全国大中型企业领导干部培训教材
QUANGUO DAZHONGXING QIYE LINGDAO GANBU PEIXUN JIAOCAI

经济管理数学

李端敏 主编

中国经济出版社

内 容 简 介

本书为全国大中型企业领导干部培训必修课之一，内容包括三个部分：线性代数初步，应用数理统计和运筹学。线性代数是学习应用数理统计和运筹学的必要基础，而数理统计和运筹学是当前经济管理中广泛应用的数学方法。

本书理论联系实际，重点突出，有一定的系统性和较强的实用性。各章后面配有习题，以帮助读者加深理解和提高解决问题的能力。

本书可供从事企业管理、经济分析的人员学习，亦可作为经济管理学院师生阅读参考。

责任编辑：王振德

封面设计：王乃晋

经 济 管 理 数 学

李端敏 主编

*

中国经济出版社出版发行

（北京市百万庄北街3号）

北 京 印 刷 三 厂 印 刷

各 地 新 华 书 店 经 销

*

850×1168毫米 1/32 17 8/32印张 444千字

1989年9月第1版 1989年9月第1次印刷

印数：1—5000

ISBN 7-5017-0133-4/F·194

定价：7.40元

出 版 说 明

为贯彻落实党中央、国务院关于建立一支社会主义经济管理干部宏大队伍的要求，深入开展对大中型企业领导干部进行现代管理知识的系统培训，国家经委组织有关高等院校根据教学实践编写了这套供大中型企业厂长（经理）、党委书记、总工程师、总经济师、总会计师五种岗位培训必修课教材，并邀请有关专家、学者和企业领导干部逐本进行了审核评议，现陆续出版，提交使用。

这套教材，以“面向现代化，面向世界，面向未来”的思想为指针，比较全面系统地反映了各门课程的基本理论和知识，并针对干部教育的特点，贯彻了理论联系实际的原则，在充分反映我国企业管理经验和特色的基础上，注意吸收国内外在管理科学方面研究和实践的新成果，在内容上力求有较强的实用性、针对性和先进性，文字上力求简明扼要，浅显易懂，是一套比较有特点的、适合大中型企业领导干部岗位培训和自学的教材，也适合企业中广大中层领导干部阅读。

大中型企业领导干部岗位培训，是一种高层次的干部教育。编好、用好这套教材，是保证培训质量的重要环节。有关院校及编写人员，为此作了很多工作，付出了艰苦的劳动。但这方面的经验还不足，我们正在摸索，希望承担培训任务的院校及经济部门和所有教学人员，热忱地提出批评、建议和修改意见，以便使这套教材日臻完善，使岗位培训工作搞得更好。

全国大中型企业领导干部
培训教学指导委员会
1987年5月3日

前　　言

《经济管理数学》是根据国家经委对大中型企业领导干部培训要求而编写的一本教材。

本书较全面地反映了我国大中型企业领导干部，学习现代化管理方法所需的经济管理数学的基础理论。全书内容包括三个部分：线性代数初步，应用数理统计和运筹学。线性代数是学习应用数理统计和运筹学的必要基础，而应用数理统计和运筹学是目前在经济管理中广泛应用的数学方法。

本书编写中力求从实际问题引入基本概念和方法，突出重点，注意理论联系实际，对主要的定理和公式着重阐明它们的实际意义，并通过实例来说明如何应用。本书既保持了一定的系统性，又具有较好的针对性、实用性。各章后面配有习题，以帮助读者加深理解和提高分析解决问题的能力。

