高等学校教学用书

随机模型与计算机模拟

吴新瞻　吴新垣　编

高等学校教学用书

随机模型与计算机模拟

吴新瞻　吴新垣　编著

电子工业出版社

内 容 提 要

本书从建立系统的数学模型、用解析方法求解到进行计算机模拟作全面和较深入的介绍。全书的安排采取具体——一般—具体的方式。首先讨论了以直观的、人们经常面临的问题为实际背景的数学模型：存储模型、排队模型和可靠性模型。接着，转入一般的系统模型，用形式化的方法，一般地论述系统模型的要素、分类、分级及描述方法，讨论了一个系统的各种描述模型之间的关系。然后，针对一般的系统模型，论述了实现计算机模拟的原理，编制模拟程序的程序设计方法，重点讨论了离散事件模型的模拟。最后，通过一些代表性的实例，说明编制各种模型的模拟程序的关键性技巧。

本书注意理论与实践的结合，集理论、算法、程序设计语言、程序设计技巧和实例于一体。详尽阐明基本概念、基本方法，又包含进一步发展与各种实际应用的较新颖内容。

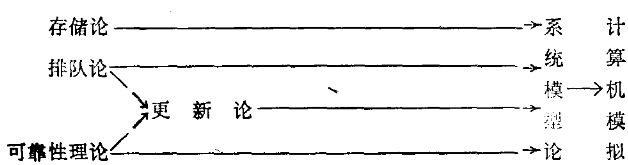
全书的基本内容只要具备概率论基础知识的读者就可读懂。适合于理工科大学，特别是计算机科学技术、管理科学、应用数学等专业的师生，以及包括系统分析员、软件设计人员在内的广大工程技术人员参考。

随机模型与计算机模拟
吴新瞻　吴新垣　编著
责任编辑：梁祥丰
电子工业出版社出版（北京市万寿路）
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经销
冶金工业出版社印刷厂印刷
开本：850×1168毫米1/32　印张：11.625字数：312千字
1990年9月第一版　1990年9月第一次印刷
印数：1200册　定价：2.95元
ISBN7 5053 0875-0/TP·135

前 言

计算机和数学研究成果的结合开辟了计算机应用的一个广阔领域。在研究许多复杂现象时，应用数学方法，形成基本概念和模型，并对模型求解。能够用公式给出解当然很有意义，但这种情况并不很多。计算机模拟提供了模型求解的一条新的可行的途径。这样，建立模型和计算机模拟就成为两个相辅相成、紧密联系的课题。

本书按照统一的观点，对从建立研究对象（系统）的数学模型，直至进行计算机模拟的步骤、基本概念和方法作较深入的论述。全书的安排采取具体——般—具体的方式。首先，讨论了三类以直观的、人们经常面临的问题为实际背景的数学模型：存储模型、排队模型和可靠性模型。它们是联系实际的较成功的数学模型，已经形成独立的分支学科，也与数学其他分支（如生灭过程、更新论等）有紧密的联系。接着，从具体的数学模型转入一般的系统模型，用形式化的方法，一般地论述了系统模型的要素、分类、分级及描述方法，讨论了一个系统的各种描述模型之间的关系，并且进一步给出了几类重要的系统正规描述模型。然后，针对一般的系统模型，论述了实现计算机模拟的原理，编制模拟程序的程序设计方法，重点讨论了离散事件模型的模拟。最后，选择了一些有代表性的应用实例，说明编制各种模型的模拟程序的各种关键性技巧。各章之间的联系由下图给出：



本书各章的内在联系已如上述，但是各章有着相对的独立

性，只在必要时可查阅其他有关的结果。全书的基本内容只要具备概率论基础知识的读者均可读懂。本书的重点不在于引进繁复的数学工具，追求完全的解析表达式。但是，对于模型的假设条件、基本概念和结果，我们力求给出数学上完整的论述。例如，由于在排队系统中顾客的相继到达、可靠性问题中故障元件的相继更换，都是一种“更新”现象，为了深入了解这类现象的有关规律，在第四章专门讨论更新论。此外，无论从历史的发展情况，还是从读者深入理解的角度来看，排队论的一些最基本的结果是与生灭过程密切相关的。而且，生灭过程本身就是一个有成效的模型。因此，在3.2节中对生灭过程作了较多介绍。排队论的结果还用于通信网络和计算机局域网的性能分析问题。书中有部分较难一些的数学内容，对偏重计算机编程的读者暂时不必抠住不放。

