的，是量的一种抽象。然而，数并非一开始就是现在的样子，它的发展经历了一个漫长的过程。

最简单的数是自然数，即正整数。幼儿在咿呀学语时，就开始接受自然数方面的启蒙教育，比如“一只小白兔”、“两个大苹果”、“三块糖”等，这些问题看起来自然是十分简单的，但是，它与人类最初对于数与量的认识却很相似。远在人类的原始阶段，不仅没有文字，也没有数字符号，人们只用结绳、刻画等方法来表示人或物的个数。通过长期的实践活动，人们才渐渐具备了把具体事物的个数抽象为自然

数的能力，并且能对自然数进行运算。这里，我们不打算详细地讨论自然数的发展过程，但有一点必须肯定的是：人类对数的认识是先从自然数开始的。

1, 2, 3, 4, ……这无穷多个自然数所组成的数系，称为自然数系，我们用 N 表示。显然，任意两个自然数的和与积仍是自然数。形象地说，自然数系 N 关于加法与乘法是“封闭的”。即自然数相加或相乘，其结果不会“跑”出自然数系。

在自然数系内，虽然能进行乘法运算，但不能通行乘法的逆运算——除法。也就是说，对于任意的自然数 a 与 b ，方程 $bx = a$ 在自然数范围内不一定有解。例如，方程 $2x = 3$ 在自然数系中就没有解。

同时，实践中对测量的要求不断提高，仅靠自然数已不能满足较高的要求，这就促使了正分数的产生。有了正分数，也就是正有理数，可以在其中通行加、乘、除三种运算。这是数系的第一次扩张。

扩张后的数系叫做正有理数系，记为 Q^+ 。

在 Q^+ 中虽然可以通行加法、乘法和除法，但加法的逆运算——减法，在 Q^+ 中仍不能通行。也就是说，对于任意的正有理数 a 与 b ，方程 $a + x = b$ 在 Q^+ 中不一定有解。比如方程 $2 + x = \frac{3}{2}$ 在 Q^+ 中就不存在解。为了使减法在 Q^+ 中能够

通行，还必须再次扩张数系。另外，实践中也常需要考虑带方向的测量以及负债等问题，因而导致负有理数及数零的出现。负数和零的引入，相对来说是较晚的。在五世纪的印度，虽有人用正负数来表示财产和负债，但像“+”、“-”

这样现在通行的记号，到1489年才由德国数学家维得曼(Widman)首次引进，直至十七世纪，关于负数才有较完整的理论和认识。

Q^+ 添上负有理数和零，得到了有理数系，记为 Q ，在 Q 中可以进行加、减、乘、除四种运算（但除法不允许零作除数），或者说， Q 关于加、减、乘、除四种运算封闭。

随着生产的发展和测量的精确化，早在古希腊，已有人知道不可公度线段的存在。如一个边长为1的正方形，其对角线长就不可能等于任何一个有理数，也就是说，方程 $x^2 = 2$ 在 Q 中没有解。此外，像圆周率 π 这样的数，也不能包含在有理数系 Q 内。这就需要进行数系的第三次扩张，即由有理数系扩张为实数系。历史上，在十七——十八世纪时，还只是利用数轴上的点表示实数，实数的理论直到十九世纪七十年代才由康托儿(Cantor)、狄特金(Dedekind)及维尔斯特拉斯(Weierstrass)等人注完成。

实数系用 R 表示。在 R 中不仅如同在 Q 中那样，通行四则运算，而且可进行非负数开方。

二、实数系的产生

实数系 R 建立之后， R 关于四则运算及非负数开方都可进行，但负数开偶次方仍然不能进行。从方程上来说，最简单的方程 $x^2 + 1 = 0$ 在实数范围内就没有解。实系数一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$$

注 G.Cantor (1845—1918), R.Dedekind (1831—1916) 和K. Weierstrass (1815—1897) 都是德国数学家。

当 $b^2 - 4ac < 0$ 时,就出现无实根的情况。在古代,数学家解二次方程遇到这种情况,就认为没有意义,是虚无的。

“虚数”之名,正反映了人们起初时对它的认识。

1747年,达朗贝尔(D'Alembert)对于虚数给出了类似于实数的运算法则,提出 $a + b\sqrt{-1}$ 的形式,但他还未给出“复数”的概念。“复数”的名称是十九世纪高斯(Gauss)引进的。但最早对复数作出系统论述的,要算欧拉(Euler)了,注他创造并运用了符号“ i ”。欧拉之后,北欧的外塞尔(Wessel)和法国的阿拉贡(Argand)在十九世纪初首先提出复数的几何解释;1811年高斯在数学上正式用平面上的点来表示复数。复数的几何解释一俟出现,复数的研究便突飞猛进。十九世纪,由于柯西(Cauchy)、黎曼(Riemann)注和维尔斯特拉斯的大量工作,在复数的基础上建立和发展了一门完整的数学分支——复变函数论。这一门学科在力学、理论物理、工程等方面有着广泛的应用,并且早已渗透到数学的各个分支,成为极其重要的理论和方法。

实数系增加上全部虚数后,构成复数系,用 C 表示。 C 不仅对四则运算通行无阻,而且可在其中进行任意次的开方运算。特别重要的是,正如以后将要看到的那样,任意次的代数方程在 C 中都有解。

三、扩张的原则

从自然数系到复数系,大体上经历了四个扩张过程。每

注 J.R.D'Alembert (1717—1783), 法国数学家. C.F.Gauss (1777—1855), 著名德国数学家. L.Euler (1707—1783), 瑞士数学家.