本书的大部分初稿，近年来都曾在不同层次的大中型企业干部班上使用过，教学效果较好。书中有些例题，就是干部班学员在实际生产中所取得的成果。

本书第一部分线性代数初步（共三章）是由胡显佑编写的，第二部分应用数理统计（共十章）是由李端敏编写的，第三部分运筹学（共七章）是由程佳惠编写的，全书由李端敏主编。

本书由华中工学院管理学院林少宫教授主审。全书的编写工作是在国家经委干部教育局领导下进行的。编写过程中，得到了

清华大学徐国华副教授的热情鼓励和支持，也参考了一些有关教材、著作。在此向他们表示衷心的感谢。

由于编写定稿时间仓促，作者水平有限，恳切希望广大读者对本书的缺点错误批评指正。

编　者

1988年3月

目　　录

前　　言

第一篇　线性代数初步

第一章　行列式 …… 1

　§1　行列式的概念 …… 1

　§2　行列式的性质 …… 10

　§3　行列式按行（列）展开和克莱姆法则 …… 14

　习题一 …… 21

第二章　矩　阵 …… 25

　§1　矩阵的概念 …… 25

　§2　矩阵的运算 …… 27

　§3　分块矩阵 …… 35

　§4　逆矩阵 …… 39

　§5　矩阵的初等变换和矩阵求逆 …… 44

　习题二 …… 51

第三章　线性方程组 …… 57

　§1　n维向量 …… 57

　§2　向量的线性相关性 …… 16

　§3　矩阵的秩 …… 66

　§4　线性方程组的解法 …… 70

　§5　线性方程组解的结构 …… 81

　习题三 …… 90

第二篇　应用数理统计

第一章　数据的整理及初步分析 …… 94

§ 1　数据的整理：频率分布表与频率直方图 ………………… 94
§ 2　几个重要的数字特征数 ……………………………………101
习题一 ………………………………………………………………109
第二章　随机事件与概率 ……………………………………………111
§ 1　随机事件 ……………………………………………………111
§ 2　事件的概率 …………………………………………………112
§ 3　古典概型 ……………………………………………………115
§ 4　概率的加法定理 ……………………………………………117
§ 5　条件概率、乘法公式 ………………………………………122
§ 6　全概率公式与贝叶斯公式 …………………………………126
习题二 ………………………………………………………………131
第三章　随机变量及常用概率分布 …………………………………132
§ 1　随机变量 ……………………………………………………132
§ 2　离散型随机变量 ……………………………………………132
§ 3　连续型随机变量 ……………………………………………145
§ 4　随机向量及其分布 …………………………………………151
习题三 ………………………………………………………………156
第四章　随机变量的数字特征 ………………………………………157
§ 1　离散型随机变量的数学期望 ………………………………157
§ 2　连续型随机变量的数学期望 ………………………………162
§ 3　随机变量的方差 ……………………………………………163
§ 4　数学期望和方差的性质 ……………………………………168
§ 5　矩 ……………………………………………………………169
§ 6　大数定律和中心极限定理 …………………………………171
习题四 ………………………………………………………………175
第五章　抽样分布 ……………………………………………………177
§ 1　简单随机样本 ………………………………………………177
§ 2　统计量 ………………………………………………………178
§ 3　抽样分布 ……………………………………………………179
第六章　参数估计 ……………………………………………………183
§ 1　点估计 ………………………………………………………183
§ 2　区间估计 ……………………………………………………192

习题六 ……………………………………………………………202
第七章 假设检验 ……………………………………………………203
§ 1 假设检验问题的基本思想 …………………………………203
§ 2 一个正态总体参数的假设检验 ……………………………205
§ 3 两个正态总体参数的假设检验 ……………………………216
§ 4 分布函数的拟合检验 ………………………………………221
习题七 ……………………………………………………………229
第八章 方差分析 ……………………………………………………231
§ 1 单因素试验的方差分析 ……………………………………231
§ 2 双因素试验的方差分析 ……………………………………239
习题八 ……………………………………………………………245
第九章 正交试验设计 ………………………………………………247
§ 1 正交表 ………………………………………………………247
§ 2 试验方案的设计 ……………………………………………250
§ 3 试验结果的初步分析 ………………………………………252
§ 4 考虑有交互作用的试验分析 ………………………………257
§ 5 试验数据的方差分析 ………………………………………262
§ 6 多个指标的试验结果分析 …………………………………267
§ 7 正交表在试验设计中的灵活运用 …………………………269
习题九 ……………………………………………………………275
第十章 回归分析 ……………………………………………………278
§ 1 一元线性回归 ………………………………………………279
§ 2 多元线性回归 ………………………………………………301
§ 3 可线性化的非线性回归 ……………………………………316
习题十 ……………………………………………………………323

第三篇 运筹学

第一章 线性规划的数学模型 ………………………………………325
§ 1 几个实例 ……………………………………………………325
§ 2 线性规划问题的数学模型 …………………………………336
习题一 ……………………………………………………………341
第二章 线性规划问题的解 …………………………………………344

§ 1　基本概念 ……………………………………………………………344
§ 2　图解法 ………………………………………………………………348
§ 3　线性规划问题解的性质 ……………………………………………353
习题二 ……………………………………………………………………354
第三章　单纯形法 ………………………………………………………356
§ 1　引例 …………………………………………………………………356
§ 2　单纯形法 ……………………………………………………………361
§ 3　单纯形法的进一步讨论 ……………………………………………377
§ 4　单纯形法小结 ………………………………………………………385
习题三 ……………………………………………………………………388
第四章　线性规划的对偶性 ……………………………………………391
§ 1　对偶问题的一般提法 ………………………………………………391
§ 2　互为对偶问题的解 …………………………………………………396
§ 3　对偶单纯形法 ………………………………………………………407
习题四 ……………………………………………………………………412
第五章　灵敏度分析 ……………………………………………………415
§ 1　灵敏度分析 …………………………………………………………415
§ 2　线性规划小结 ………………………………………………………429
习题五 ……………………………………………………………………432
第六章　其它常用规划简介 ……………………………………………435
§ 1　整数规划 ……………………………………………………………435
§ 2　多目标规划 …………………………………………………………445
§ 3　目标规划 ……………………………………………………………451
§ 4　动态规划 ……………………………………………………………459
习题六 ……………………………………………………………………471
第七章　网络计划技术 …………………………………………………474
§ 1　网络图 ………………………………………………………………475
§ 2　时间参数的计算 ……………………………………………………482
§ 3　网络计划的优化 ……………………………………………………495
§ 4　实施计划的管理 ……………………………………………………504
习题七 ……………………………………………………………………507
附表： ……………………………………………………………………510