计算机模拟通过编制程序体现出系统的模型，将模型转换成一种可在计算机上操作的方式，以便对模型进行各种试验。模拟(Simulation)的另一种已较通行的译法是仿真，后一名词似乎更给人一种直观印象。但是，不要以为模拟就是直接模仿真实的系统。在模拟之前，必须得到真实系统的一个概念上的、经过简化和抽象的模型，它体现了真实系统的某些方面的特性。

“计算机模拟”和“蒙特卡罗方法”这二个名词也有着密切的关系。前者强调计算机的作用，后者突出统计试验的特点。实际上，这二种称呼所涉及的领域有很多部分是重合的。有一些学者认为，计算机模拟实质上只是蒙特卡罗方法用于本身具有随机性质的动态系统，而蒙特卡罗方法还可以用于解确定性的数学问题（如计算积分、解微分方程等等)。但实际上计算机模拟也经常使用确定性的数值解法，系统中不确定性的因素也不一定完全是随机性质的。本书中蒙特卡罗方法是作为计算机模拟的一个组成部分来叙述的，这主要是为了叙述上的方便。

本书最后有二个附录。附录一是为了让读者熟悉黎曼-斯蒂尔杰斯积分的运算法则，以便掌握书中一些公式的推导并用于实例计算。附录二给出模拟语言SIMULA的相当精练而明确的介绍，

系译自I.Mitrani的书中的一个附录。它不仅对于理解用SIMULA语言编出的排队网络模拟程序实例是必需的，而且有助于了解编制模拟程序的结构化程序设计和面向对象的程序设计方法。

作者之一吴新瞻应徐钟济教授和罗晓沛教授之约，于1983年在中国科技大学研究生院开设了一门选修课，本书的初稿用作讲义。此后，我们根据多年工作积累的材料和近年来国外丰富的文献，对初稿的内容作了许多修改和补充。

在写作本书时，我们的愿望是在理论与实践间搭起桥来，但是，由于我们的学术水平和时间的限制，无论是题材取舍还是内容本身，都可能存在不妥和错误之处，恳请读者批评指正。

吴新瞻　吴新垣

目　　录

参考文献及练习在各章之后。

第一章 存 储 论

存储是社会生活中的一种普通的现象，工厂为了保证连续的生产，需要存放必需的原材料或零件、配件；商店为了满足顾客的需求，需及时地向各个厂家订货，等等。所谓存储(inventory, stock,storage）是指存放具有经济价值的资源（如原材料、制成品等），它由一定数量的货物组成。存储量是随着时间而发生变化的，当到达一批新的货物，存储量就立即增加；由于供应不断的需求，存储量逐渐减少，如此循环不已。

存储本身是需要付出费用的，一般，存储量越大，付出的费用也越高。但另一方面，存储也能带来经济效益。存储论研究的问题，就是确定最优的存储策略，使得付出的费用最少或得到的利润最大。这里所谓存储的策略，包括确定订货的时间以及订货的数量。订货的时间可由固定的订货周期，或者根据存储量达到的水平来给出。

为了确定最优的存储策略，除了了解对存储物品的需求情况，获得物品所需的时间，还必需详细分析存储所需的各种费用，这样，才能建立一个合理的存储模型。

在进入各种具体的存储模型的研究之前，先对存储模型中的各种变量、参数以及存储量变化的机理简单地介绍一下。

用$I(t)$表示在t时刻的存储量，I_0为初始时刻的存储量。h表示每单位量的货物存储单位时间所需的费用，简称为存储费。它反映货物在存储过程中需要支出的费用，在不同的问题中，存储费的具体反映可能不一样，它可以表现为对货物进行管理所需的一切费用，也可以表现为货物因积压未用而受到的损失，等等。一般存储费与物品的数量及存放的时间长短均有关。

为了获得存储的物品，也需要一定的费用。如果是向别的部门订购物品，则每次订购可能要花费一笔通信往来费、出差费、手

续费等。如果是组织本部门投产，则进行一次生产准备也需要花费一笔费用。这种费用简称为订购费或投产费，用 s 表示。一般来说，订购费 s 只与订购的次数有关，与订购物品的数量无关。