注 A.L.Cauchy (1789—1857), 法国数学家. G.F.B.Riemann (1826—1866), 德国数学家.

次扩张，一方面是客观实践的需要，另一方面，在数学上都是为了解决施行某种运算的问题而引起的。

综合各次扩张过程，可归纳为以下几点：

第一，每次扩张总是从一个较小的旧数系扩充为一个较大的新数系，使旧数系成为新数系的一部分。

第二，旧数系中所有能够进行的运算，在新数系中仍然有意义。而且，旧数系中的数，在看作新数系中的数进行运算时，其运算结果与它们在旧数系中完全相同。

第三，旧数系中不能通行的某种运算（如自然数系中的除法，正有理数系中的减法等），在新数系中能够通行。

第四，新数系是旧数系满足以上三个要求的最小扩张，而且由旧数系所唯一决定。

注意：前两条说明，数系的扩张不仅使数的范围扩大了，而且使旧数仍保持原有的运算；第三条说明扩张的主要目的；第四条说明扩张的最小性和唯一性，如 N 扩张到 Q^+ ，是为了能进行除法运算，所以只扩张到正有理数系，而不是扩张到 Q 、 R 或 C 。关于扩张的最小性和唯一性，这里还没有条件严格论证，读者暂时只能体会它的含意。

上述扩张过程可表示如下：

自然数系 $N \longrightarrow$ 正有理数系 $Q^+ \longrightarrow$ 有理数系 $Q \longrightarrow$ 实数系 $R \longrightarrow$ 复数系 C 。

从小学到中学在学习数的概念时，也基本上按照这一顺序进行。

§ 1.2 复数的基本概念

数的概念由自然数扩张到实数，也可以借助于数轴作直

观的几何解释。每个数在数轴上对应于一个唯一的点，这点的坐标等于该数。自然数对应于右半轴的整点，整数对应于整个数轴的整点，有理数则对应于坐标为有理数的点。这时，数轴上还有许多点没有数与之对应。直到数系扩张到实数系后，数轴上的全部点才都有唯一对应的数，而且任何实数在数轴上都有唯一的对应点。

现在，我们把点从数轴扩大到整个平面上来。平面上的点显然不能用一个实数表示出来，而必须用一对有次序的实数来表示。我们让平面上的点，或者让一对有次序的实数来代表一个复数。基于这个想法，可把复数的最基本的概念归纳为下面五条基本定义，从这五条出发，又可以建立复数系的代数理论。

一、基本定义

基本定义1 由一对有次序的实数 a 和 b 唯一确定的新元素，记为 (a, b) ，称为复数。

注意：用 (a, b) 记复数与通常复数的记号 $a + bi$ 看来有所不同，但下面还要讲到，它们是一致的。我们这样来定义复数，目的是使复数理论建立在比较严格的基础上。因为在定义复数加法之前，使用 $a + bi$ 来定义复数，会与加法概念发生混淆。

基本定义2 两个复数 (a_1, b_1) 和 (a_2, b_2) ，当 $a_1 = a_2$ 且 $b_1 = b_2$ 时，规定为相等，并且只有这时，它们才相等，记为 $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ 。

或者说， $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ 当且仅当 $a_1 = a_2$ 及 $b_1 = b_2$ 时成立。

基本定义3 形如 $(a, 0)$ 的复数,规定等于实数 a ,即 $(a, 0) = a$.

基本定义4 复数 $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ 称为复数 (a_1, b_1) 与 (a_2, b_2) 的和.即

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2). \quad (1)$$

基本定义5 复数 $(a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$ 称为复数 (a_1, b_1) 和 (a_2, b_2) 的乘积.即

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1). \quad (2)$$

注意:基本定义1给出复数的定义,第2给出复数相等的定义,第3说明实数与复数之间的关系,第4、5规定了复数的加法和乘法.

首先,我们来看实数系和复数系的关系.

由基本定义3,对于任意的实数 a ,都有一个复数 $(a, 0)$ 和它相等.而且由基本定义2知,不同的实数所对应的复数也不相同.同时,两个实数 a_1 及 a_2 在实数系中作加法、乘法运算,与将其看作 $(a_1, 0)$ 及 $(a_2, 0)$ 时在复数系中作相应运算的结果完全一致.事实上,

$$(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0 + 0) = (a_1 + a_2, 0),$$

$$(a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = (a_1 \cdot a_2 - 0 \cdot 0, a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0)$$

$$= (a_1 a_2, 0).$$

这样,我们可以把形如 $(a, 0)$ 的全体复数就看作是实数系.因而,复数系包含实数系,并且保持实数系原来的运算.