1. 常用正交表 ……………………………………………………………510
2. 普阿松分布表 ……………………………………………………………523
3. 标准正态分布函数值表 ……………………………………………………526
4. t一分布双侧分位数(t_α)表 ……………………………………………530
5. χ^2一分布上侧分位数($\chi^2_{\alpha,\nu}$)表 ………………………………………532
6. F一分布上侧分位数(F_α)表 ……………………………………………535
7. 样本相关系数的临界值(r_α)表 …………………………………………543

第一篇　线性代数初步

第一章　行　列　式

行列式是线性代数中最基本的概念之一。它不但应用于数学的各个分支，而且也广泛应用于物理学，力学和数量经济学等各个学科。本章主要介绍：（1）行列式的概念；（2）行列式的基本性质以及它的计算方法。

§1　行列式的概念

行列式的概念来源于求解线性方程组。所谓线性方程组就是初等代数中的一次方程组。

1.1 二阶和三阶行列式

考虑含有两个未知量 x_1，x_2 的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

为了求得（1.1.1）的解，我们利用加减消元法可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21} \end{cases}$$

所以，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组（1.1.1）有唯一

解：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \\[2ex] x_2 = \dfrac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \end{cases} \tag{1.1.2}$$

为便于记忆，我们规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.1.3}$$

并称满足上述规定的$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$为二阶行列式。二阶行列式的计算可根据下图来记忆：

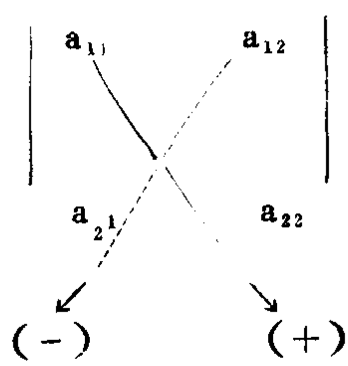

图 1-1-1

利用二阶行列式的概念，(1.1.2)中的分子就可以分别写成

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

因此，对于方程组（1.1.1），在$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$时，它的解就可以表示为：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{1.1.4}$$

类似地，为了求解含有三个未知量 x_1，x_2，x_3 的线性方程

组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.1.5}$$

我们规定记号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.1.6}$$

并称它为三阶行列式。三阶行列式所表示的代数和，可以利用下图来记忆：

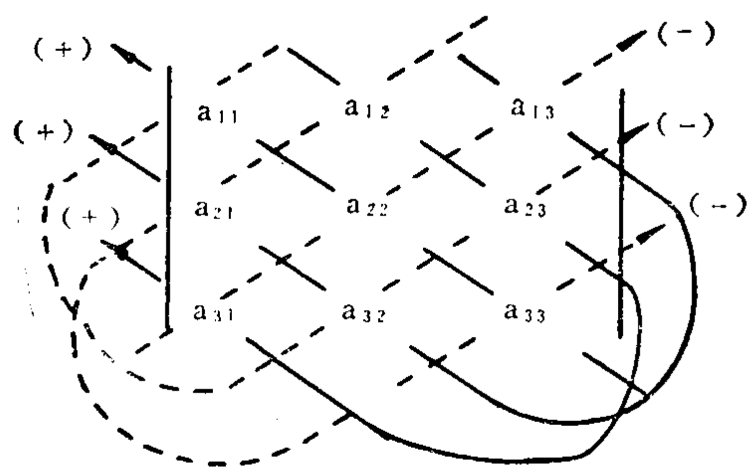

图 1—1—2

其中，沿各实线相连的三个数的积取正号，各虚线相连的三个数的积取负号，它们的代数和就是（1.1.6）所表示的三阶行列式。

例 1　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

解　$D=2\times1\times3+(-3)\times(-2)\times5+1\times4\times1$
$-1\times1\times5-(-3)\times4\times3-2\times(-2)\times1$
$=75$