在存储模型中必须考虑缺货的影响，如果缺货不带来损失，任何存储也均无必要了。有的情况，根本不允许存在缺货，或者说，缺货的费用为无穷大。在一般情况下，在单位时间内短缺单位量的物品，所需的费用用 d 表示，简称为缺货费。总的缺货费与缺货的数量及缺货的时间长短有关系。有时，缺货的损失是由于造成停产而引起；有时，缺货的损失是由于失去了销售的机会，因而不能获得本来可以得到的利润。

在有些情况下，还要考虑购买或生产单位物品的价格（或成本），用 c 表示。但是，若物品的价格本身对存储费用不产生影响，就不必加以考虑。

顾客对存储物品的需求率（单位时间内需要的物品数量）可能随时变化，因此，在 t 时刻的需求率用 $r(t)$ 表示。

当发出订货单后，需要经过一段时间之后订购的货物才能到达。称从订单发出至订货到达的时间间隔为拖后时间 L，它也可以称作提前时间，即在你希望得到订购的货物的时间之前，必须有一段提前时间。

如果确定存储量的一个数量 p，当存储量达到 p 时，就发出订货，则称 p 为订货点。确定了订货点 p，也就确定了订货的时

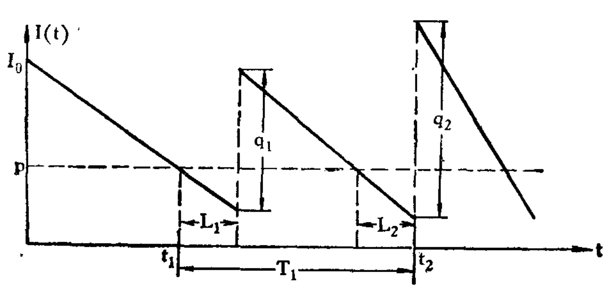


图 1.1　存储量 I(t)

间。订货量一般用 q 表示，即一次订购物品的数量。

图1.1表示了存储量变化和补充的机理。在初始时刻存储量为I_0，在各个t_i $(i=1,2,\cdots)$时刻，存储量达到订货点 p，故发出订单，经过L_i的拖后时间后，增加了q 存储量。若需求率 $r(t)$ 等于常数，存储量的变化曲线为锯齿形。$T_i = t_{i+1} - t_i$ 称为一次订货周期。

1.1 确定性存储模型

先考虑存储模型中的变量均为确定性变量的情况。

1.1.1 经典的经济批量(economic lot size)模型

这是最基本、最简单的存储模型。它的基本假定是：需求率 r、订购费 s、存储费 h 均为常数，拖后时间$L=0$，不允许出现短缺。订货周期T及每次订货量 q 也为常数值。

由于拖后时间为0，故可以在存储量达到0时再订货，即订货点为0。在上面的假定条件下，要确定最优的 T 和 q，使得单位时间的存储总费用最少。

订货周期T可直接由订货量q确定：$T=q/r$。只需要考虑一个订货周期就可以了。在订货周期T内的存储费用由存储费 $C_{h,T}$及一次订购费 s 组成。先确定存储量$I(t)$：

$$
\begin{aligned}
I(t) &= q - \int_0^t r dt \\
&= q - rt
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

存储费$C_{h,T}$为：

$$
\begin{aligned}
C_{h,T} &= \int_0^T h \cdot I(t) dt \\
&= \int_0^T h(q-rt) dt \\
&= hqT - \frac{hrT^2}{2}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{hqT}{2} \tag{1.2}$$

于是，在周期T内的总费用 $C_T=\frac{hqT}{2}+s$。目标函数是单位时间内的费用C_T/T，

$$C(q)=\frac{C_T}{T}=\frac{hq}{2}+\frac{sr}{q} \tag{1.3}$$

为使$C(q)$达到极小，从$C'(q)=0$解出

$$\hat{q}=\sqrt{\frac{2rs}{h}} \tag{1.4}$$

即为最优订货量。从而最优订货周期$\hat{T}$为

$$\hat{T}=\hat{q}/r=\sqrt{\frac{2s}{hr}} \tag{1.5}$$

最小费用值为

$$\hat{C}=\sqrt{2rsh} \tag{1.6}$$

公式（1.4）—（1.6）是经济批量模型的解，它们在实际问题中仍然有一定的应用价值。从（1.2）可以看出，单位时间的存储费等于$\frac{hq}{2}$，即h与平均存储量$\frac{q}{2}$的乘积。