定义1 $i = (0, 1)$ 称为虚数单位.

推论1 $i^2 = -1$,

证明：由基本定义5，

$$\begin{aligned} i^2 &= i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) \\ &= (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -1. \end{aligned}$$

推论2 $(a, b) = a + bi$.

$$\begin{aligned} \text{证明：} \quad a + bi &= (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) \\ &= (a, 0) + (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) \\ &= (a, 0) + (0, b) = (a, b). \end{aligned}$$

证毕。

推论2把复数 (a, b) 与常见的形式 $a + bi$ 统一起来了。今后我们就用 $a + bi$ 表示复数，而不用 (a, b) 的形式。

根据复数的基本定义4与5知，复数 $a + bi$ 的加法和乘法规则如下：

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i, \\ (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i. \end{aligned}$$

定理1 复数的加法与乘法都满足交换律与结合律；复数的乘法关于加法满足分配律。即对于任意的复数 $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, $z_3 = a_3 + b_3 i$ ，以下等式成立：

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1; \quad (\text{加法交换律}); \quad (3)$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1; \quad (\text{乘法交换律}); \quad (4)$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3); \quad (\text{加法结合律}) \quad (5)$$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3); \quad (\text{乘法结合律}) \quad (6)$$

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3. \quad (\text{分配律}) \quad (7)$$

证明：(3)至(7)根据基本定义均可直接证出。下面我们仍以(7)式为例加以证明，其余各式，读者可作为练习。

$$\begin{aligned} (7) \text{式左端：} & z_1 \cdot (z_2 + z_3) \\ &= (a_1 + b_1 i)[(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3) i] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3) + [a_1(b_2 + b_3) \\
&\quad + (a_2 + a_3)b_1]i \\
&= (a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3) + (a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 \\
&\quad + a_3b_1)i.
\end{aligned}$$

(7)式右端: $z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

$$\begin{aligned}
&= (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 + b_1i)(a_3 + b_3i) \\
&= [(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i] + [(a_1a_3 - b_1b_3) \\
&\quad + (a_1b_3 + a_3b_1)i] \\
&= (a_1a_2 - b_1b_2 + a_1a_3 - b_1b_3) + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 \\
&\quad + a_3b_1)i.
\end{aligned}$$

证毕。

由于复数的加法和乘法满足通常所熟知的运算规则，因此，它与通常多项式加法和乘法的运算规则是完全一致的。这样，在复数运算中只要记住 $i^2 = -1$ ，即可按多项式的加法和乘法进行计算。例如，

$$\begin{aligned}
(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) &= a_1a_2 + a_2b_1i + a_1b_2i + b_1b_2i^2 \\
&= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i.
\end{aligned}$$

二、复数的分类

定义2 复数 $z = a + bi$ 中， a 称为 z 的实部， bi 称为 z 的虚部， b 称为虚部系数。

如 $2 + 3i$ 的实部为 2，虚部为 $3i$ ，虚部系数为 3。

定义3 不是实数的复数称为虚数。即形如 $z = a + bi$ ($b \neq 0$) 的复数是虚数。

注意：许多读者往往把复数同虚数混为一谈，在此，再次提请读者注意。

定义4 实部为零的虚数称为纯虚数。即形如 $0 + bi$ ($b \neq 0$) 的复数是纯虚数。

如 $2 + 3i$ 是一个虚数，但不是纯虚数； $0 + 3i$ 是纯虚数， $0 + 0i$ 是一个实数，而不是虚数。

因而复数可作如下分类：

$$\text{复数 } (a+bi) \begin{cases} \text{实数 } (a+0i) \begin{cases} \text{有理数} \begin{cases} \text{整数} \begin{cases} \text{自然数} \\ \text{零} \\ \text{负整数} \end{cases} \\ \text{分数} \end{cases} \\ \text{无理数} \end{cases} \\ \text{虚数 } (a+bi, b \neq 0) \begin{cases} \text{纯虚数 } (0+bi, b \neq 0) \\ \text{非纯虚数 } (a+bi, a \neq 0, b \neq 0) \end{cases} \end{cases}$$

三、例题

例1 计算 $(2+3i)[(4-2i)+(2+i)]$ 。

解： $(2+3i)[(4-2i)+(2+i)]$
 $= (2+3i)(6-i) = 15 + 16i$ 。

例2 解方程 $(2+i)x + (-3+3i)y = 1-4i$ ，其中 x, y 为实数。

解： 由复数相等的定义，可将方程化为实数系中的两个方程

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ x + 3y = -4. \end{cases}$$

解得 $x = -1, y = -1$ 。

例3 计算 i^n (n 为自然数)。