行列式D中的横排，纵排分别称为它的行和列。

利用加减消元法，可以求得线性方程组（1.1.5）的解，其结果可用三阶行列式表示为：

当

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，方程组（1.1.5）有唯一解

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D}$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D} \tag{1.1.7}$$

不难看出，公式（1.1.7）的各分式中的分母D就是方程组（1.1.5）的系数按原来顺序排列构成的行列式，一般称D为方程组的系数行列式。x_1 的分子就是把系数行列式D的第一列换为常数项 b_1、b_2、b_3、其余各列不变所构成的行列式。x_2、x_3 的分子也有类似的特点。

对照求解方程组（1.1.1）的公式（1.1.4）可以发现，公式（1.1.4）也具有同样的特点。后面我们可以知道，在一定条件下，具有更多未知量的线性方程组的解也有类似的特点。

例 2　解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=11 \\ x_1+x_2+x_3=6 \\ 3x_1-x_2-x_3=-2 \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-2+9-1-3+2+3=8\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 11 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-11-6-6+2+11+18=8$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}=-12+33-2-18+4+11=16$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}=-5+54-11-33+12+6=24$$

所以 $x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{8}{8}=1$； $x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{16}{8}=2$；

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{24}{8}=3$$

是方程组的解。

1.2 n 阶行列式

为了将二阶、三阶行列式的概念推广到n阶行列式，我们首先引入排列的概念。

1. 排列及其逆序数

定义1.1 由自然数1，2，…，n组成的一个有序数组（j_1，j_2，…，j_n），称为一个n级排列。

例如，自然数1，2，3所组成的三级排列共有3！= 6个，它们是

123，132，213，231，312，321。

一般地，n级排列的总数为$n!$个

定义1.2 在一个n级排列$j_1, j_2, \cdots, j_n$中，如果较大的数j_s排在较小的数j_t的前面($j_s > j_t$)，则称这一对数j_s，j_t构成一个逆序。这个排列的逆序的总数，称为该排列的逆序数，记为

$$\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)$$

例1，在四级排列4213中，构成逆序的数对有42，41，43，21。因此$\tau(4213) = 4$。

例2 在n级排列$1\ 2\ 3 \cdots n$中，任何一个数对都不构成逆序。因此$\tau(1\ 23\cdots n) = 0$。

例3 在n级排列$n(n-1)\cdots 2\ 1$中，构成逆序的数对有

$$\begin{array}{rrrr} n(n-1), & n(n-2), \cdots, & n2, & n1 \\ & (n-1)(n-2), \cdots, & (n-1)2, & (n-1)1 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ & & & 32,\ 31 \\ & & & ,\ 21 \end{array}$$

所以，$\tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$

$$= \frac{n(n-1)}{2}$$

定义1.3 逆序数是偶数的排列称为偶排列；逆序数是奇数的排列称为奇排列。逆序数为零的排列，我们规定它是偶排列。

例如，由于$\tau(4213) = 4$，所以排列4213是偶排列。

由自然数1，2，3所组成的三级排列共有6个，其中，123，231，312是偶排列；132，213，321是奇排列。一般，由n个自然数1，2，…，n所组成的所有n级排列中，奇排列和偶排列的个数相同。

2．n阶行列式

为了将二阶、三阶行列式的概念推广到n阶，我们首先分析三阶行列式的特点。由（1.1.6）式，我们知道三阶行列式是所

有位于不同行，不同列的三个元素乘积的代数和，其中每一项都可以写成下述形式：

$$a_{1j_1}\ a_{2j_2}\ a_{3j_3} \tag{1.1.8}$$

而下标 j_1，j_2，j_3 构成一个三级排列，当排列$(j_1\ j_2\ j_3)$是偶排列时，（1.1.8）就取正号。当排列$(j_1\ j_2\ j_3)$是奇排列时,(1.1.8)就取负号。因此，在行列式中项（1.8）前所带的符号是

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$$

这样的项的个数，恰好是所有三级排列的个数 $3! = 6$ 个。所以三阶行列式（1.1.6）也可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2j_3)} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

这里“Σ”是连加号，“$\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}$”表示$(j_1j_2j_3)$取遍所有的三级排列时，对于形如

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

的项求知。

对二阶行列式（1.1.3）可以进行类似的分析，并可得到同样的规律。因此，我们很自然地将行列式的概念推广到n阶行列式。

定义1.4 n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.1.9}$$

是所有取自不同行，不同列的n个元素的乘积

$$a_{1j_1}\ a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.1.10}$$

的代数和，其中$(j_1j_2\cdots j_n)$是一个n级排列。当$(j_1j_2\cdots j_n)$是偶排列时，项（1.1.10）取正号；当$(j_1j_2\cdots j_n)$是奇排列时，项（1.1.10）取负号。即