1.1.2 允许短缺的模型

在经济批量模型的假定条件中，可以改变不允许短缺这一条件，即允许出现物品的短缺，但假定在单位时间内短缺单位数量的物品，需要支付短缺费d。其他假定条件相同。存储量$I(t)$的变化曲线见图1.2。

记每次订货后达到的最大存储量为M。从图1.2可以看出，在t'期间内，存储量大于0，因此必须支付存储费；在t''期间内，存储量小于0，必须支付短缺费。在本模型中假定，短缺期间t''

内的需求并不丢失，待订货到达后立即全部供应。

在t'期间内支付的全部存储费等于

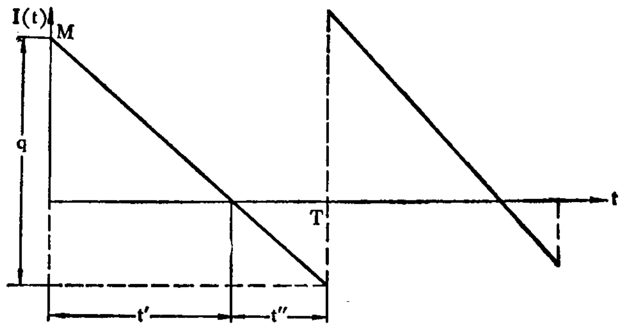


图1.2　允许短缺模型的存储量I(t)

$$C_{h,t'}=h\cdot\frac{M}{2}\cdot t',$$

在t''期间内支付的全部短缺费等于

$$C_{d,t''}=d\cdot\frac{q-M}{2}\cdot t''。\qquad(1.7)$$

$T=t'+t''$构成一次订货周期，下列关系成立：

$$q=rT,$$

$$t'=M/r,$$

$$t''=\frac{q-M}{r}=\frac{rT-M}{r}。$$

因此，在订货周期T内，每单位时间的存储费用为：

$$C\triangleq C(M,\ T)=\frac{1}{T}(C_{h,t'}+C_{d,t''}+s)$$

$$=\frac{hM^2}{2rT}+\frac{d(Tr-M)^2}{2rT}+\frac{s}{T}\qquad(1.8)$$

为了寻找最优的M和T，使$C(M,T)$达到最小值，可以通过解下列方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial M}=0 \\ \dfrac{\partial C}{\partial T}=0 \end{cases} \tag{1.9}$$

得出

$$\widehat{M}=\sqrt{\frac{2rs}{h}}\cdot\sqrt{\rho} \tag{1.10}$$

$$\widehat{T}=\sqrt{\frac{2s}{rh}}\sqrt{\frac{1}{\rho}} \tag{1.11}$$

其中 $\rho \triangleq \dfrac{d}{h+d}$。

通过验证，二阶偏导数的行列式

$$\left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 C}{\partial M^2} & \dfrac{\partial^2 C}{\partial M \partial T} \\ \dfrac{\partial^2 C}{\partial M \partial T} & \dfrac{\partial^2 C}{\partial T^3} \end{vmatrix}\right|_{\substack{M=\widehat{M} \\ T=\widehat{T}}} > 0$$

故 $(\widehat{M}, \widehat{T})$ 的确使 $C(M, T)$ 达到极小值。

以 (1.10) 和 (1.11) 代入 (1.8)，得到最小存储费用 $\widehat{C}=C(\widehat{M}, \widehat{T})$ 为：

$$\widehat{C}=\sqrt{2rsh}\cdot\sqrt{\rho} \tag{1.12}$$

最优订货量 $\widehat{q}$ 为：

$$\widehat{q}=\frac{\widehat{T}}{r}=\sqrt{\frac{2rs}{h}}\sqrt{\frac{1}{\rho}} \tag{1.13}$$

将 (1.4)—(1.6) 与 (1.11)—(1、13) 进行比较，可看出允许短缺后，$\widehat{T}$、$\widehat{q}$ 与 $\widehat{C}$ 比原来的公式增加一个与 ρ 有关的因子。由于 $0<\rho<1$，允许短缺后存储费用可以降低。另外，易知 $\rho=\widehat{s}/\widehat{q}=t'/T$，$1-\rho=t''/T$，故可称 $1-\rho$ 为短缺因子（短缺时间占的比